Cálculo diferencial

Fundamentos, aplicaciones y notas históricas

Antonio Rivera Figueroa

Grupo Editorial Patria

DR. ANTONIO RIVERA FIGUEROA
INVESTIGADOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
CINVESTAV DEL IPN

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Supervisor de prepensa: Gerardo Briones González
Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís
Fotografías: © Thinkstockphoto

Revisión técnica:
Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

Cálculo diferencial. Fundamentos, aplicaciones y notas históricas

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-898-5

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Dedicatoria

Dedico esta obra a la memoria de mi querida esposa Gloria y de mi entrañable madre Nachita. También va mi dedicatoria a mis hijos Gloria, Karla y Toño.
A mis nietos Robin, Sandy y Toñito.

CONTENIDO

PRÓLOGO

Este libro está dirigido a estudiantes y profesores de la asignatura de **cálculo diferencial** impartida a nivel universitario en las carreras pertenecientes al área de ciencias físico-matemáticas e ingeniería. El lector encontrará aquí un tratamiento completo de los fundamentos del cálculo diferencial, al tiempo que también hallará diversas aplicaciones de este. A lo largo de la obra, las exposiciones de los temas se acompañan con notas históricas y biografías de personajes que desempeñaron un papel importante en la creación y el desarrollo del cálculo diferencial. Estas notas históricas no solo tienen el propósito de hacer más amena la lectura sino también de proporcionar al lector información sobre el desarrollo y la evolución de las ideas acerca del cálculo diferencial, ayudándolo a comprender la importancia de estas y el papel que juegan en la actualidad. Por ejemplo, una pregunta que solemos hacernos con frecuencia es: ¿por qué todo libro de cálculo o más bien de fundamentos de cálculo, inicia con el estudio de los números reales? Sin duda, la respuesta se obtiene de los datos históricos sobre los trabajos del matemático alemán Richard Dedekind.

El estudio de los números reales, con el que inicia todo tratado de fundamentos del cálculo, es la herencia que legó Dedekind como resultado de las reflexiones que hizo hacia el otoño de 1858, cuando enseñaba cálculo en la Escuela Politécnica de Zúrich, en Suiza. En aquella época, Dedekind se percató de que todas las pruebas de los principales resultados del cálculo se basaban en las propiedades de los números reales, aunque concebidas en un contexto geométrico, sobre todo la que se refiere a la continuidad. Por ejemplo, el hecho que toda sucesión de reales que crece permanentemente y que no sobrepasa algún número, por necesidad siempre tiene un límite, esta es, sin duda, una aseveración que se sustenta en la evidencia geométrica, o más específicamente en la representación de los reales en la recta y en la incuestionable continuidad de la recta ideal. Por tanto, Dedekind llegó a la conclusión de que en las demostraciones de los teoremas importantes del cálculo, hacía falta un tratamiento puramente aritmético de los reales, tarea a la cual se dedicó durante varios años de su vida; por supuesto, con resultados exitosos. Desde entonces, los matemáticos tomaron conciencia de la necesidad de expresar aritméticamente la continuidad de los números reales en la construcción y el desarrollo del cálculo, por lo que en el futuro el estudio de los números reales constituirá el inicio de todo tratado de fundamentos de cálculo en el que se pretenda probar con rigor sus principales resultados. Por lo antes expuesto, resulta importante comprender el papel que juegan las propiedades de los números reales en ese afán de rigor, solo así será posible saber en realidad cuándo es necesario dedicarle un capítulo a este importante sistema de números y cuándo no lo amerita; todo depende de los objetivos que tengamos en nuestro estudio del cálculo.

Por supuesto, en lo que se refiere a los fundamentos del cálculo, este libro no es la excepción. Esto significa que también inicia con el estudio de los números reales, aunque desde una perspectiva diferente a la de la mayor parte de los libros de cálculo del mismo nivel; así pues, expliquemos en qué consiste nuestro punto de vista. Es común que los libros de cálculo presenten a los números reales como un sistema axiomático, donde primero se postulan las propiedades algebraicas, conocidas como propiedades de campo y después se enuncian las propiedades de orden, es decir las de las desigualdades, para luego hacer referencia a las propiedades de continuidad, acerca de las cuales Dedekind reflexionó profundamente. Presentar los números reales de esta manera, representa mirarlos como un sistema axiomático. En general, en un sistema axiomático la teoría inicia solamente probando teoremas a partir de los axiomas y continúa probando teoremas, para lo cual se usan los axiomas y los teoremas ya probados. Además, en este caso, toda aseveración o propiedad referente a los números reales que no esté enunciada en los axiomas deberá ser probada usando los axiomas o los teoremas ya probados. Trabajar con los sis-

temas axiomáticos requiere de una madurez matemática que se va adquiriendo en forma gradual; por ejemplo, un tratamiento axiomático de los números reales requiere demostrar la desigualdad $1 > 0$. Así, teoremas como este causan desconcierto en los estudiantes que se inician en el arte de las demostraciones matemáticas, pues en esta etapa de sus estudios apenas empiezan a comprender qué significa trabajar con los sistemas axiomáticos, aun cuando así lo hayan hecho en sus cursos de geometría de bachillerato. Algunos docentes podrían opinar que el estudio de los números reales como sistema axiomático podría ser el inicio del entrenamiento de los estudiantes con los sistemas axiomáticos; sin embargo, vale la pena notar que en cálculo hay mucho que aprender, pero también que hay muchas otras oportunidades más para entrenarse en las demostraciones matemáticas, fuera por supuesto del contexto de los sistemas axiomáticos. Los razonamientos y las pruebas matemáticas no son exclusivos de los sistemas axiomáticos; el arte de la demostración ocurre en muchos contextos. Las demostraciones de los principales resultados del cálculo de por sí ya poseen la suficiente complejidad como para que todavía se agregue un innecesario tratamiento axiomático de los reales. Hacerlo así puede distraer al lector acerca de lo relevante del cálculo, además de que consume un valioso tiempo que puede ser empleado para reflexionar y profundizar acerca de los fundamentos principales del cálculo, con el objetivo de estudiar temas como los que se tratan en el capítulo 7, los cuales se exponen más adelante, y para la resolver problemas.

En el caso de este libro, el interés primordial que tenemos al presentar los números reales en el capítulo 1, es que el lector adquiera destrezas en el manejo de los números reales; por ejemplo, con las propiedades algebraicas, las desigualdades y los procesos de racionalización. Asimismo, también se considera importante aquí que el estudiante comprenda lo que significan las representaciones decimales periódicas y no periódicas, que conozca las diferentes clases de números reales y cómo se caracterizan por sus expansiones decimales; aunque, por supuesto, también se postula la continuidad de los reales, pero no en el contexto de un sistema axiomático. Esto significa que aquí asumimos, como lo hacían los matemáticos en la época de Dedekind, familiaridad por parte del lector con el álgebra de los reales y las desigualdades (aunque no precisamente en el contexto axiomático). En este sentido, uno de los objetivos del capítulo dedicado a los números reales es que el lector adquiera destreza en el manejo de los mismos. Asimismo, uno de nuestros objetivos es que el lector comprenda la muy importante propiedad de continuidad de los reales y que entienda el porqué de su importancia; no obstante, es seguro que esto se logrará en forma gradual a lo largo del libro. En el estudio de los números reales, también se tratan los dos famosos números π y e, los cuales juegan un papel muy importante en el estudio del cálculo. Para un acercamiento a estos números, que se tratan en el capítulo dedicado a los números reales, se acude a ideas y recursos heurísticos; el tratamiento riguroso se pospone para capítulos posteriores.

Ahora, dedicamos estas líneas a explicar otras diferencias importantes que el lector encontrará en este texto con respecto a la mayor parte de los libros de cálculo. El concepto de función y las funciones elementales son una parte importante en todo curso de cálculo, por esta razón en este libro se dedican dos capítulos a su estudio. El primero de estos se refiere al concepto general de función y a los diversos conceptos sobre funciones en general; este es, sin duda, un capítulo muy apropiado para entrenarse en lógica y razonamientos matemáticos, ya que se trata de un tema en extremo formativo en el aprendizaje de la matemática. El segundo capítulo sobre funciones está dedicado a la presentación de las funciones elementales. No obstante, la función exponencial se presenta heurísticamente en el capítulo introductorio a las funciones elementales, aunque en capítulos subsiguientes se le da el tratamiento riguroso propio de un curso sobre fundamentos del cálculo. Por su parte, la función exponencial queda rigurosamente definida en el capítulo 5, el cual está dedicado a la continuidad, por lo que a partir del estudio de ese capítulo se considera que este tema puede usarse en los capítulos dedicados a la derivada y sus propiedades, así como en posteriores tratados sobre cálculo integral. Esta constituye, sin duda, otra diferencia respecto de la mayor parte de los libros de cálculo, pues en aquéllos, por lo general, se presenta la función

exponencial hasta los capítulos dedicados al cálculo integral. Presentar la función exponencial tempranamente tiene la ventaja de que puede usarse en el tema de la derivada y sus aplicaciones. Además, el acercamiento que adoptamos en esta obra responde a la percepción intuitiva que tenemos de la función exponencial, la cual consiste en considerarla como una extensión natural de las potencias con exponentes enteros o racionales. Aun cuando no se estudien las demostraciones en esta construcción de la exponencial, es interesante observar y analizar cómo se organizan estas en este proceso, además de entender cuáles son las dificultades que se tienen que salvar para establecer una definición. Si así lo desea, el alumno tiene la posibilidad de no estudiar las demostraciones de la cadena de los pequeños resultados que conducen a la definición, aunque sí se le recomienda que observe el panorama en su generalidad, ya que esto resulta una buena manera de aprender matemáticas.

En tanto, las funciones trigonométricas también se estudian en el capítulo de las funciones elementales, donde se acude al famoso círculo trigonométrico. En este tema, asimismo, se reflexiona acerca de la posibilidad de medir los ángulos con diferentes unidades. Por su parte, en el capítulo dedicado a la continuidad de funciones se destaca la importancia de medir los ángulos en radianes. Como se puntualiza, el radián es la unidad que se adopta en cálculo para medir los ángulos, ya que es la unidad ideal para medir los ángulos en cálculo; sin embargo, es común que no se conozca o no se haya reflexionado acerca del porqué el radián es tan relevante.

Un recurso importante para definir las funciones con rigor y efectuar un tratamiento simple de límites y continuidad de funciones son las sucesiones y sus límites, por esa razón el capítulo 4 se dedica íntegramente a su estudio. En ese capítulo, además de desarrollar la teoría sobre límites de sucesiones, también se definen con precisión los famosos números π y e, entre otros. En el estudio sobre límites de funciones, se inicia con el uso de la propiedad de continuidad de los números reales; con ese tema también inicia nuestra reflexión acerca del papel que juega esta continuidad, concebida aritméticamente como lo hizo Dedekind. En el capítulo 4 también se analizan el concepto de serie y algunos resultados sobre las mismas, dado que las series y sus límites son el recurso para definir las expansiones decimales estudiadas en el capítulo 1. Por supuesto, esta no será la única aplicación de las series, ya que están presentes a lo largo de la teoría del cálculo diferencial e integral.

El capítulo 5, por su parte, está dedicado al estudio de los límites y de la continuidad de las funciones, debido a que la teoría sobre límites de funciones resulta de gran importancia para el estudio de la continuidad de las funciones y de la derivada que se hace en capítulos posteriores. En el capítulo sobre continuidad también se establecen los principales resultados sobre funciones continuas, entre los que destacan el teorema de Bolzano, el teorema del valor intermedio, el teorema de Weierstrass sobre funciones acotadas y la propiedad conocida como continuidad uniforme; este último teorema también desempeña un papel muy importante en capítulos posteriores. Cabe aclarar que la teoría sobre límites de sucesiones facilita el estudio sobre continuidad, por lo que resulta una gran ventaja estudiar con antelación los límites de sucesiones. De cualquier manera, es tan importante la teoría sobre límites de sucesiones que resulta necesario estudiarla en algún momento, así que es mejor anticiparla, ya que de esa manera matamos dos pájaros con un solo tiro.

El capítulo 6 está dedicado al concepto de la derivada y de sus propiedades más importantes. En este se exponen las reglas de derivación, la derivada de funciones compuestas (la de la cadena), la derivación de funciones inversas y las derivadas sucesivas. Todas estas reglas se aplican a las funciones elementales, con lo que podemos obtener, en particular, las derivadas de las funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, las seis funciones trigonométricas y sus funciones inversas, las cuales constituyen las seis funciones arco. Con las derivadas de estas funciones, es posible obtener la derivada de cualquier función elemental, concepto que se estudia con amplitud en el capítulo 3, mismo que precisamente lleva ese nombre; quizá, esta reflexión no la hayan hecho muchas personas que ya conozcan el tema.

Sin menoscabo de otros capítulos, consideramos que el capítulo 7 es uno de los más importantes de esta obra y, por tanto, no debe omitirse en ningún curso de cálculo universitario; es preferible sacrificar algo de tiempo al estudio de los reales y hasta omitir diversas demostraciones del capítulo 5, con tal de tener tiempo suficiente para estudiar los temas de este capítulo. Sin duda, podemos considerar a este capítulo como el corazón del cálculo diferencial, al menos los capítulos que le preceden tienen como propósito la preparación del lector para el estudio los temas aquí expuestos; en este sentido, el capítulo 7 es una meta muy importante. En este se exponen los principales resultados del cálculo diferencial; por ejemplo, el teorema del valor medio en sus diferentes versiones, como los teoremas de Rolle, de Lagrange y de Cauchy. En este capítulo, también se estudia, como consecuencia del teorema de Cauchy, la utilísima regla de L'Hospital, que suele ser de los recursos favoritos de los estudiantes para el cálculo de límites de funciones; aunque es necesario saber con exactitud cómo se establece este teorema, para no tratar de aplicarlo donde no es posible. Entre otros temas muy importantes, tanto en el estudio de las funciones como en las aplicaciones del cálculo diferencial, destacan los diversos criterios para máximos, mínimos y concavidades de funciones. Por tanto, estos temas se exponen ampliamente, acompañados de algunas reflexiones interesantes acerca de las condiciones de necesidad y suficiencia que suelen confundir a alumnos y profesores. Asimismo, también se estudia el desarrollo de Taylor y las propiedades de los polinomios de Taylor. Con estos teoremas conoceremos, por ejemplo, cuáles son los algoritmos que utilizan las calculadoras científicas y las computadoras personales para evaluar funciones, como las exponenciales y trigonométricas. Se trata, pues, de un capítulo que es obligatorio en todo curso de cálculo; por este motivo, se recomienda estudiar el capítulo 7 en su totalidad. Así pues, constituye un capítulo muy importante.

El capítulo 8 está dedicado a las aplicaciones de la derivada; en este se ofrece una diversidad de aplicaciones tanto en la matemática como en la física, la ingeniería y otras disciplinas. Aquí también se muestra el poder de la derivada como recurso para el estudio de las funciones, se incluye el método de Newton para el cálculo aproximado de raíces de funciones y se hace un análisis del error correspondiente cuando se obtiene una aproximación de una raíz mediante este método.

Finalizamos este prólogo haciendo una sugerencia para la lectura de la obra; si bien el lector puede encontrar todas las demostraciones de los resultados que se enuncian, incluyendo algunas pruebas que, por lo común, se evitan en los libros de cálculo, no es necesario estudiar muchas de estas pruebas en un primer curso de cálculo, ya que estas demostraciones podrán estudiarse en una segunda lectura de la obra. También es posible omitir diversas demostraciones si el libro se usa en un curso de las carreras de física o de ingeniería, pues los objetivos difieren sustancialmente de los objetivos de una carrera de matemáticas. Pero aun como libro de apoyo para las carreras de matemáticas, en su estudio pueden omitirse algunas de las pruebas, sin menoscabo de la comprensión de los teoremas y de sus aplicaciones en el resto de la obra. Entre las pruebas que pueden omitirse, en particular están las que hemos remitido al apéndice. El propósito de que incluyamos estas demostraciones no contradice nuestra sugerencia de que puedan omitirse algunas de estas en un primer curso de cálculo universitario, ya que pretendemos que el lector vea en este libro una fuente de consulta en donde posteriormente encuentre las demostraciones que por lo común no se hallan en obras similares. Si se hace una selección cuidadosa de los resultados y de las demostraciones, el libro resulta muy útil, por ejemplo para un curso de ingeniería, con la seguridad de que los temas son tratados con el nivel matemático que requiera o desee cualquier institución universitaria. El autor espera que el lector disfrute de la obra tanto como él la disfrutó al escribirla.

Antonio Rivera Figueroa
México, D.F., mayo 2012.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional por el amplio apoyo que siempre me ha brindado para llevar a cabo mis investigaciones y la escritura de obras como la presente. Los resultados de estas investigaciones han suministrado material que se incluye a lo largo del libro y que espero lo haga más didáctico en el tema de los fundamentos del cálculo. También agradezco a mis alumnos de varias generaciones del curso de cálculo que a lo largo de varios años he ofrecido en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del mismo Instituto. De mis alumnos no solamente me ha hecho consciente de las dificultades que se presentan en el estudio de los fundamentos del cálculo sino también he aprendido ideas de ellos y me ha hecho reconocer que las ideas del profesor no necesariamente son mejores que la de sus discípulos. Gracias a esos jóvenes por sus enseñanzas.

Sotero Prieto Rodríguez (1884–1935)



Destacado ingeniero mexicano. Nació en Guadalajara, Jalisco, hijo del ingeniero minero y profesor de matemáticas Raúl Prieto González Bango y de doña Teresa Rodríguez de Prieto. En 1901 terminó sus estudios en la Escuela Nacional Preparatoria y en 1906 concluyó la carrera de ingeniería civil en la Escuela Nacional de Ingenieros, de la cual nunca obtuvo su título.

Durante más de un cuarto de siglo se desarrolló como profesor de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria y en la Escuela Nacional de Ingenieros, donde influyó en la formación de ingenieros y licenciados en ciencias exactas.

Por su destacada labor en la enseñanza de las matemáticas y física, don Sotero Prieto Rodríguez fue considerado siempre como un gran maestro, que contribuyó de manera importante en la formación de una importante generación de destacados profesionales, de quienes sobresalen Alfonso Nápoles Gándara, Manuel Sandoval Vallarta, Vicente Guerrero y Gama, Enrique Rivero Borrel, Nabor Carrillo Flores, Javier Barros Sierra, Alberto Barajas, Roberto Vásquez, Efrén Fierro, Carlos Graeff Fernández, Jorge Quijano, Manuel López Aguado y muchos más.

Los científicos e ingenieros discípulos del maestro Sotero Prieto consolidaron la certidumbre del gran maestro de que las ciencias matemáticas y físicas son fundamentales en cualquier ingeniería.

Respecto a la influencia que Sotero Prieto ejerció en la instauración de la matemática y la física en México, Alberto Barajas comenta: "Sotero Prieto es indudablemente el maestro al que se debe el desarrollo moderno de las matemáticas y la física". También, como dijese Elí de Gortari, en 1980, Sotero Prieto fue el precursor de la intensa actividad matemática que existe hoy día en México.

1



1.1 Introducción

En el prólogo de su breve, pero histórico trabajo sobre continuidad y números irracionales, el profesor y brillante matemático alemán Richard Dedekind narra que mientras enseñaba los fundamentos de cálculo diferencial, en el otoño de 1858, en la recién creada Escuela Politécnica de Zurich, en Suiza, durante un momento de inspiración se percató con una claridad como jamás había tenido, de la carencia de una fundamentación realmente científica de la aritmética. Dedekind expone en ese prólogo que escribe en marzo de 1872, que al discutir la noción de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, había recurrido a evidencias geométricas, especialmente al probar el teorema de que cada magnitud que crece continuamente, pero no más allá de todos los límites, debe aproximarse a un valor límite (hoy diríamos que toda sucesión creciente y acotada superiormente debe converger).

Dedekind reconoce en su exposición que el recurrir a la intuición geométrica lo considera extremadamente útil e indispensable desde el punto de vista didáctico, sobre todo si uno no desea invertir mucho tiempo en exponer los principios del cálculo, pero tal tratamiento de ninguna manera puede considerarse realmente científico. Continúa diciendo que su insatisfacción era tan fuerte que tomó la firme determinación de reflexionar sobre la cuestión tanto como se requiriese hasta encontrar una fundamentación puramente aritmética y completamente rigurosa de los principios del cálculo. Por supuesto, Dedekind logró su objetivo y el fruto de sus profundas reflexiones fue su trabajo sobre continuidad y números irracionales, en donde el concepto fundamental es lo que actualmente conocemos como cortaduras de Dedekind. Este concepto, hoy en día es un recurso muy utilizado para definir los números reales, en especial los números irracionales.

Después del trabajo de Dedekind, todas las demostraciones tuvieron que rehacerse, pues estaban basadas en evidencias geométricas, dicho en otras palabras, estaban sustentadas en la representación geométrica de los números reales. Antes del trabajo de Dedekind, las pruebas se apoyaban en la continuidad de la línea recta. Este era el motivo de insatisfacción de Dedekind. El importante teorema de que toda sucesión creciente y acotada superiormente converge, se sustentaba en la continuidad de los reales percibida de forma geométrica, y no con un sustento puramente aritmético. Dedekind añade que este teorema muy bien podría usarse para fundamentar el cálculo, es decir, aceptándolo como verdadero sería totalmente posible probar los principales teoremas del cálculo con todo el rigor matemático que requiere un tratamiento científico.

La aportación importante que Dedekind hace en su trabajo sobre continuidad y números irracionales es construir los números reales, especialmente los números irracionales, de esta manera da una definición puramente aritmética de los números reales, misma que entraña su propiedad más profunda que es la continuidad de los mismos, concepto indispensable para poder hablar de límite y continuidad de las funciones. Hoy en día hay dos alternativas para abordar el tema de continuidad de los números reales. Una consiste en construir el sistema de los números reales, por ejemplo, mediante las cortaduras de Dedekind y otra consiste en presentar a los números reales postulando su continuidad, además de las otras propiedades algebraicas y sobre desigualdades que comparten los racionales. Este último acercamiento consiste en definir los números reales como un sistema axiomático, se trata de un acercamiento que es muy común encontrar en los textos de cálculo, razón por la cual casi siempre inician con un capítulo sobre los números reales (algunos inician con álgebra de conjuntos).

En este texto hemos adoptado postular el principio de continuidad de los números reales, su construcción no es parte de nuestros objetivos, además consideramos que esa construcción no es indispensable para fundamentar el cálculo. Sin embargo, es importante aclarar que tampoco presentamos a los números reales como un sistema axiomático. No es necesario invertir tiempo en

la axiomática ni en la construcción de los reales, será suficiente y muy importante que tengamos destreza con las propiedades algebraicas de los números reales, propiedades que a nivel simbólico son una extensión de las que tienen los racionales y que trabajamos desde nuestros cursos previos de cálculo elemental.

En lugar de darle un tratamiento axiomático a los números reales preferimos poner énfasis en sus representaciones decimales, en distinguir los racionales de los irracionales mediante su representación decimal. También será importante fortalecer los procesos de racionalización y la habilidad en el uso de desigualdades. Nuestro acercamiento difiere de los que suelen encontrarse en la mayoría de los textos de cálculo, o deberíamos decir de los dedicados a los fundamentos del cálculo, propio del nivel universitario o de escuelas profesionales.

1.2 Nuestras primeras experiencias con los números reales

Desde que cursamos nuestros estudios de bachillerato estamos familiarizados con los números reales, aunque podríamos decir que nuestro primer contacto con ellos se remonta a la primaria, cuando aprendimos, primero a contar con los números naturales y después a aplicar los algoritmos de la adición, la multiplicación y la división con enteros o números decimales. También fue en la primaria donde conocimos un famoso número real cuando aprendimos la fórmula $C = 2\pi r$, para calcular la circunferencia de un círculo; donde r es el radio del círculo y π una constante, un número real cuyo valor siempre recordamos como 3.1416. Dado que $2r$ es el diámetro del círculo, es posible describir la fórmula para la circunferencia $C = 2\pi r$ como: la circunferencia es igual al producto que resulta de multiplicar π por el diámetro.

Pero, ¿qué es π? Con seguridad leímos su definición clásica en nuestros libros de texto de la primaria, la cual dice que π es la razón que hay entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, es decir $\pi = \frac{C}{2r}$. La fórmula del perímetro de un círculo no es otra cosa que la misma definición de π, pareciera entonces que el único círculo interesante en la definición de π y la fórmula para la circunferencia fuera el círculo vicioso: la circunferencia es π veces el diámetro y, por definición, π es igual a la razón de la circunferencia al diámetro. Independientemente de esta aparente extraña situación de quién fue primero, el huevo o la gallina, nos encontramos ante una definición de π de naturaleza geométrica, pero no una aritmética. Es en el contexto del cálculo, donde podemos hacer una definición aritmética de π, o debiéramos decir una definición analítica, no podemos hacer una definición de π con recursos puramente aritméticos.

Como el diámetro "cabe" cerca de 3.1416 veces en la circunferencia, π es aproximadamente 3.1416; pero, este no es su valor exacto. Tratando de mejorar la aproximación de π, algunas veces acudimos a 3.14159 y quizá lleguemos a escribir que $\pi = 3.14159\ldots$ para indicar que todavía pueden escribirse más decimales si deseamos tener mejores aproximaciones.

1.3 Sumatorias infinitas

¿Qué significan los puntos suspensivos en la expresión decimal $\pi = 3.14159\ldots$ y en otras expresiones numéricas? La interpretación que hemos dado a estos puntos corresponde a lo que

podemos leer en el diccionario de la Real Academia Española: "signo ortográfico (...) con que se denota quedar incompleto el sentido de una oración...". Para el caso particular $\pi = 3.14159\ldots$, por ejemplo podemos plantear preguntas como: ¿cuántos decimales faltan por escribir?, ¿cuáles son esos decimales? En una sección posterior de este capítulo, dedicada a π, estudiaremos un poco acerca de su interesante historia y cómo la humanidad siempre tuvo presente dichas preguntas.

Es probable que durante nuestros estudios de secundaria o bachillerato nos enteramos de que los decimales faltantes en la expresión para el valor de π son una infinidad. Quizá π fue el primer número que conocimos con una cantidad infinita de decimales y también es probable que nuestra segunda experiencia con este tipo de expresiones se dio cuando dividimos $3\overline{)1}$:

$$\begin{array}{r l} & 0.3333 \\ 3 & \overline{)1.0} \\ & 10 \\ & 10 \\ & 10 \\ & 1 \end{array}$$

El interesante fenómeno que observamos en este proceso de división, el cual consiste en la repetición interminable del residuo 1, nos permite continuar agregando tantos decimales como queramos en el cociente; esto lo expresamos acudiendo a los puntos suspensivos

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

En este caso, los puntos suspensivos tienen un significado un tanto diferente al de los puntos suspensivos que utilizamos para π. Ahora no solo indican que hay más dígitos que estamos omitiendo, sino que se trata de una infinidad de decimales iguales a 3.

Tiempo después aprendimos que las expansiones decimales de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ se escriben con puntos suspensivos

$$\sqrt{2} = 1.4142...$$
$$\sqrt{3} = 1.732...$$

En estos dos casos, como para π, los puntos suspensivos ciertamente nos mantienen en el suspenso, son un misterio, no sabemos con certeza lo que representan, excepto por el hecho obvio de que sustituyen a los decimales faltantes.

Lo que representan los tres puntos suspensivos sólo puede explicarse con precisión en un curso de cálculo y no en uno de aritmética elemental, pues para este fin se requiere el concepto de límite o algún otro con el mismo grado de complejidad. Por ejemplo, con los puntos suspensivos podemos escribir

$$1 = 0.999...$$

Veamos qué significa esto. Es bien conocido por nosotros que la expresión 0.25, significa

$$0.25 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}\cdot$$

De forma similar, el significado de la expresión decimal 1.4142 es

$$1.4142 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4}.$$

Pero, ¿qué significa la expresión 1.4142...? Si con ingenuidad sólo trasladamos los tres puntos suspensivos a la sumatoria finita:

$$1.4142\cdots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots,$$

podemos pensar que ellos toman el lugar de los sumandos faltantes. Un caso simple es cuando estos tres puntos representan una cantidad finita de decimales faltantes, ahora estos tres puntos podrán representar una infinidad de sumandos. Una sumatoria con una infinidad de sumandos se define a través del concepto de límite. Observe con cuidado las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= 0.25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}\\
\sqrt{2} &= 1.4142\ldots \quad = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots\\
1.4142 &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4}\\
\sqrt{3} &= 1.732\ldots \quad = 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \cdots\\
1.732 &= 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3}\\
\pi &= 3.14159\ldots \quad = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots\\
3.14159 &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5}
\end{aligned}$$

Nótese que las relaciones

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.4142\\
\sqrt{3} &= 1.732\\
\pi &= 3.1416
\end{aligned}$$

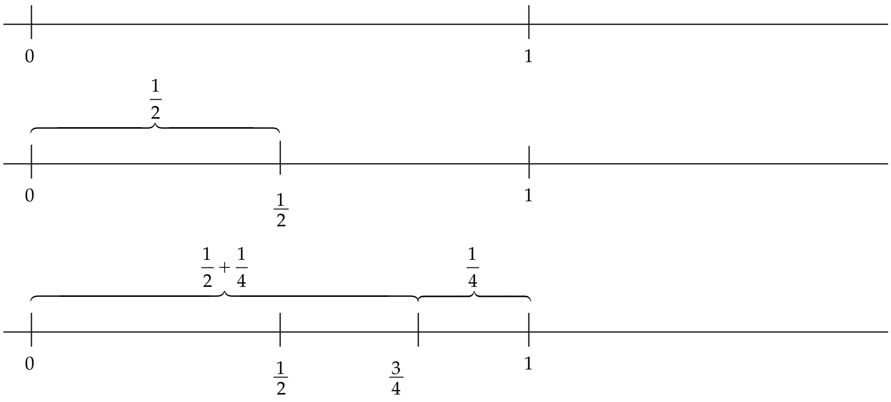
son incorrectas (¿por qué?).

En aritmética elemental, la operación adición está permitida solo para una cantidad finita de sumandos; más adelante extenderemos esta operación a una cantidad infinita. No es fácil concebir que tal operación sea posible, quizá pensemos que la infinitud de sumandos necesariamente nos conduce a resultados infinitos, sin embargo, es posible sumar una cantidad infinita de números teniendo como resultado un número finito. A reserva de que más adelante estudiemos este concepto (consulte capítulo 4), veamos algunos ejemplos que nos convencerán que tales sumatorias tienen sentido.

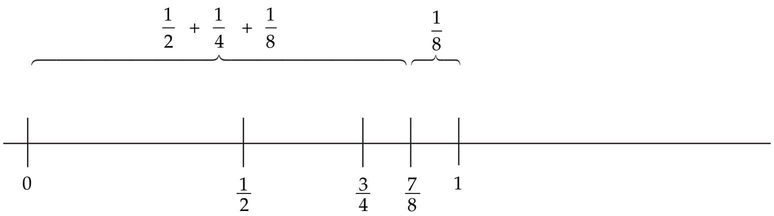
Vamos a construir una sucesión de sumatorias, a partir de un segmento de longitud, una unidad. Dividámoslo en dos partes iguales y tomemos como primer sumando una de ellas. Ahora, la mitad restante del segmento la dividimos en dos partes iguales. Cada una de estas

partes tendrá una longitud de $\frac{1}{4}$. Tomemos una de estas cuartas partes como segundo sumando. Entonces, tenemos la suma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$



El segmento restante, de longitud $\frac{1}{4}$, lo dividimos ahora en dos partes, cada una de longitud $\frac{1}{8}$. Una de estas dos partes de longitud $\frac{1}{8}$constituye otro sumando



Si continuamos con este proceso, obtendremos de forma consecutiva las siguientes sumatorias,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}&=\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}&=\frac{7}{8}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}&=\frac{15}{16}\end{aligned}$$

etc. Podemos ver en nuestras figuras que el resultado de cada una de las sumatorias es igual a lo que resulta de sustraerle al segmento unitario el segmento que nos ha quedado después de construir la sumatoria. Así, la suma puede calcularse fácilmente sin necesidad de realizar las operaciones con las fracciones. Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}&=1-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}&=1-\frac{1}{8}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}&=1-\frac{1}{16}\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1\,024}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1\,024}$$

El caso general se escribe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}.$$

En esta sumatoria general, n representa un número natural arbitrario. Entonces tenemos una sumatoria con n sumandos. De la expresión para esta, concluimos que la suma siempre será menor que 1 y que a medida que incrementamos el número de sumandos se aproximará a 1 tanto como queramos. En símbolos escribimos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\approx 1,\quad \text{para } n \text{ grande}$$

Dado que para valores grandes de n, la suma "es casi 1", convenimos en decir que la sumatoria con la infinidad de sumandos es igual a 1, exactamente 1 y escribimos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

Los tres puntos suspensivos representan la infinidad de sumandos restantes.

La expresión anterior es una definición, una abstracción, y una extensión de la operación adición de la aritmética elemental. Ahora, nos permitiremos adicionar una cantidad infinita de sumandos.

En este ejemplo particular fue posible asignar el resultado 1 a la sumatoria infinita, pues de la fórmula general

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

concluimos que "lo que le falta a la suma para ser 1" es $\frac{1}{2^n}$, lo cual es muy pequeño si n es grande.

Si a la fórmula anterior adicionamos una unidad a ambos miembros, obtenemos una sumatoria cuyo primer sumando es 1.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}.$$

Esta sumatoria es un caso particular de lo que se llama *sumatoria geométrica*. Aunque nosotros obtuvimos esta fórmula acudiendo a la interpretación gráfica, podemos deducirla sin este recurso. Por ejemplo, también tenemos las siguientes relaciones

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^n}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n+1}}\right)$$

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^n}=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{n+1}}\right)$$

Estas relaciones son casos particulares de la fórmula general de la *sumatoria geométrica*. Si r es cualquier número real diferente de 1 y n es cualquier número natural, entonces

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Esta fórmula la estableceremos y aplicaremos en el capítulo 4 (sección 4.9).

Si hacemos las sustituciones respectivas $r = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{5}$ y $r = \frac{1}{7}$, obtenemos las relaciones anteriores, de las cuales podemos escribir las sumatorias infinitas

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{3}{2}$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots = \frac{5}{4}$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{7}{6}$$

A las sumatorias infinitas, que hemos establecido empíricamente, le daremos un significado preciso en el capítulo 4.

Por el momento es suficiente saber que son rigurosamente definidas y que son el recurso para definir las representaciones con un número infinito de decimales.

En las siguientes secciones de este capítulo estudiaremos cómo estas representaciones decimales permiten caracterizar a los números racionales y, por tanto, a los números irracionales.

1.4 Números racionales y expansiones decimales

Un número racional es cualquiera de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros con $q \neq 0$, por ejemplo $\frac{1}{3}, \frac{-26}{13}$ y $\frac{11}{-7}$. Es posible representar los números racionales en la forma $\pm\frac{p}{q}$, donde p es entero no negativo (es decir, entero positivo o cero) y q es entero positivo. Cuando p es divisible por q, entonces $\frac{p}{q}$ se reduce a un entero positivo, así que todos los enteros (positivos, negativos y el cero) también son llamados números racionales.

La *expansión decimal* de un número racional consiste de entero a, llamado *parte entera*, seguido de un punto, llamado *punto decimal*, el cual a su vez es seguido de una lista o sucesión de dígitos, llamados *cifras decimales* o simplemente *decimales*:

$$x = a.a_1a_2a_3\ldots$$

La **expansión decimal** de un número racional, no es otra cosa que una representación del número, cuyo significado es una sumatoria de múltiplos de potencias de $\frac{1}{10}$. Por ejemplo, la representación

$$\frac{5}{4} = 1.25,$$

es otra forma de escribir

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}.$$

Otro ejemplo es

$$\frac{5\,093}{2\,500} = 2.0372 = 2 + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4}.$$

En general, una expansión decimal $x = a.a_1a_2a_3\ldots a_k$, donde a es un entero y $a_1, \ldots, a_k$ son dígitos, significa

$$x = a.a_1a_2a_3 \ldots a_k = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

Cada uno de los decimales indica el múltiplo de la potencia de $\frac{1}{10}$, la cual depende de la posición que ocupe el dígito. El dígito a_i en la posición i, es el factor de la potencia $\frac{1}{10}$.

Un fenómeno interesante es el que ocurre con el racional $\frac{1}{3}$, el cual no puede escribirse en la forma $x = a.a_1a_2a_3\ldots a_k$. En este caso, recurrimos a una representación decimal con puntos suspensivos

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Esta es una expresión que en el estudio de la matemática previa a la universidad solo significa que el proceso de la división no termina, es decir, puede continuarse todo lo que se desee. En ese nivel, este es el único significado de los puntos suspensivos, pero también se dice que la expansión decimal es infinita. Si queremos darle algún sentido preciso a este tipo de expresiones tenemos que recurrir a la noción de sumatoria con un número infinito de sumandos. Las expansiones finitas se obtienen cuando, al aplicar el algoritmo de la división, obtenemos de forma eventual el residuo cero. Cuando nunca alcanzamos el residuo cero no es posible representar el racional en la forma $x = a.a_1a_2a_3\ldots a_k$ (sumatoria finita). Otro ejemplo de este fenómeno es

```
   0.7142857
7)5.0
    10
     30
      20
       60
        40
         50
          1
```

En este ejemplo, el primer residuo 1 se obtiene de nuevo durante el proceso de la división. Al obtener el residuo 1 por segunda ocasión, podemos concluir que la secuencia se repite, y entonces sabemos lo que ocurrirá si proseguimos con el proceso. Esto implica que en particular no es posible escribir el racional $\frac{5}{7}$ como una expansión finita. En esta situación, como en el caso de $\frac{1}{3}$, escribimos

$$\frac{5}{7} = 0.714285714285...$$

Con los puntos suspensivos queremos decir, aunque no de manera explícita, que la cadena de dígitos 714285 se repite infinitas veces. Como los puntos suspensivos solo indican que continúan decimales y no proporcionan más información, resulta mejor opción la escritura

$$\frac{5}{7} = 0.714285\overline{714285}$$

Con la línea o testada arriba de los decimales hacemos explícita la cadena de dígitos que se repite infinitas veces. Esta cadena de dígitos se llama *periodo* de la expansión decimal, y decimos en este caso que la expansión decimal es *periódica*.

En términos estrictos, la expresión anterior significa una sumatoria infinita. En nuestros ejemplos tenemos

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots$$
$$\frac{5}{7} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \cdots$$

Para precisar lo que significa tal sumatoria se requiere el concepto de límite. Este concepto es lo que hace la diferencia entre la aritmética elemental y el cálculo.

Un hecho interesante es que la expansión decimal de cualquier número racional positivo $\frac{p}{q}$ es periódica, es decir, siempre tendrá un periodo. Para convencernos de ello, observemos que si tenemos una fracción $\frac{p}{q}$ y realizamos la división $q\overline{)p}$ con el algoritmo ya conocido desde la primaria, tenemos dos opciones:

- o bien, eventualmente obtenemos residuo cero.
- o durante el proceso obtendremos la repetición de un residuo diferente de cero.

Si nunca obtenemos residuos cero la repetición de un residuo es inevitable, pues solo hay un número finito de posibilidades para el mismo. Por ejemplo, para la división $7\overline{)5}$, los únicos posibles residuos son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, así que en el proceso de la división eventualmente se va a repetir alguno de estos residuos, que fue lo que ocurrió cuando obtuvimos la expansión decimal de $\frac{5}{7}$. Otro ejemplo es la división $2\,500\overline{)5\,093}$; en este caso, los posibles residuos son 0, 1, 2, … , 2 499. Por fortuna, se obtiene residuo cero tempranamente, por lo que pronto obtuvimos la expansión decimal finita $\frac{5\,093}{2\,500} = 2.0372$.

En general, si durante el proceso de la división $q\overline{)p}$ obtenemos residuo cero, el proceso se concluye y obtenemos una expansión decimal finita. Si nunca se obtiene residuo cero, entonces durante el proceso de la división eventualmente se repetirá uno de los residuos, 0, 1, 2, … , $q-1$, dando lugar a un periodo. Esto muestra que

Todo número racional tiene una expansión decimal periódica.

Algo menos evidente y más interesante es el hecho de que si escribimos cualquier expresión decimal con el periodo que deseemos, esa expresión será la expansión decimal de algún racional positivo $\frac{p}{q}$. Por ejemplo, trate de averiguar a cuáles racionales corresponden las expansiones

$$0.666\ldots = 0.\overline{6}$$
$$1.111\ldots = 1.\overline{1}$$

Para explicar el método que nos permitirá descubrir el racional a partir de su expansión decimal periódica, veamos primero el caso de las expansiones decimales finitas. Por ejemplo, ya hemos visto que expresiones como 7.14935 y 60 384.30029 significan

$$7.14935 = 7 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^5}$$
$$60\,384.30029 = 60\,384 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5}.$$

En realidad podemos escribir en potencias de 10 y de $\frac{1}{10}$:

$$7.14935 = 7 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^5}$$

$$60\,384.30029 = 6 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4 \times 10^0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5}.$$

De este significado general de una expansión decimal finita, es posible deducir la muy usada regla de multiplicación por 10, que consiste en recorrer el punto una posición a la derecha. Por ejemplo, para multiplicar por 10 el número 60 384.30029, simplemente recorremos el punto decimal una posición a la derecha:

$$\begin{aligned} 10 \times 60\,384.30029 &= 10 \times \left(6 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4 \times 10^0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5}\right) \\ &= 6 \times 10^5 + 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 10^0 + \frac{2}{10^3} + \frac{9}{10^4} \\ &= 60\,3843.0029 \end{aligned}$$

Esta idea, aun cuando sea a nivel intuitivo, podemos extenderla al caso de sumatorias con un número infinito de sumandos. La regla de la multiplicación por 10, que consiste en recorrer el punto decimal una posición a la derecha y que podemos justificar por completo para expansiones decimales finitas, puede extrapolarse para expansiones decimales infinitas, por ejemplo, si

$$x = 0.333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots,$$

entonces

$$\begin{aligned} 10x &= 10 \times (0.333\ldots) \\ &= 10 \times \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots\right) \\ &= 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\ &= 3 + 0.333\ldots \\ &= 3.333\ldots \end{aligned}$$

En resumen, si $x = 0.333\ldots$, entonces $10x = 3.333\ldots$ La justificación de este hecho es una propiedad de las sumatorias infinitas también llamadas series, las cuales estudiaremos en el capítulo 4.

Ahora veamos, a través de ejemplos, cómo podemos aplicar la regla de la multiplicación por 10 para encontrar el número racional cuando conocemos su expansión decimal infinita. Iniciemos con el interesante caso de la expansión decimal infinita con periodo 9:

$$a = 0.999\ldots$$

Tenemos entonces

$$10a = 9.999\ldots$$

Así que

$$\begin{aligned} 10a &= 9.999\ldots = 9 + 0.999\ldots \\ a &= 0.999\ldots \end{aligned}$$

Observemos que al restar la segunda expresión de la primera, la parte decimal que es común a ambos números, se cancela para darnos

$$9a = 9.$$

Por tanto, obtenemos

$$a = \frac{9}{9} = 1\,.$$

Es decir

$$1 = 0.999\ldots$$

Veamos otro ejemplo, sea

$$b = 0.3525252\ldots = 0.\,3\overline{52}$$

En este caso, el periodo es 52, pero inicia en el segundo decimal de la expansión. Para descubrir la fracción $\frac{p}{q}$ a la cual corresponde la expansión decimal dada, aplicaremos la misma idea que en el ejemplo anterior. **Construiremos dos expansiones decimales con la misma parte decimal**, si bien infinita será común a ambos números. Al restar uno de estos al otro, obtendremos un entero, pues las partes decimales se eliminarán. Con esto, finalmente será posible expresar la expansión dada como cociente de dos enteros positivos:

$$\begin{aligned} b &= 0.3525252 = 0.\,3\overline{52} \\ 1\,000b &= 352.525252\ldots = 352 + 0.\overline{52} \\ 10b &= 3.525252\ldots = 3 + 0.\overline{52} \\ 990b &= 352 - 3 \\ 990b &= 349 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$b = \frac{349}{990}\,.$$

Con estos ejemplos es fácil adivinar la estrategia a seguir para hallar el racional cuando se conoce su expansión decimal infinita. Primero, tenemos que saber que se trata de una expansión decimal periódica, esta condición es muy importante, además tenemos que conocer el periodo. Una vez que conocemos esto, construimos dos múltiplos distintos del número dado, de manera que ambos múltiplos tengan una expansión decimal con el mismo periodo, el cual deberá iniciar a partir del punto decimal. De esta manera, al hallar la diferencia de ambos múltiplos se cancela la parte decimal y se obtiene un número entero. Esto permitirá obtener el racional buscado.

De lo anterior obtenemos la importantísima caracterización de los números racionales:

a) *Todo número racional* $\frac{p}{q}$ *tiene una expansión decimal periódica, y*

b) *Toda expansión decimal periódica corresponde a un número racional.*

Aquí es importante hacer una reflexión de carácter lógico. La condición *a*) no afirma que los números racionales sean los únicos que tienen expansión decimal periódica, su afirmación es más

débil, debido a que deja la posibilidad de que haya números no racionales con expansión decimal periódica, pero esta queda eliminada por la propiedad *b*). Precisamente la propiedad *b*) dice que no hay otro tipo de números que tengan expansión decimal periódica. Dicho de otra manera, si una expansión decimal es periódica, entonces la expansión corresponde a un número racional, no hay otra posibilidad. Ambas condiciones *a*) y *b*) podemos enunciarlas a la vez diciendo que los números racionales están caracterizados por el hecho de que su expansión decimal es periódica:

> Un número *a* es racional si y solamente si su expansión decimal es periódica.

Entonces, una manera de identificar a los números racionales es mediante su expansión decimal. Por tanto, si estamos ante una expansión que no es periódica, se trata de un número que no es racional. Una pregunta que surge de manera natural es si los siguientes números tienen expansiones decimales periódicas

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.4142156\ldots \\ \sqrt{3} &= 1.7320508\ldots \\ \pi &= 3.14159265\ldots \end{aligned}$$

En las siguientes secciones despejaremos esta duda.

1.5 Números irracionales y expansiones decimales no periódicas

Los números racionales son por definición cocientes de enteros $\frac{p}{q}$, con $q \neq 0$; se caracterizan porque su expansión decimal es periódica. Por tanto, un número cuya expansión decimal no sea periódica no es racional, estos números reciben el nombre de *irracionales*. Entonces, los irracionales son los números cuya expansión decimal es no periódica o bien se puede decir que son los que no se pueden escribir como cociente de enteros.

Tenemos entonces dos caracterizaciones de los irracionales:

a) *Un número es irracional si no es posible representarlo como cociente de dos enteros.*
b) *Un número es irracional si su expansión decimal es no periódica.*

En resumen los números reales son conjuntamente los racionales y los irracionales. Así que hay dos tipos de números reales. Dado un número real, este puede ser racional o irracional. Todo número real tiene una expansión decimal, finita o infinita. Los números racionales son aquellos cuya expansión decimal es periódica, esto incluye a los que tienen expansión decimal finita que constituyen casos particulares de las expansiones periódicas. Los números irracionales son los que tienen expansión decimal no periódica.

En principio, uno puede determinar si un número es racional o irracional observando su expansión decimal. Si se observa un periodo, el número será racional. Sin embargo, en la práctica puede ocurrir que sea difícil observar el periodo de un número racional, la longitud del periodo puede ser tan grande que no sea posible identificarlo. Por ejemplo, suponga que el periodo consiste de un millón de dígitos, a simple vista sería imposible determinar si hay o no periodo, incluso puede ser difícil para una computadora. Para darnos una idea de la dimensión de este problema,

supongamos que las siguientes expansiones decimales son periódicas, trate usted de determinar un posible periodo

$$a = 1.543982215439822154398221543982215439822154398221543982215439822 1\ldots$$
$$b = 1.27324918524791647209642534208644118524791647209642534208644118524\ldots$$

Para el primer número no es difícil reconocer un posible periodo, que consiste de los dígitos 54398221; sin embargo, para el segundo número no es fácil identificar lo que puede ser un periodo 185247916472096425342086441.

Por otra parte, es perfectamente posible que, a partir de la expansión decimal de un número, podamos concluir que se trata de un número irracional, es decir, es posible saber que la expansión decimal es no periódica. Por ejemplo, consideremos el número cuya expansión decimal es

$$1.01001100011100001111...$$

Los tres puntos representan los decimales que a continuación describimos: después de los cuatro unos, sigue un bloque de cinco ceros y cinco unos, seguido por un bloque de seis ceros y seis unos. En general, la expansión está formada por bloques de n ceros consecutivos y n unos consecutivos. Después de un bloque de n ceros y n unos le sigue un bloque de $n + 1$ ceros y $n + 1$ unos.

Esta expansión decimal es no periódica, por lo que representa un número irracional, no obstante podemos decir que conocemos todos sus decimales, pues es posible determinar el decimal correspondiente a cualquier posición dada. Por ejemplo, aunque hemos escrito solo unos cuantos decimales podemos determinar el decimal que aparece en la posición 100. Para eso, podemos extender la lista de los decimales o hacer algo más inteligente, como crear alguna estrategia de conteo, que nos permita determinar cuál es el dígito que aparece en esa posición. Por ejemplo, agrupemos los decimales en bloques de ceros y unos, el mismo número de ceros y de unos. El primer bloque es 01, el segundo bloque 0011, el tercero es 000111, y así sucesivamente. Por ejemplo, el bloque 20 estará formado por 20 ceros y 20 unos. El bloque n-ésimo estará formado por n ceros seguidos de n unos; este bloque está constituido por $2n$ dígitos. Ahora podemos obtener la cantidad de dígitos acumulados desde el bloque uno hasta el bloque n:

$$\begin{aligned}\underbrace{2}_{\text{bloque 1}} + \underbrace{4}_{\text{bloque 2}} + \underbrace{6}_{\text{bloque 3}} + \ldots + \underbrace{2n}_{\text{bloque } n} &= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\\ &= 2\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1).\end{aligned}$$

Por ejemplo, es fácil identificar que el número de dígitos acumulados hasta el bloque cinco es $5 \cdot 6 = 30$ y que el número de dígitos hasta el bloque 10 es $10 \cdot 11 = 110$. De aquí concluimos que el decimal en la posición 110 es un uno. De igual modo se puede concluir dado que el bloque 10 está formado por 10 ceros y 10 unos, el decimal de la posición 100 es un cero (es el último cero del bloque 10), este cero va seguido de 10 unos.

En general, ciertamente, los decimales de un número irracional son desconocidos, a excepción de algún número finito de estos, pero es importante notar que el hecho de que la cantidad de dígitos de una expansión sea infinita, no significa que todos estos sean en su totalidad desconocidos; en otras palabras, el hecho de que estos sean una infinidad no se contrapone con el hecho de que pudieran ser conocidos. Así, podemos decir que en el ejemplo anterior conocemos todos los dígitos de la expansión, aun cuando no es periódica. Conocer todos los dígitos de la

expansión significa que en teoría es posible determinar el dígito que ocupa cualquier posición en la expansión. Por ejemplo determine los dígitos que aparecen en las posiciones respectivas 1 305 y 9 742, de la expansión decimal antes dada.

Otro ejemplo de una expansión decimal no periódica, de la que podemos decir que son completamente conocidos todos sus decimales, es

$$d = 0.123456789101112131415161718192021\ldots$$

La expansión decimal la construimos yuxtaponiendo en orden todos los números naturales; otra vez, podemos decir que conocemos todos los decimales de esta expansión, pues es posible determinar el decimal que corresponde a cualquier posición dada. Quizá no sea tan simple como el caso anterior, pero podemos crear una estrategia de conteo que nos permita determinar el dígito que aparece en cualquier posición dada.

Si deseamos averiguar si un número es irracional podemos proceder de dos maneras, o bien mostramos que no es posible escribirlo como cociente de dos enteros o que su expansión decimal no es periódica. En general, tratar de probar cualquiera de las dos propiedades para un número dado puede ser un problema difícil.

En la siguiente sección probaremos que $\sqrt{2}$ es irracional mostrando que no es posible escribirlo como cociente de dos enteros positivos, lo cual implica que su expansión decimal es no periódica. Por otra parte, hoy se sabe que π es irracional, y aunque su prueba es mucho más complicada y no la veremos aquí, sí nos enteraremos cuándo y quién la llevó a cabo. Antes de que se tuviera la certeza de que π fuera irracional, hubo muchos intentos por tratar de encontrar un periodo, tratando con ello de probar que era racional. Por supuesto, los intentos fallaron, pues no existe tal periodo. Cuando revisemos un poco la interesante historia de este número comentaremos acerca de la investigación que se generó por el hecho de no saber que π es un número irracional. También conoceremos otro famoso número irracional denotado por la letra e. Este número, conjuntamente con π, son de los más notables de la matemática. Otro número famoso es el llamado *constante gamma* de Euler, denotado precisamente por la letra griega γ (gamma). Es posible aproximarse a la constante γ calculando

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

para valores grandes de n. Por ejemplo, tenemos las siguientes aproximaciones de γ

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \log 10 &\approx 0.6263831609\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \log 100 &\approx 0.5822073316\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1\,000} - \log 1\,000 &\approx 0.5777155815\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1\,000\,000} - \log 1\,000\,000 &\approx 0.5772161655
\end{aligned}$$

A continuación mostramos los primeros 20 decimales de la constante gamma de Euler

$$\gamma = 0.57721566490153286060\ldots$$

Un problema interesante acerca de este número es que actualmente no se sabe si es racional o irracional; es un problema que aún no se resuelve. Quien halle la respuesta a esta interrogante con certeza se inmortalizará en la historia de la matemática.

1.6 Los irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

Como se anunció en la sección anterior, ahora probaremos que $\sqrt{2}$ es un número irracional. La prueba que haremos tiene varios mensajes y será muy ilustrativa. En primer lugar se trata de una demostración de imposibilidad matemática, la imposibilidad de representar $\sqrt{2}$ como cociente de enteros. Que $\sqrt{2}$ no sea representado como cociente de enteros no es cuestión de tiempo o de incapacidad de quienes lo han intentado. Nadie ha podido, porque nadie jamás podrá hallar tal representación, no es cuestión de tiempo, dedicación o incapacidad. Este tipo de situaciones son comunes en matemáticas y podemos referirnos a ellas como casos de imposibilidad matemática. Para las pruebas de imposibilidad es muy común una técnica de prueba, en la cual se utiliza el llamado razonamiento por contradicción o la también llamada prueba por reducción al absurdo. En realidad, estos dos nombres se refieren a métodos diferentes, y aunque la diferencia es un tanto sutil, por el momento podemos pensar que tratan de lo mismo.

Haciendo algunas ligeras modificaciones a la prueba que vamos a presentar para $\sqrt{2}$, podemos demostrar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son números irracionales. De hecho, el tipo de argumento se puede utilizar para probar que todo número de la forma $\sqrt{p}$ es irracional cuando p no es cuadrado perfecto. Recordemos que un entero p, es *cuadrado perfecto* si es el cuadrado de otro entero. Por ejemplo, 16 es cuadrado perfecto pues es el cuadrado de 4, también son cuadrados perfectos los números 169 y 13689, ¿por qué? Un número no es cuadrado perfecto si no es el cuadrado de algún entero. Por ejemplo, 2 no es cuadrado perfecto, pues no existe un entero cuyo cuadrado sea 2, tampoco lo son 3, 5 y 6.

Los griegos ya sabían que $\sqrt{2}$ era un número irracional; no lo expresaban con este lenguaje, pero en esencia conocían esta propiedad de $\sqrt{2}$. Usando su lenguaje, los griegos ya sabían que la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles y cualquiera de sus catetos eran inconmensurables. Que dos segmentos sean *inconmensurables* quiere decir que no es posible medirlos con una unidad común, es decir, no es posible hallar un tercer segmento tal que los dos sigmentos dados sean múltiplos enteros de él. En términos coloquiales podríamos decir que no existe un segmento que "quepa" un número entero de veces en cada uno de los dos segmentos dados. La inconmensurabilidad del cateto y la hipotenusa en un triángulo isósceles rectángulo equivale, en el lenguaje moderno, a que $\sqrt{2}$ es irracional.

1.6.1 $\sqrt{2}$ es irracional

Probemos que no es posible escribir $\sqrt{2}$ en la forma

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

donde p y q son enteros positivos.

Supongamos que fuese posible tal representación y que los enteros p y q no tienen divisores en común o, lo que es igual, que no tienen factores en común. Si el numerador y el denominador tuviesen divisores en común, podríamos simplificar la fracción eliminando todos estos factores, obteniendo así una como la que se está suponiendo. Esta condición va a ser muy importante en nuestra argumentación.

Entonces, al elevar al cuadrado ambos miembros de la relación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, obtenemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Por tanto

$$2q^2 = p^2.$$

Esta relación nos dice que p^2 es un número par, entonces necesariamente p es un entero par, porque si fuese impar, su cuadrado sería impar. Tenemos entonces una primera conclusión, en la representación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, el entero p tiene que ser par. Como p es par, lo podemos escribir en la forma $p = 2k$, donde k es un entero. Usando esta forma para p y sustituyéndola en $2q^2 = p^2$, obtenemos

$$2q^2 = p^2$$
$$2q^2 = 4k^2.$$

Por tanto

$$q^2 = 2k^2.$$

Entonces q^2 es par, por un argumento totalmente similar al que usamos para p, concluimos que q es un entero par. Pero esto es imposible, pues contradice nuestra hipótesis de que p y q no tienen divisores en común, en particular no pueden ser ambos números pares. Hemos llegado a una contradicción que se deriva de suponer posible la relación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Por lo que concluimos que tal relación es imposible. Esto significa que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

La prueba anterior nos permite afirmar contundentemente que, aun usando una poderosa computadora, es inútil tratar de hallar un periodo para $\sqrt{2}$, este número es irracional y por tanto su expansión decimal es no periódica.

Analicemos la demostración anterior y observemos cuáles son los hechos importantes que utilizamos. Uno de ellos es que si el cuadrado de un entero es par entonces el entero mismo es par. Esto se debe al hecho de que

- el cuadrado de todo entero impar es impar.

Además, es cierto que

- el cuadrado de todo entero par es par.

En efecto, dado un entero n hay dos posibilidades: es par o es impar. Es decir, o bien n es de la forma $n = 2m$ o es de la forma $n = 2m + 1$, donde m es un entero. Los pares son de la forma $2m$ y los impares son los enteros de la forma $2m + 1$, con m entero. Entonces, si n es par tenemos

$$n = 2m$$
$$n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$$

Esto implica que n^2 es par, pues se tiene la forma $n^2 = 2k$.

Por otra parte, si n es impar, tenemos

$$n = 2m + 1$$
$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$$
$$n^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

Así que n^2 es impar, pues es de la forma $n^2 = 2k + 1$.

De lo anterior, podemos concluir que

- si el cuadrado de un entero es par, entonces el entero es par.

Y también

- si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero es impar.

Note que estas dos afirmaciones son lógicamente diferentes de las previamente probadas.

En realidad lo que nos interesó de la prueba es que dado un entero n, hay dos posibilidades para n: o es de la forma $n = 2m$ o de la forma $n = 2m + 1$, donde m es un entero. El nombre que se les asigne a los números de una u otra clase (par e impar) es irrelevante. Esta reflexión es importante, porque si deseamos probar que $\sqrt{3}$ es irracional, será necesario mirar nuestros argumentos desde otro punto de vista.

1.6.2 $\sqrt{3}$ es irracional

Supongamos que $\sqrt{3}$ pudiera escribirse en la forma

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}.$$

Como en el caso anterior, supongamos que p y q no tienen divisores en común. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{p}{q}\\ 3 &= \frac{p^2}{q^2}\\ 3q^2 &= p^2.\end{aligned}$$

Imitando la prueba anterior, concluimos ahora que p^2 es múltiplo de 3, pero, ¿qué podemos concluir acerca de p? En la prueba anterior la conclusión fue que siendo p^2 un par, es decir un múltiplo de 2, entonces, a su vez, p era par. Nos encontramos en la parte de la demostración que hemos de adaptar al caso de $\sqrt{3}$. Ahora, lo importante es saber que para todo entero positivo p hay tres posibilidades:

- que p sea múltiplo de 3, es decir que p sea de la forma $p = 3m$,
- que p sea de la forma $p = 3m + 1$,
- que p sea de la forma $p = 3m + 2$.

Estas tres posibilidades son el resultado de aplicar el algoritmo de la división, cuando p se divide entre 3. Es fácil ver que si p es de la forma $p = 3m + 1$, entonces su cuadrado es de la misma forma. Por otra parte, si p es de la forma $p = 3m + 2$, su cuadrado es de la forma $p = 3m + 1$. En efecto,

$$(3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$$
$$(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 12m + 3 + 1 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

Por tanto, si p^2 es múltiplo de 3, entonces p no puede ser ni de la forma $p = 3m + 1$ ni de la forma $p = 3m + 2$, esto implica que p tiene que ser de la forma $p = 3k$. Sustituyendo esta expresión para p, obtenemos

$$\begin{aligned}3q^2 &= p^2\\ 3q^2 &= (3k)^2\\ 3q^2 &= 9k^2\\ q^2 &= 3k^2\end{aligned}$$

Esto implica que q^2 es múltiplo de 3, entonces, q es múltiplo de 3. Así que p y q son múltiplos de 3, lo cual es imposible, pues, por hipótesis, p y q no tienen divisores en común. Como esta contradicción se obtuvo a partir del supuesto de que $\sqrt{3}$ es igual a un cociente $\frac{p}{q}$, finalmente podemos concluir que no existen enteros positivos p y q, tales que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. Esto significa que $\sqrt{3}$ es irracional.

En la sección de ejercicios se pide al lector que pruebe que $\sqrt{5}$ es irracional. Puede usar la prueba anterior, haciendo las adaptaciones apropiadas.

1.7 Racionalización

La racionalización de una fracción en cuyo denominador hay alguna raíz, es cualquier proceso mediante el cual se transforma la fracción en otra equivalente con un denominador que no tenga radicales. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$, se puede transformar como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Así que tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces, decimos que hemos racionalizado la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Veamos otros ejemplos

Ejemplo 1

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ejemplo 2

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Ejemplo 3

$$\frac{4}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Ejemplo 4

$$\frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{3} = \sqrt[3]{3}.$$

Ejemplo 5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\\ &= \sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

Ejemplo 6

$$\begin{aligned}\frac{8}{\sqrt{5}-1} &= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\ &= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1}\\ &= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}\\ &= 2(\sqrt{5}+1).\end{aligned}$$

Ejemplo 7

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{7}-3}{2\sqrt{7}+3} &= \frac{(2\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}-3)}{(2\sqrt{7}+3)(2\sqrt{7}-3)}\\ &= \frac{(2\sqrt{7}-3)^2}{(2\sqrt{7})^2-3^2}\\ &= \frac{28-12\sqrt{7}+9}{28-9}\\ &= \frac{37-12\sqrt{7}}{19}.\end{aligned}$$

Ejemplo 8

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1} &= \frac{(5\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\ &= \frac{15+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{3-1}\\ &= \frac{18+8\sqrt{3}}{2}\\ &= 9+4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ejemplo 9

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}}{\frac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{6}}{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}-\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{6}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2} = \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{10}\\ &= \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}.\end{aligned}$$

Ejemplo 10

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}\\ &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}\\ &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}\\ &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

1.8 Números algebraicos y números trascendentes

Recordemos que los números irracionales son por definición los que no son racionales, es decir los que no se pueden escribir como cociente de dos enteros. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Los números e y π, que estudiaremos en las siguientes secciones, también son irracionales. Dentro de esta vasta familia de números irracionales, se distinguen dos categorías: los algebraicos y los trascendentes. Los irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ son algebraicos y los irracionales e y π son trascendentes. Los **números algebraicos** son aquellos que son raíces de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico porque es raíz de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0.$$

El irracional $\sqrt{3}$ es raíz de la ecuación

$$x^2 - 3 = 0.$$

El irracional $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es raíz de la ecuación

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Todo racional $\frac{p}{q}$ es algebraico, pues satisface la ecuación

$$qx - p = 0.$$

Es un hecho notable que los números π y e no son algebraicos, es decir, son números trascendentes. Las pruebas son un tanto difíciles y escapan a los objetivos de este libro, sin embargo, en una sección posterior, se darán algunos datos sobre quiénes lo probaron y cuándo lo hicieron.

1.9 El número *e*

En la historia de la matemática, registrada desde el siglo IV a.C., en la gloriosa época griega, se consideraba, sin duda alguna, que π era el número más famoso e importante. Sin embargo, en la matemática moderna, compite en importancia y fama con el número e, llamado así por su descubridor Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, considerado el mejor de su época y uno de los más grandes de todos los tiempos.

La aparición del número π en la historia de la matemática puede considerarse relativamente simple; surge cuando se intenta establecer una relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Sin embargo, el número e de Euler, hace su aparición de una manera más sofisticada. A continuación recurrimos a un tema de finanzas para presentar el número e.

Supongamos que cierto capital C se invierte al plazo de un año, a una tasa de interés anual de $p\%$. Esto significa que, al término del año, el capital se habrá incrementado, convirtiéndose en una cantidad igual a la suma inicial invertida C más los intereses generados en ese lapso; así que al término del plazo, el nuevo capital será

$$C + \frac{p}{100}C = \left(1 + \frac{p}{100}\right)C\,.$$

Por ejemplo, si la tasa de interés es de 20% anual, $p = 20$. Al término del año, el capital se habrá incrementado en una quinta parte

$$C + \frac{20}{100}C = \left(1 + \frac{1}{5}\right)C = 1.2C\,.$$

Denotemos con r la fracción $\frac{p}{100}$. Por ejemplo, si la tasa de interés anual es de 8%, $r = 0.08$. Entonces, la expresión para el nuevo capital, al cabo de un año, queda como

$$C + rC = (1 + r)C.$$

El cálculo anterior corresponde a lo que se llama inversión con tasa de interés simple anual. Una inversión con tasa de interés compuesto anual es aquella en la que el año se divide en fracciones iguales y los intereses se calculan para la primera fracción. Esos intereses generados se acumulan al capital original para dar lugar a un nuevo capital, el cual se reinvierte por la siguiente fracción del año y así sucesivamente hasta concluir el plazo, mismo al que se ha establecido la inversión. Esto significa que el capital se incrementará periódicamente mientras dure el plazo de inversión. La fracción del año puede ser un semestre, un mes o un día. Según sea el caso, hablamos de inversiones con una tasa de interés compuesto capitalizable, semestral, mensual o diariamente.

Una inversión a interés compuesto otorga mayores utilidades que una a interés simple. Ahora, cuantificaremos esas ventajas. Analicemos, por ejemplo, el caso de inversiones capitalizables cada semestre.

Supongamos que el capital, C, se invierte a un plazo de un año al interés compuesto r, capitalizable semestralmente. La utilidad generada durante un semestre será la mitad de la utilidad generada durante el año. Puesto que el interés anual es r, la utilidad generada durante

un año es rC, por tanto, la utilidad generada durante medio año es $\frac{1}{2}rC$. Así que al finalizar el primer semestre, el capital acumulado será

$$C + \frac{r}{2}C = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C.$$

Dado que se trata de una inversión a un plazo de un año, el capital no se puede retirar al cabo del primer semestre, este debe mantenerse en inversión un semestre más. Para el segundo semestre, los cálculos son similares a los hechos para el primero, pero ahora con un nuevo capital inicial, el cual es

$$C_1 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C.$$

Por tanto, al término del segundo semestre, el capital acumulado será

$$C_1 + \frac{r}{2}C_1 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C_1.$$

Al sustituir el valor de C_1 en esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{r}{2}\right)C_1 &= \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 + \frac{r}{2}\right)C \\ &= \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 C.\end{aligned}$$

Así que al término de los dos semestres, el nuevo capital es

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 C.$$

Comprobemos que con un interés compuesto capitalizable semestralmente, se obtiene una utilidad ligeramente mayor, que con un interés simple. Con un interés simple, tenemos una utilidad de rC, mientras que para una inversión con un interés compuesto capitalizable semestralmente, la utilidad es

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 C - C &= \left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right)C - C \\ &= C + rC + \frac{r^2}{4}C - C \\ &= rC + \frac{r^2}{4}C.\end{aligned}$$

Si comparamos las dos utilidades, inversión simple e inversión compuesta, observamos que la utilidad se ve incrementada en $\frac{r^2}{4}C$.

Para fijar ideas, supongamos que la tasa de interés anual es de 100% (estas tasas de interés llegaron a ser reales en México en la década de los 70), esto significa $r = 1$. En el caso del interés simple, el capital al término del año es $(1 + r)C = 2C$. Es decir, para una inversión con tasa de interés simple de 100%, al cabo del año de la inversión, el capital se duplica. Para el caso de interés compuesto capitalizable semestralmente, el capital al término de los dos semestres es

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 C = \left(\frac{3}{2}\right)^2 C = 2.25\, C.$$

Así, resulta muy ventajosa la inversión con tasa de interés compuesto capitalizable semestralmente. Supongamos, ahora, una tasa de interés compuesto capitalizable mensualmente; como podemos intuir, esto todavía resultará más ventajoso. Veamos qué tanto. Que sea capitalizable mensualmente significa que al finalizar cada mes se calculan las utilidades generadas y se incrementan al capital invertido al inicio del mes. Lo que resulte se considera como capital inicial para el siguiente mes. Como la utilidad generada durante un año es rC=, la que se genera durante el primer mes es $\frac{1}{12}C$. Por tanto, el nuevo capital al inicio del segundo mes será

$$C+\frac{1}{12}C=\left(C+\frac{1}{12}C\right)=\left(1+\frac{1}{12}\right)C.$$

Siguiendo un razonamiento similar para los siguientes meses, obtenemos:
Capital al término del primer mes:

$$C_1=\left(1+\frac{1}{12}\right)C.$$

Capital al término del segundo mes:

$$C_2=\left(1+\frac{1}{12}\right)C_1=\left(1+\frac{1}{12}\right)^2C.$$

Capital al término del tercer mes:

$$C_3=\left(1+\frac{1}{12}\right)C_2=\left(1+\frac{1}{12}\right)^3C.$$

Capital al término del cuarto mes:

$$C_4=\left(1+\frac{1}{12}\right)C_3=\left(1+\frac{1}{12}\right)^4C.$$

Continuando con este razonamiento, concluimos que la utilidad al final del mes 12 será

$$C_{12}=\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}C.$$

Con una calculadora económica podemos obtener la aproximación (aunque no el valor exacto)

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2.613\,.$$

Así, al concluir el año, plazo fijado de la inversión, el nuevo capital será aproximadamente

$$C_{12}=\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}C\approx 2.613\,C\,.$$

Ahora, la utilidad es significativamente mayor que la obtenida con la tasa de interés simple. A continuación se muestra en qué se convierte el capital para cada uno de los tres tipos de inversiones.

$$C\ \overset{\text{simple}}{\rightarrow}\ 2\,C$$

$$C\ \overset{\text{semestral}}{\rightarrow}\ 2.25\,C$$

$$C\ \overset{\text{mensual}}{\rightarrow}\ 2.613\,C\ \text{(aproximadamente)}$$

Aplicando este razonamiento, podemos analizar el caso de una inversión con una tasa de interés anual, r, capitalizable cada cierto periodo, que sea la n-ésima parte de un año. De esta forma, al cabo de un año, el capital acumulado será

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} C.$$

Si el interés es capitalizable cada día, al finalizar un año tendremos un capital de

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} C$$

si el año no es bisiesto.

Si el interés es capitalizable cada hora, el capital al término del año será

$$\left(1+\frac{r}{8\,760}\right)^{8\,760} C.$$

Si el interés es capitalizable cada minuto, entonces tendremos

$$\left(1+\frac{r}{365\cdot 24\cdot 60}\right)^{365\cdot 24\cdot 60} C$$

como capital final.

Tomemos nuevamente $r=1$, ahora tenemos

$$\begin{array}{llll}
C & \xrightarrow{\text{simple}} & 2\,C & \\
C & \xrightarrow{\text{semestral}} & 2.25\,C & \\
C & \xrightarrow{\text{mensual}} & 2.613\,C & \text{(aproximadamente)} \\
C & \xrightarrow{\text{día}} & 2.7145674\,C & \text{(aproximadamente)} \\
C & \xrightarrow{\text{hora}} & 2.7181266\,C & \text{(aproximadamente)} \\
C & \xrightarrow{\text{minuto}} & 2.7182814\,C & \text{(aproximadamente)}
\end{array}$$

Si el interés fuera capitalizable cada segundo, el capital al término del año sería

$$\left(1+\frac{r}{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60}\right)^{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60} C=\left(1+\frac{r}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000} C.$$

¿De qué orden de magnitud es el factor?

$$\left(1+\frac{r}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000}.$$

El hecho de que el exponente sea muy grande no significa que este factor sea grande, ya que, en ese caso, la fracción $\frac{r}{31\,536\,000}$ es un número pequeño, por lo que $1+\frac{r}{31\,536\,000}$ tiene un valor aproximado a 1, pero mayor que este. Al ser mayor que 1, al elevarlo a un exponente grande,

obtenemos un número que podemos esperar sea grande, ¿pero qué tanto? Ocurre un fenómeno muy interesante. En la siguiente tabla aparecen valores aproximados de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

para distintos valores de n.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000000000	1 000	2.71692393223552
2	2.25000000000000	10 000	2.71814592682436
3	2.37037037037037	100 000	2.71826823719753
5	2.48832000000000	1 000 000	2.71828046915643
10	2.59374246010000	10 000 000	2.71828169398037
20	2.65329770514442	100 000 000	2.71828178639580
30	2.67431877587030	1 000 000 000	2.71828203081451
50	2.69158802907360	10 000 000 000	2.71828205323479
100	2.70481382942153	100 000 000 000	2.71828205335711

Consideremos los valores de la cuarta columna de la tabla; observemos en esta que, a medida que crece el valor de n, los primeros decimales comienzan a mantenerse fijos. Por ejemplo, en la tabla es posible ver que los cinco primeros decimales (71828) ya no cambian a partir de $n = 1\,000\,000$. ¿Será cierto que estos decimales ya no cambiarán, aun si incrementamos ilimitadamente el valor de n?

Podríamos pensar ingenuamente que estos decimales ya no cambiarán a medida que hagamos crecer el valor de n, pero no podemos estar seguros de que así sea; quizá podrían ir cambiando todos los decimales, aunque fuese de manera muy lenta. Son estas situaciones para las cuales acudimos al análisis matemático. Es aquí donde requerimos conocer con exactitud cómo es el sistema de los números reales y cómo se comportan los resultados de nuestros cálculos, con el fin de tener la certeza de que lo que estamos suponiendo está ocurriendo. Ciertamente, los decimales 71828 se mantendrán fijos “para siempre”; es decir, se mantendrán fijos para valores suficientemente grandes de n, sin importar cuánto hagamos crecer su valor. De hecho, los decimales 71828 ya no se modifican a partir del valor $n = 743325$, para el cual

$$\left(1+\frac{1}{743325}\right)^{743325} \approx 2.7182800000001098541.$$

Un hecho interesante es que la sucesión de números que se genera con la expresión

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

crece conforme lo hace el valor de n, aunque también es cierto, como lo probaremos más adelante, que ninguno de estos números a_n rebasa el 3, no importa qué valor le demos a n. Basados en estos hechos, las propiedades de los reales nos garantizarán que la sucesión de números a_n tiende a un cierto número fijo, del cual sus primeros decimales son 71828. Llamaremos a este número: el límite de la sucesión que generamos con la expresión anterior. No es posible calcular el valor exacto de este, en el sentido de que es imposible determinar o conocer todos sus decimales. La existencia del límite de la sucesión está garantizada por las propiedades de los números reales. Esta es una de las razones por las cuales es importante estudiar los números reales. El número al cual tiende la sucesión de números a_n es muy importante en la matemática y se denota por la letra e.

En simbología matemática, la definición del número e se expresa como

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Como hemos comentado antes, el número e fue descubierto por Leonhard Euler, quien obtuvo hasta 23 decimales del mismo.

$$e = 2.71828182845904523536028\ldots$$

El número e es un número irracional y en la actualidad es posible calcular una gran cantidad de decimales para e y otros números irracionales con una computadora de escritorio.

El número e será de gran importancia cuando estudiemos funciones.

1.10 El número π

La historia de π es interesante, fascinante, trágica y divertida. Está asociada con diversos episodios de la historia del hombre. El problema para hallar el valor de π fue motivo de una gran cantidad de trabajos que intentaron su cálculo. Algunos de los trabajos sobre este número incidieron con fuerza en el avance y el desarrollo de las matemáticas en general.

Arquímedes (287-217 a.C.)



Considerado el más destacado matemático e inventor griego, nació en la famosa ciudad de Siracusa; hijo del astrónomo Fidias. Estudió en la Universidad de Alejandría, donde tuvo como maestro a Conón de Samos (uno de los sucesores de Euclides).

Durante la invasión a Siracusa, Arquímedes inventó ingeniosas máquinas para apoyar la defensa. A él se le atribuye la creación de la catapulta de largo alcance y un sistema de espejos y lentes que concentraba los rayos solares para incendiar los barcos enemigos.

Con sus trabajos científicos, Arquímedes hizo una aportación original a la matemática y a la física; abordan la geometría plana y del espacio, la aritmética, la mecánica, la hidrostática y la astronomía.

En el campo de la mecánica, Arquímedes estableció la ley de la palanca y es considerado el inventor de la polea compuesta y del *tornillo sin fin*, el cual servía para elevar el agua de un nivel a otro. Pero, su contribución más reconocida es el principio de la hidrostática, el cual lleva su nombre: **Principio de Arquímedes.** No son menos notables sus trabajos acerca de la cuadratura del círculo y el descubrimiento de la razón entre la circunferencia y su diámetro, la cual actualmente se designa con la letra griega π (pi).

Arquímedes escribió más de 10 obras científicas, entre las que destacan: *Primer libro de los equilibrios, Cuadratura de la parábola, Segundo libro de los equilibrios, Sobre la esfera y el cilindro, Sobre las espirales, Sobre los conoides y los esferoides, Medida del círculo, Arenario, Los cuerpos flotantes* y *El tratado del método*. La última es una bella obra que muestra el gran ingenio de Arquímedes. En esta *es donde* se anticipa a las ideas del cálculo integral actual.

Según los historiadores, el origen de π se remonta a la época de los babilonios y los egipcios. Uno de los documentos que dejaron constancia de su antigüedad es el papiro de Ahmes, también conocido como papiro Rhind o papiro de Rhind. Este documento, cuyas medidas aproximadas son 6 m de largo por 33 cm de ancho, se encuentra en el museo británico de Londres y se conserva en buen estado. Se halló en las ruinas egipcias ubicadas en Luxor, al centro-sur de Egipto, en el siglo XIX y fue adquirido por el inglés Henry Rhind en 1858, de ahí su nombre.

El papiro Rhind fue escrito por el escriba *Ahmes*, hacia el año 1650 a.C.; contiene 87 problemas matemáticos de aritmética, fracciones, cálculo de áreas y volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría. Según los estudiosos de este papiro, también aparece la afirmación de que el área de un círculo es como la de un cuadrado cuyo lado es $\frac{8}{9}$ del diámetro. Si traducimos esto a fórmulas, obtenemos que el área del círculo es

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \\ &= \frac{64}{81}(2r)^2 \\ &= \frac{64 \cdot 4}{81}r^2 \\ &\approx 3.16\, r^2 \end{aligned}$$

Así que, hace unos 3 650 años ya se utilizaba la aproximación $\pi \approx 3.16$.

Hoy día, la constante π se asocia al notable científico griego Arquímedes, quien vivió en el siglo III a.C. Arquímedes, también considerado el primer ingeniero de la humanidad por sus útiles trabajos de carácter práctico, en su breve, pero interesante, tratado de medida del círculo, prueba con gran ingenio los siguientes tres resultados acerca de este.

a) Todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo.
b) El área de un círculo es al cuadrado de su diámetro aproximadamente como 11 es a 14.
c) La circunferencia de todo círculo es menor que tres veces el diámetro más $\frac{1}{7}$ del mismo diámetro y es mayor que tres veces más $\frac{10}{71}$ del diámetro.

Traduzcamos la proposición *a*). En esta proposición Arquímedes establece una fórmula para el área del círculo. De esta proposición, se sigue que si r es el radio del círculo y L es la circunferencia (perímetro del círculo), entonces el área del círculo está dada por

$$\frac{1}{2}Lr\,.$$

Esta fórmula es válida aun cuando no conozcamos una para calcular la circunferencia L. Cualquier fórmula para L dará una fórmula para el área del círculo. Si asumimos que la circunferencia está dada por $L = d\pi = 2r\pi$, entonces obtenemos la fórmula del área del círculo en términos de π:

$$\frac{1}{2}rL = \pi r^2\,.$$

Por otra parte, de la proposición *b*) obtenemos que si el círculo es de radio 1, su área π es al cuadrado de su diámetro d = 2, aproximadamente como 11 es a 14, es decir

$$\frac{\pi}{2^2} \approx \frac{11}{14}.$$

O sea

$$\pi \approx 4\left(\frac{11}{14}\right)$$
$$\pi \approx \frac{22}{7}.$$

Con lo que obtenemos la famosa aproximación de Arquímedes

$$\pi \approx \frac{22}{7}.$$

Por otra parte, la proposición *c*) se traduce en símbolos como

$$\frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

Cualquiera de los extremos de esta doble desigualdad es una aproximación para π, y tenemos

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Usando decimales, de las desigualdades anteriores obtenemos

$$3.140845070 < \pi < 3.142857143.$$

La desigualdad de su proposición *c*), nos revela el hecho de que Arquímedes sabía muy bien que solo se podía aspirar a tener aproximaciones de π y no a su valor exacto. Algunos pueden no estar de acuerdo con esta apreciación, pero Arquímedes era un genio, el descubrimiento y las demostraciones de muchísimas de sus proposiciones dan cuenta de ello. Si π hubiese sido un número racional, es seguro que Arquímedes lo hubiera sabido y calculado. No es exagerado considerar a Arquímedes como el padre de π, fue un protagonista importantísimo en la historia de esta constante.

Como episodio trágico de la historia de π, podemos citar aquel que se relaciona con la muerte de Arquímedes, quien nació en Siracusa, Sicilia, en el año 287 a.C. Arquímedes pudo haber tenido un cargo importante por su parentesco con Hierón II, rey de Siracusa, sin embargo decidió dedicarse a la ciencias, estudiando en la universidad de Alejandría con los descendientes académicos de Euclides o quizá con Euclides mismo. Según Plutarco, historiador y biógrafo griego, autor de *Vidas paralelas*,* Arquímedes ofreció sus servicios al Rey Hierón para la defensa de su ciudad natal ante la invasión del general romano Marcelo. Arquímedes inventó las famosas catapultas y juegos de lentes y espejos con los que hundía y quemaba con los rayos solares las naves de los agresores. Sin embargo, los habitantes de Siracusa, quienes se sentían protegidos con la gran maquinaria de guerra de Arquímedes, descuidaron su defensa, por lo que los romanos ocuparon la ciudad. Narra Plutarco que estando Arquímedes reflexionando sobre algunas figuras geométricas, fue sorprendido por un soldado que le exigió lo acompañara con Marcelo, a quien sería entregado. Arquímedes le pidió al soldado que le diera tiempo mientras encontraba la solución del problema, a lo que el soldado enfurecido le respondió clavándole su espada para herirlo de muerte. Con este suceso se puso fin a la vida del gran genio Arquímedes. Marcelo despidió con desprecio al soldado que dio muerte a Arquímedes y cuenta Plutarco que buscó a los familiares de Arquímedes para tratarlos con aprecio y distinción.

* Una versión en español puede conseguirse en la serie *Sepan cuantos*, de Editorial Porrúa, México.

1.10.1 Fórmulas notables para π y el cálculo de sus decimales

Una etapa importante en la historia de π, la constituye el periodo cuando se desarrollaron los métodos de análisis matemático para llevar a cabo cálculos aproximados de π. Los recursos analíticos de los que disponían los calculadores de π, o que desarrollaron ellos mismos, fueron series y productos infinitos, relaciones trigonométricas y fracciones continuas. A continuación citamos algunos ejemplos de estas fórmulas, así como el número de decimales que los autores obtuvieron. Los lectores interesados en obtener más información al respecto, pueden consultar una serie de tres artículos dedicada a dar cuenta de estos acontecimientos, "The chronology of pi", de Herman C. Schepler, publicados en la revista *Mathematics Magazine*, en 1950.

A partir de aquí, haremos un recuento de las fórmulas notables para π, siguiendo una secuencia cronológica.

1579. Francois Vieta (1540-1603), matemático francés, fue el primero en usar un producto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Siguiendo el método griego, considera polígonos con $6\cdot 2^{16} = 393\,216$ lados y calcula nueve decimales correctos de $\pi = 3.141592653$.

1650. John Wallis (1616-1703), matemático inglés, obtiene la interesante expresión

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\ldots}$$

y la fracción continua

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}}$$

1668. James Gregory (1638-1675), matemático escocés, aplica la serie de potencias

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

y haciendo $x = 1$, obtiene la serie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(Estudiaremos la función $\arctan x$ más adelante.)

1673. Esta serie también es descubierta de manera independiente por el filósofo, abogado y matemático alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz, quien también escribe dicha serie como

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\left[\frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{7\times 9} + \frac{1}{11\times 13} + \frac{1}{15\times 17} + \cdots\right]$$

1690. Abraham Sharp (1651-1742), matemático inglés, calcula π con 72 decimales, resultan correctos 71. Este valor se obtiene mediante la serie del arctan x, tomando $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, la cual da

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \cdots\right].$$

1706. John Machin (1680-1752), de nacionalidad inglesa, usando la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

y la serie de potencias para arctan x, obtuvo 100 decimales correctos de π.

1776. Hutton (1737-1823), nacido en Inglaterra, sugiere usar las fórmulas

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

y

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}\cdot$$

1779. Leonhard Euler (1707-1783), de origen suizo, obtiene la fórmula

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}$$

1841. William Rutherford, de nacionalidad inglesa, usa la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99}\cdot$$

Rutherford calcula 208 decimales de π, de los cuales 152 resultan correctos.

1844. Zacharias Dase (1824-1861), de Alemania, usa la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

para calcular 205 decimales π, de los cuales 200 resultan correctos.

1847. Thomas Clausen (1801-1885), de Alemania, usa la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

para calcular 250 decimales π, de los cuales 248 fueron correctos.

1853. William Rutherford, de origen inglés, calcula 440 decimales de π, todos correctos.

1873. William Shanks (1812-1882), matemático inglés, usando la fórmula de Machin, calcula 707 decimales correctos.

1945. Ferguson descubre que hay errores a partir del decimal 528 de los 707 decimales que calculó Shanks en 1873.

1946. Ferguson publica 620 decimales.

1947. Ferguson, con la ayuda de una calculadora electrónica, encuentra 808 decimales.

1949. Con la ayuda de una computadora ENIAC, de la Armada de los Estados Unidos de América, Ferguson calculan 2 035 decimales. El cálculo le lleva 70 horas, mientras que a Shanks le tomó 15 años hacer sus cálculos, para que de los 707 decimales, resultaran correctos solo 527.

1955. La computadora NORC es programada para calcular 3 089 decimales.

1957. La computadora Pegasus, en Londres, calcula 7 480 decimales.

1959. La IBM 704, instalada en París, Francia, calcula 7 480 decimales.

1961. La IBM 7090, instalada en Nueva York, calcula 100 000 decimales.

1966. Con la IBM 7030, instalada en París, es posible calcular 250 000 decimales.

1967. Con la CDC 6 600, en París, se calculan 500 000 decimales.

1973. Con la CDC 7 600, se calculan 1 001 250 decimales.

1986. Con una CRAY 2, se calculan 29 millones de decimales.

1989. Con la IBM 3 090, se calculan 1 000 millones de decimales.

2002. Con una Hitachi SR8000/MP, se calculan 1.2 trillones de decimales de π.

En esta época moderna, de poderosos avances en la tecnología, aplicados a los equipos de cómputo, se han podido calcular varios miles de millones de cifras decimales de π. Hoy en día, además de contar con una gran cantidad de relaciones matemáticas que nos permiten calcular π, también disponemos de poderosas computadoras de escritorio o portátiles, con las cuales es posible, desde nuestra propia casa, calcular 10 000 decimales de π en alrededor de un segundo y si somos pacientes y estamos dispuestos a esperar 90 segundos podemos calcular 100 000 decimales. Por supuesto, con las supercomputadoras actuales es posible calcular varios miles de millones de decimales.

1.10.2 Fechas notables sobre π

1706. El matemático inglés William Jones (1675-1749) usa por primera vez la letra π para designar la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro.

1766. El físico, matemático y astrónomo alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) prueba que π es irracional.

1794. El matemático francés Andrien Marie Legendré (1752-1833) utiliza en su libro *Eléments de géométrie* el símbolo π para representar la razón de la circunferencia al diámetro. Este es el primer libro de texto francés en el que se usa π de forma regular; en él aparece una prueba de la irracionalidad de π y de π^2.

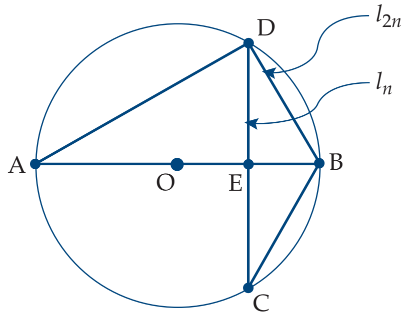
1882. El matemático alemán Ferdinand Lindemann (1840-1909) prueba que π es trascendente, es decir, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Desde 1766 se sabe que π es un número irracional, lo que en particular significa que su expansión decimal es infinita no periódica, así que los intentos por conocer cada vez más decimales no obedecieron al hecho de descubrir algún periodo, al menos no para los matemáticos enterados. Sin embargo, todavía hacia finales del siglo XIX hubo quienes afirmaban que habían encontrado el verdadero valor racional de π. Quizá, hoy en día, todavía haya quienes, esperando que Lindemann se haya equivocado y buscando la inmortalidad, intenten probar que π es racional o al menos algebraico.

Usando técnicas del análisis matemático, se puede probar que la posibilidad de que π sea algebraico, equivale a que es posible cuadrar el círculo, es decir, dado cualquier círculo es posible construir con regla y compás un cuadrado con la misma área del círculo dado. Por tanto, dado que en 1882 Lindemann demuestra que π no es algebraico, tenemos una prueba indirecta de que es imposible cuadrar el círculo. Este es uno de los famosos problemas griegos que permaneció más de 2000 años sin resolver. Aún así, es probable que hoy en día haya quienes busquen cuadrar el círculo, como dijo H. Schubert en su libro *The squaring of the circle* (en español, *La cuadratura del círculo*): "la raza de los cuadradores de círculos no morirá en tanto la ignorancia y el deseo de gloria permanezcan unidos".

1.10.3 Una definición analítica de π

Hasta ahora sólo tenemos una definición geométrica de π. Una definición aritmética, o más bien, analítica requiere de conceptos que van más allá de la aritmética elemental y requiere del concepto de límite, el cual pertenece al terreno del cálculo. A reserva de establecer con toda la precisión y el rigor matemático que corresponde a un curso de cálculo universitario, lo cual haremos en el capítulo 4, en este momento analizaremos las ideas principales que permiten definir π analíticamente. Consideremos el círculo unitario y el polígono regular de n lados inscrito en este círculo. Sea l_n la longitud del lado. El perímetro del polígono es entonces $P_n = nl_n$. A partir de este polígono regular de n lados, es fácil construir el polígono regular inscrito de $2n$ lados. Para cada lado tracemos el radio del círculo que pasa por su punto medio. De esta manera, determinamos puntos sobre el círculo que, aunados con los vértices del polígono original, constituyen los vértices de un nuevo polígono inscrito de $2n$ lados, como se muestra en la siguiente figura



Calculemos la longitud l_{2n} del lado del polígono de $2n$ lados en términos de la longitud l_n del lado del polígono de n lados. En la figura anterior, ΔABD es un triángulo rectángulo con hipotenusa $AB = 2$. Calculemos el área del triángulo ΔABD de dos maneras. La primera de ellas es tomando como base el cateto AD y altura el otro cateto que es l_{2n}; en este caso, el área está dada por $\frac{1}{2}(AD)l_{2n}$. Ahora bien, si tomamos como base la hipotenusa $AB = 2$, la altura será la longitud del segmento DE, que es igual a $\frac{1}{2}l_n$, y el área estará dada por $\frac{1}{2}(2)\frac{l_n}{2} = \frac{l_n}{2}$. Al igualar estas dos expresiones para el área, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(AD)l_{2n} &= \frac{1}{2}l_n\\ (AD)l_{2n} &= l_n \quad .\end{aligned}$$

Por otra parte, del teorema de Pitágoras se sigue que

$$AD = \sqrt{4 - l_{2n}^2},$$

de donde obtenemos

$$l_{2n}\sqrt{4 - l_{2n}^2} = l_n .$$

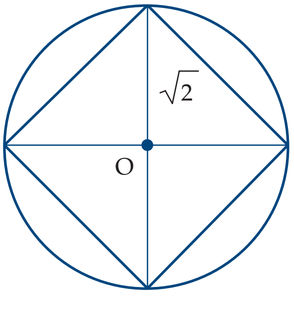
La fórmula anterior nos permite calcular el lado l_n del polígono de n lados cuando se conoce el lado del polígono de $2n$ lados. Nosotros requerimos el lado l_{2n} en términos del lado l_n, así que despejaremos l_{2n} de la relación anterior que es una ecuación cuadrática en l_{2n}^2:

$$\begin{aligned}l_{2n}^2(4 - l_{2n}^2) &= l_n^2\\ l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2 + l_n^2 &= 0 \ .\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación para l_{2n}^2, tenemos

$$\begin{aligned}l_{2n}^2 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4l_n^2}}{2}\\ l_{2n}^2 &= \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - l_n^2}}{2}\\ l_{2n}^2 &= 2 \pm \sqrt{4 - l_n^2}.\end{aligned}$$

Para elegir el signo correcto, notemos que el lado l_{2n} no puede ser mayor que $\sqrt{2}$, pues el cuadrado inscrito precisamente tiene por lado $\sqrt{2}$.



Así que la longitud de lado de cualquier polígono con mayor número de lados, es menor que $\sqrt{2}$. Por tanto, en la fórmula anterior debemos elegir el signo negativo. O sea

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

De esta fórmula podemos obtener, por ejemplo, el lado del octágono inscrito a partir del cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_4^2}} \\ l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} \\ l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

El lado del dodecágono inscrito lo obtenemos a partir del hexágono cuyo lado mide 1:

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_6^2}} \\ l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} \\ l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la fórmula $l_{2n}\sqrt{4 - l_{2n}^2} = l_n$, podemos obtener el lado del pentágono a partir del lado del decágono, el cual mide

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Para obtener la longitud del lado del pentágono, observemos primero que

$$\begin{aligned} l_{10}^2 &= \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

de esta forma

$$\begin{aligned} 4 - l_{10}^2 &= 4 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud del lado del pentágono está dada por

$$\begin{aligned} l_5 &= l_{10}\sqrt{4 - l_{10}^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}} &= (\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{4\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{5-\sqrt{5}},\end{aligned}$$

de donde obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} l_5 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.\end{aligned}$$

Esta es la longitud del lado del pentágono inscrito en el círculo de radio 1.

Retornemos al cuadrado inscrito en el círculo unitario cuyo lado es $l_4 = \sqrt{2}$. A partir de este cuadrado y por el método de bisección de los lados, generamos los polígonos con número de lados 8, 16, 32.... Estos números son de la forma 2^n. Aplicando recursivamente la fórmula $l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$, obtenemos las longitudes de los lados correspondientes:

$$\begin{aligned} l_4 &= \sqrt{2} \\ l_8 &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ l_{16} &= \sqrt{2-\sqrt{4-l_8^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ l_{32} &= \sqrt{2-\sqrt{4-l_{16}^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.\end{aligned}$$

Se puede probar que en general se tiene

$$l_{2^n} = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ raíces encajadas}}}.$$

Así que el perímetro del polígono de 2^n lados está dado por

$$P_{2^n} = 2^n l_{2^n} = 2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ raíces encajadas}}}.$$

Cuando n es grande, este perímetro se aproximará al perímetro del círculo unitario que definimos como 2π (definición de π). Como el límite geométrico de estos polígonos es la circunferencia del círculo unitario, diremos que el límite de estos perímetros es 2π y escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ raíces encajadas}}} = 2\pi.$$

En el capítulo 4 precisaremos el concepto de límite; por el momento es suficiente con tener una idea intuitiva del mismo, aunque el ejemplo sirve para motivar y mostrar la necesidad de este concepto.

Así que podemos adoptar como definición aritmética del número π el límite anterior, o mejor aún:

Definición 1

El número π es el siguiente límite.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}$$

A título de resumen presentamos las definiciones de los números e, π y γ:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

En el capítulo 4 desarrollaremos, también, la teoría sobre sucesiones, con la cual probaremos que efectivamente existen estos límites. Ahora solo baste presentar valores aproximados de estos números:

$$e \approx 2.718281828$$
$$\pi \approx 3.141592653$$
$$\gamma \approx 0.5772156649$$

Para finalizar esta sección dedicada a la historia de π, comentaremos sobre un episodio un tanto divertido. Se refiere a Edward Johnston Goodwin, aficionado a la física y matemáticas, quien vivía en una pequeña ciudad del condado de Posey, estado de Indiana, Estados Unidos de América, quien publicó en *The American Mathematical Monthly*, hacia 1894, un artículo con el título "Cuadratura del círculo". En este, Goodwin obtuvo el valor 3.2 para π y aclara que había registrado su valor de 3.2 en los registros de propiedad intelectual de Estados Unidos de América, Gran Bretaña, Alemania, Francia, España, Bélgica y Austria.

Lo interesante de este caso es que en 1896 Goodwin se reunió con Taylor I. Record, representante del condado de Posey en el parlamento estatal de Indiana, para pedirle que llevara un proyecto de ley ante la Cámara Baja, la cámara de representantes de Indiana, con lo cual intentaba que se legislara el valor de π, que él había descubierto, con el fin de ofrecerlo como una contribución a la educación y para que este resultado fuese utilizado sin costo alguno para el estado de Indiana. De esta forma, el resto de los estados deberían pagar los derechos de autor. El 18 de enero de 1897, Taylor presentó a la Cámara el "Proyecto de ley que introduce una nueva verdad

matemática". Copias de este se conservan en la división de archivos de la biblioteca estatal de Indiana. El texto completo también fue reimpreso en un artículo de Edington, E., en el *Proceedings of the Indiana Academy of Sciences*, vol. 44, pp. 206-210, publicado en 1935.

Después de pasar por el comité de educación, el proyecto fue turnado, a la Cámara Baja para su aprobación. El proyecto fue aprobado el 5 de febrero de 1897, por 67 votos a favor y ninguno en contra.

Cinco días después, como muestra de la gran eficiencia los legisladores, el proyecto de ley es remitido a la Cámara del Senado, con la recomendación de que se aprobara. Por fortuna, mientras la Cámara Alta consideraba ese proyecto, coincidió que el profesor C. A, Waldo, catedrático de matemáticas en la universidad de Purdue, quien casualmente estaba en la cámara por un asunto de la universidad, quedó sorprendido al descubrir que ese mismo día se iba a debatir un proyecto de ley sobre un tema matemático.

En un artículo que escribió después, Waldo comentó: "Un exprofesor del este de Indiana decía: —El caso es muy simple. Si aprobamos este proyecto de ley que establece un nuevo y correcto valor de π, el autor ofrece a nuestro estado, sin costo alguno, el uso de su descubrimiento y su libre publicación en nuestros libros de texto escolares, mientras que todos los demás estados deberán pagarle derechos de autor".

El proyecto fue aprobado en una primera instancia en el Senado, pero después de que el profesor Waldo se entrevistó con algunos senadores, este órgano, en una segunda instancia, acordó posponer la discusión para una nueva sesión. A la fecha, este proyecto de ley está pendiente en la agenda del Senado del Estado de Indiana.

1.11 Desigualdades

1.11.1 Definiciones básicas

Los diversos tipos de desigualdades entre números reales y sus propiedades son fundamentales para el cálculo, pues estas se aplican con frecuencia en el estudio de funciones. Desde nuestra enseñanza básica trabajamos con nociones sobre desigualdades; por ejemplo, cuando comparamos dos números y determinamos que uno es menor o mayor que el otro, estamos hablando de desigualdades. Ahora precisaremos los diversos conceptos de desigualdad y estudiaremos sus propiedades más importantes.

Que un número a sea menor que un número b significará que $b-a$ es un número positivo, en cuyo caso escribiremos $a < b$ o $b > a$. La expresión $a < b$ se lee a **menor que** b y la expresión $b > a$ se lee b **mayor que** a. Al símbolo $<$ le llamaremos **símbolo menor que**, mientras que a $>$ le llamaremos **símbolo mayor que**. Entonces cuando escribamos $a < b$ o $b > a$ deberemos entender que $b-a$ es un número positivo. A las expresiones $a < b$ y $b > a$ las llamaremos **desigualdades** o **relaciones de desigualdad**. En el caso de $a < b$, diremos que a es el miembro izquierdo de esa desigualdad y que b es el miembro derecho. Estas relaciones entre dos números son los tipos más simples de desigualdades entre números reales.

Observemos que para definir las desigualdades $a < b$ y $b > a$ hemos recurrido a los números positivos. Los números positivos son entonces el punto de partida para el estudio de las desigualdades y asumimos completa familiaridad con ellos, particularmente con las dos propiedades siguientes:

i) La suma de dos números positivos es un número positivo.
ii) El producto de dos números positivos es un número positivo.

Estas propiedades de los números reales positivos seguramente son una obviedad para el lector; sin embargo, es notable que todas las propiedades de las desigualdades se desprenden de estas muy simples de los números positivos. Aunado a estas dos propiedades utilizaremos otros hechos, que también podemos calificar de obvios, pero que hacemos explícitos para hacer transparentes nuestros argumentos:

> Hay tres categorías de números: la primera categoría consiste de los números positivos, la segunda de los negativos y la tercera que consiste de un solo elemento que es el cero. Todo número real pertenece a una y solamente una de las tres categorías; es decir, todo número real que no es cero, es positivo o es negativo, pero no ambos. Si un número a es positivo, entonces $-a$ es negativo. Si un número a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

Nota: La desigualdad $b > a$ significa que $b - a$ es un real positivo, en particular la desigualdad $b > 0$ significa que $b - 0$ es positivo. Recíprocamente, si b es positivo, entonces $b - 0$ es positivo, pero esto quiere decir que $b > 0$. El razonamiento que hemos hecho prueba que la propiedad de que b sea positivo es equivalente a la desigualdad $b > 0$:

b es positivo si y solamente si $b > 0$.

1.11.2 Propiedades fundamentales de las desigualdades

Ahora iniciemos nuestro tratamiento sobre desigualdades. Para iniciar establecemos tres propiedades de la desigualdad $a < b$ que también se escribe $b > a$:

1) Si a ambos miembros de una desigualdad $a < b$ se adiciona un mismo real, sea positivo o negativo, la desigualdad se preserva. Es decir:

   Si $a < b$, entonces $a+c < b+c$ para cualquier número c.

2) Si ambos miembros de una desigualdad $a < b$ se multiplican por un mismo número positivo, la desigualdad se preserva. Es decir:

   Si $a < b$ y c es cualquier número positivo, entonces $ac < bc$.

3) Si ambos miembros de una desigualdad $a < b$ se multiplican por un mismo número negativo, la desigualdad se invierte. Es decir:

   Si $a < b$ y c es cualquier número negativo, entonces $ac > bc$.

Probemos la propiedad 1). Supongamos $a < b$ y sea c cualquier número real (positivo, negativo o cero). Por definición de $a < b$ tenemos que $b-a$ es un número positivo. Para probar que se cumple la desigualdad $a+c < b+c$, debemos probar que cumple con la definición de esta desigualdad, es decir, debemos probar que $(b+c)-(a+c)$ es un número positivo. Pero esto es evidente, pues para cualquier número c tenemos

$$(b+c)-(a+c) = b-a$$

y por hipótesis $b-a$ es positivo. Entonces $(b+c)-(a+c)$ es un número positivo. Esto prueba la propiedad 1).

Para la prueba de la propiedad 2) supongamos $a < b$ y c cualquier número positivo. Para probar que $ac < bc$ debemos mostrar que $bc - ac$ es positivo. Pero que $bc - ac$ es positivo, se deduce fácilmente de la factorización

$$bc - ac = (b-a)c$$

y de la propiedad de que el producto de dos números positivos, en este caso $b-a$ y c, son números positivos. Observe que estamos utilizando la hipótesis de que c es un número positivo y que $b-a$ es positivo pues $a < b$. Esto prueba la propiedad 2).

Probemos ahora la propiedad 3). Supongamos $a < b$ y c cualquier número negativo. Entonces tenemos que $b-a$ es positivo y como c es negativo entonces $-c$ es positivo. Por tanto, por la segunda propiedad de los números positivos tenemos que $(b-a)(-c)$ es un número positivo. Pero

$$(b-a)(-c) = -bc + ac = ac - bc$$

Entonces $ac - bc$ es un número positivo. Pero esto quiere decir que

$$ac > bc$$

con lo cual queda probada la propiedad 3).

Las propiedades 1), 2) y 3) ahora las formulamos para la desigualdad $b > a$ que es otra forma de escribir $a < b$:

4) Si $b > a$, entonces $b + c > a + c$ para cualquier número .
5) Si $b > a$ y c es cualquier número positivo, entonces $bc > ac$.
6) Si $b > a$ y c es cualquier número negativo, entonces $bc < ac$.

Usemos las proposiciones 1) a 6) para resolver algunos problemas sobre desigualdades.

Ejemplo 11

Determine los valores de x que satisfacen la desigualdad $2x - 3 < 5$.
Este problema se resuelve en dos etapas. Probemos primero que si x es un real que satisface $2x - 3 < 5$, entonces x satisface $x < 4$. Sea pues x un real que satisface

$$2x - 3 < 5$$

Si adicionamos a ambos miembros de la desigualdad el número 3, obtenemos

$$2x - 3 + 3 < 5 + 3$$
$$2x < 8$$

Multipliquemos ambos miembros por $\frac{1}{2}$ para obtener

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2x) < \left(\frac{1}{2}\right)8$$
$$x < 4$$

Hemos probado que si x es un real que satisface $2x - 3 < 5$, entonces x satisface $x < 4$. Sin embargo, esto no es suficiente para afirmar que el conjunto de reales x que satisfacen $2x - 3 < 5$ son precisamente los que satisfacen $x < 4$. Para poder hacer esta afirmación debemos probar además que si x satisface la desigualdad $x < 4$. entonces también satisface $2x - 3 < 5$. La prueba de esto último es la segunda etapa de la solución del problema. Supongamos entonces que x es un real que satisface la desigualdad $x < 4$ Si multiplicamos ambos miembros de esta desigualdad por 2, obtenemos

$$2x < 8$$

Adicionemos -3 a ambos miembros de esta desigualdad, con lo que obtenemos

$$2x - 3 < 8 - 3$$

Es decir

$$2x - 3 < 5$$

Hemos probado que si x satisface $x < 4$, entonces también satisface la desigualdad $2x - 3 < 5$.

Analicemos la lógica de nuestro procedimiento. Primero probamos que si x es un real que satisface $2x - 3 < 5$, entonces x satisface $x < 4$. Después probamos que si x satisface $x < 4$, entonces también satisface $2x - 3 < 5$. Esto significa que las desigualdades

$$2x - 3 < 5 \text{ y } x < 4$$

son equivalentes en el sentido de que toda solución de la primera desigualdad satisface la segunda y viceversa, todo real que satisface la segunda, satisface la primera. En otras palabras, ambas desigualdades tienen exactamente las mismas soluciones. Por tanto, podemos afirmar que los reales que satisfacen la desigualdad original $2x - 3 < 5$ son precisamente los reales x que satisfacen $x < 4$. Por tanto, esta es la solución del problema.

Ejemplo 12

Halle los reales x que satisfacen la doble desigualdad

$$-8 < 3x - 2 < 10$$

La doble desigualdad se traduce como sigue:

$$x \text{ satisface } -8 < 3x - 2 < 10 \text{ si y solamente si } x \text{ satisface } -8 < 3x - 2 \text{ y } 3x - 2 < 10$$

Por tanto, una manera de hallar las soluciones de la desigualdad $-8 < 3x - 2 < 10$, es transformando las dos desigualdades $-8 < 3x - 2$ y $3x - 2 < 10$ en dos desigualdades equivalentes respectivamente. Usando un procedimiento similar al del ejemplo anterior, es fácil probar que:

a) la desigualdad $-8 < 3x - 2$ es equivalente a la desigualdad $-2 < x$
b) la desigualdad $3x - 2 < 10$ es equivalente a la desigualdad $x < 4$

Las pruebas de estas equivalencias las dejamos al lector.

Entonces, tenemos la siguiente equivalencia

$$x \text{ satisface } -8 < 3x - 2 < 10 \text{ si y solamente si } x \text{ satisface } -2 < x \text{ y } x < 4.$$

Pero también tenemos

$$x \text{ satisface } -2 < x \text{ y } x < 4 \text{ si y solamente si } x \text{ satisface } -2 < x < 4.$$

Por tanto, podemos escribir

$$x \text{ satisface } -8 < 3x - 2 < 10 \text{ si y solamente si } x \text{ satisface } -2 < x < 4.$$

Esta última afirmación es la solución del problema. Es decir, el conjunto de reales x que satisfacen la desigualdad $-8 < 3x - 2 < 10$ es el conjunto de reales que satisfacen $-2 < x < 4$.

La transformación de la desigualdad $-8 < 3x - 2 < 10$ en la desigualdad equivalente $-2 < x < 4$ podemos llevarla a cabo sin separar la doble desigualdad en dos desigualdades simples como sigue: partimos de la desigualdad

$$-8 < 3x - 2 < 10$$

Adicionamos 2 a todos los miembros (izquierdo, derecho e intermedio), con lo que obtenemos

$$-6 < 3x < 12$$

Si multiplicamos todos los miembros por $\frac{1}{3}$ obtenemos finalmente la doble desigualdad que nos muestra la solución

$$-2 < x < 4$$

La equivalencia entre las dos dobles desigualdades está garantizada, ya que los pasos de la transformación que aplicamos son reversibles; es decir, si partimos de la última desigualdad multiplicamos por 3 todos los miembros de la desigualdad y sumamos -2 a los tres miembros, obtenemos la desigualdad original.

En términos simbólicos escribimos

$$-8 < 3x - 2 < 10 \Leftrightarrow -6 < 3x < 12 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

1.11.3 Más propiedades de las desigualdades

Veamos algunas propiedades más de las desigualdades.

7) $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Esta proposición la llamaremos **propiedad transitiva** de la desigualdad $<$.

Probemos 7). Como $a < b$ tenemos que $b - a$ es positivo. Como $b < c$, tenemos que $c - b$ es positivo. Aplicando la propiedad (i) de los números positivos, tenemos entonces que la suma de los números positivos $b - a$ y $c - b$ es un número positivo, pero esta suma es

$$(b - a) + (c - b) = c - a$$

Entonces $c - a$ es positivo, pero esto quiere decir que $c > a$. Hemos probado la propiedad 7).

8) Si a y b son reales positivos, tales que $a <, b$ entonces $a^2 > b^2$

Probemos 8). Por una parte, como a es positivo y $a < b$, por la propiedad 2) de las desigualdades tenemos

$$aa < ab$$
$$a^2 < ab.$$

Por otra parte, como b es positivo y $a < b$, por la misma propiedad 2) tenemos

$$ba < bb$$
$$ab < b^2.$$

Hemos probado las desigualdades $a^2 < ab$ y $ab < b^2$; por tanto, usando la propiedad transitiva 7), obtenemos finalmente $a^2 < b^2$.

Una versión un poco diferente de la propiedad 8 es la siguiente

8*) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

Veamos ahora una propiedad similar a la propiedad 8)

9) Si a y b son reales positivos, tales que $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Prueba de 9). Si fuese falso $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, entonces necesariamente tendríamos $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ o $\sqrt{b} < \sqrt{a}$. La igualdad no puede ser, pues en ese caso tendríamos $a = b$. Tampoco puede ser cierto $\sqrt{b} < \sqrt{a}$, ya que por la propiedad 8) tendríamos $b < a$ lo que contradiría la hipótesis, por tanto, se debe tener $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

De la propiedad 9) también se tiene

9*) Si $0 \leq a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

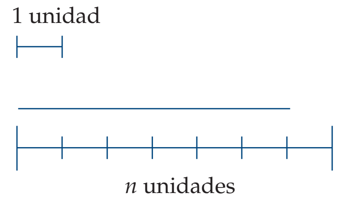
Finalizamos esta sección con la siguiente propiedad:

10) Si a y b son reales positivos, tales que $a < b$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

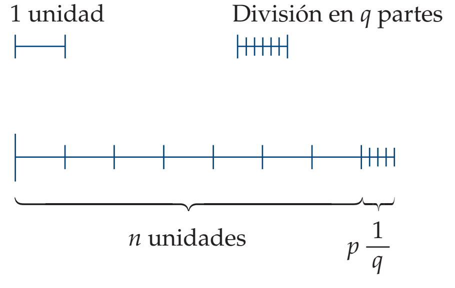
Prueba de 10). Esta propiedad se prueba multiplicando ambos miembros de $a < b$ por $\frac{1}{ab}$.

1.12 Los números reales. Una reflexión

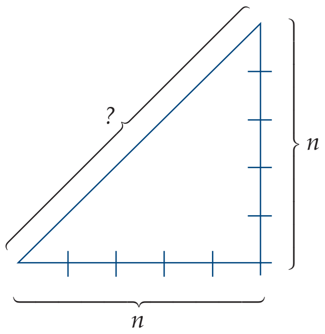
Los números enteros nos permite medir segmentos cuyas longitudes son múltiplos enteros de una unidad dada (las mediciones son relativas a una unidad convenida).



Por otra parte, los números racionales nos permiten medir segmentos cuyas longitudes son múltiplos enteros de la unidad, más fracciones de la unidad.



Desde un punto de vista práctico, se puede decir que para resolver los problemas de medición de longitudes son suficientes los números racionales; pero, desde un punto de vista teórico, estos son insuficientes. Por ejemplo, los griegos ya sabían que para cualquier elección de la unidad de longitud, era imposible medir la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo de catetos iguales y cuyas longitudes fuesen un número entero n de unidades. Esta imposibilidad se da, aun considerando las fracciones enteras de la unidad, es decir, aun considerando los números racionales.



Ahora, nuestro sistema de números nos permite asignar el valor $\sqrt{2}n$ a la longitud de la hipotenusa. Como podemos intuir, hay una infinidad de segmentos cuya longitud no es posible medir utilizando solo números racionales. Por ejemplo, la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son 1 y 2, tampoco se puede medir usando solo racionales; con nuestro sistema de números, ahora decimos que la hipotenusa mide $\sqrt{5}$. En general, para medir cualquier segmento es necesario acudir a los números reales, con los cuales es posible hacerlo. Esta es una de las principales virtudes de los reales: nos permiten medir la longitud de cualquier segmento de recta.



Otra manera de expresar esta propiedad, es diciendo que es posible poner a los números reales en correspondencia con todos los puntos de la recta infinita. Esto no ocurre con los números racionales, ya que estos no se pueden poner en correspondencia con los puntos de la recta infinita.

Cuando ubicamos los racionales en la recta infinita, es decir, cuando asignamos todos los racionales a los puntos de la recta, quedará una infinidad de puntos sin asignárseles algún racional. Es aquí donde entran los irracionales, con los cuales se completa la asignación y quedan cubiertos todos los puntos de la recta. En este sentido, los números reales (racionales e irracionales) son un sistema completo. Además de que los reales son suficientes para cubrir todos los puntos de la recta física, ocurre también que no queda un real sin ser asignado. En esta asignación, se agotan los puntos de la recta y se agotan los números reales. Esto es lo que se quiere expresar cuando se dice que los reales se ponen en correspondencia con los puntos de la recta. En matemáticas se dice que los reales y los puntos de la recta se ponen en correspondencia uno a uno.

Si todos los racionales los asignamos a puntos de la recta, habrá una infinidad de puntos que no tengan algún racional asignado, un hecho que resulta difícil de comprender es que esta infinitud de puntos que no tienen asignados racionales es mayor que la de puntos de la recta a los cuales se les han asignado los racionales. Con base en la teoría de los "conjuntos infinitos", desarrollada por el famoso matemático alemán George Cantor, no todos los infinitos son iguales; hay unos más grandes que otros. Desde el punto de vista de esta teoría, la cantidad infinita de irracionales es mayor que la cantidad infinita de racionales, que son los números que mejor conocemos. En este sentido, se puede decir que hay más irracionales que racionales.

Siendo la infinitud de los irracionales mayor que la de los racionales, surge una interesante pregunta: ¿qué son los números irracionales?, la cual nos lleva a otra: ¿qué son los números reales? No obstante que hay una infinidad de números irracionales, apenas conocemos algunos de ellos. Además, carecemos de una definición de los números reales, a nos ser la de las expansiones decimales. Pero, requerimos una definición de otra naturaleza, pues muchos de los números irracionales que hemos ido conociendo, no se nos presentaron a través de sus expansiones

decimales. La aritmética con los reales no la llevamos a cabo usando las expansiones decimales, por cierto, infinitas. Además, aún no hemos precisado el concepto de expansión decimal, ni mucho menos tenemos reglas aritméticas para operarlas.

Las expansiones decimales son una representación de los reales; en la práctica nos auxiliamos de expansiones decimales finitas para llevar a cabo cálculos aritméticos, pero las expansiones decimales finitas son aproximaciones de los reales.

Si hacemos una reflexión sobre cómo es que adoptamos los números reales y trabajamos con ellos, llegaremos a la conclusión de que aceptamos su existencia casi por decreto. Vale decir que asumimos su existencia y que operamos con ellos a través de sus propiedades, mismas que aceptamos en calidad de postulados.

1.12.1 A manera de resumen

Los números reales constituyen un conjunto de objetos dotados de las mismas propiedades aritméticas o algebraicas que los números racionales. Los reales también gozan de las propiedades de las desigualdades, como las que tienen los racionales. Sin embargo, los reales tienen la ventaja sobre los racionales de que son suficientes para asignarlos a todos los puntos de la recta infinita. A cada punto de la recta infinita, le queda asignado un número real y no hay reales que no sean asignados; en esta asignación se agotan, simultáneamente, puntos y reales. La recta interpretada así, la llamaremos **recta real**. Entonces, la recta real es una recta física ideal que tiene asignado un número real a cada uno de sus puntos. Los reales "cubren" toda la recta. Debido a que esta es un objeto físico idealmente continuo, diremos que los reales son un sistema continuo de números. Una respuesta "simple", pero profunda, a la pregunta, ¿qué son los números reales?, es:

> El sistema de los números reales es un campo ordenado continuo.

Cuando se dice que el sistema de los números reales es un campo, se quiere decir que la suma y la multiplicación entre ellos tienen propiedades algebraicas, como las tienen la suma y la multiplicación de los racionales. Cuando se dice que el campo de los reales es ordenado, se quiere decir que en este existe el concepto de desigualdad con todas las propiedades antes expuestas y, finalmente, cuando se dice que es un campo ordenado continuo, podemos entender, por el momento, que es posible poner los reales en correspondencia uno a uno con los puntos de la recta física, que idealmente es un continuo. Que la recta sea un continuo significa que idealmente no tiene interrupciones o agujeros. En el capítulo 4, expresaremos en términos puramente aritméticos (no geométricos) lo que significa que los reales sean un continuo.

1.13 Valor absoluto

1.13.1 Definición y propiedades del valor absoluto

El **valor absoluto** desempeña un papel muy importante en el cálculo diferencial; por ejemplo, nos permite cuantificar la proximidad que pueden tener dos números, la cual llamaremos distancia entre los números. El concepto de distancia entre números es la base para hablar de límites, lo cual, a su vez, es fundamental para el importantísimo concepto de derivada. El valor absoluto de

un número real x, positivo o negativo, es el número desprovisto de su signo; en términos precisos, lo definimos como sigue.

Definición 2

El **valor absoluto** de un real x, que denotaremos por $|x|$, es

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por ejemplo $|3| = 3$, $|-5.1| = 5.1$.

Observemos que el valor absoluto de un número es no negativo, de hecho, a excepción de $x = 0$, el valor absoluto $|x|$ siempre es positivo. De esto se sigue que

$$x \leq |x| \text{ y } -x \leq |x|$$

para todo real x. Por tanto $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo real x.

También se sigue directamente de la definición que

$$|x^2| = x^2 \quad \text{y} \quad |x|^2 = x^2$$

para todo real x.

Por otra parte, tenemos que si x es cualquier número real y r es un real positivo, la condición $|x| < r$ es equivalente a la doble desigualdad $-r < x < r$. Esta equivalencia entre ambas expresiones la utilizaremos más adelante.

A continuación establecemos algunas de las propiedades más importantes del valor absoluto.

Teorema

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

1. Para todo real x se tiene $|x| \geq 0$. Además, $|0| = 0$ y $x = 0$ es el único real x que cumple $|x| = 0$.
2. Para todo real x, se tiene $|-x| = |x|$.
3. Para cualesquiera reales x, y, se tiene $|xy| = |x||y|$.
4. Para cualesquiera reales x, y, con $y \neq 0$, se tiene $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
5. Para cualesquiera reales x, y, se cumple la desigualdad $|x + y| \leq |x| + |y|$, conocida como **desigualdad del triángulo**.
6. Para cualesquiera reales x, y, se cumple $|x| - |y| \leq |x - y|$ y $|y| - |x| \leq |x - y|$ o sea $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demostración

Los incisos 1 y 2 son evidentes.

Prueba del inciso 3. Supongamos $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Entonces $xy \geq 0$, por tanto $|xy| = xy$. Además, también tenemos $|x| = x$ y $|y| = y$. Por tanto, en este caso $|xy| = xy = |x||y|$. Supongamos ahora $x \leq 0$ y $y \leq 0$. En este caso, también $|xy| = xy$, pues $xy \geq 0$. Por otra parte, $|x| = -x$ y $|y| = -y$, de

donde $|x||y| = (-x)(-y) = xy$. Por tanto, también tenemos $|xy| = xy = |x||y|$. Para completar todos los casos supongamos uno de los dos x o y mayor o igual a cero y el otro negativo, por ejemplo $x \geq 0$ y $y < 0$. En este caso $xy \leq 0$, por lo tanto $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. Esto prueba el inciso 3.

La prueba del inciso 4 es similar a la anterior y se deja como ejercicio para el lector.

Prueba del inciso 5. Por una parte, tenemos

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= |x|^2 + 2xy + |y|^2 \end{aligned}$$

Además, como $xy \leq |xy| = |x||y|$ tenemos

$$\begin{aligned} |x|^2 + 2xy + |y|^2 &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

Como $|x + y| \geq 0$ y $|x| + |y| \geq 0$, podemos concluir

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Esto prueba la desigualdad del triángulo. Para probar el inciso 6) hagamos $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$. Luego $|x| - |y| \leq |x - y|$. La otra desigualdad se prueba de manera similar.

1.13.2 Fórmula algebraica para el valor absoluto $|x| = \sqrt{x^2}$

Si a es un real positivo, una raíz cuadrada de a es por definición cualquier real r que cumpla $r^2 = a$. Es un hecho que todo real positivo tiene dos raíces cuadradas, una es positiva y otra negativa, por ejemplo 3 y -3 son raíces cuadradas de 9 pues $3^2 = 9$ y también $(-3)^2 = 9$. Si a es un real positivo, se conviene en denotar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada positiva de a, así que $\sqrt{a}$ siempre será un número positivo, esta es una convención que se hace en matemáticas. Si x es cualquier real diferente de cero, sabemos que x^2 es un real positivo, ya sea que x sea positivo o sea negativo. Nos preguntamos ahora por el valor de $\sqrt{x^2}$. Por definición, $\sqrt{x^2}$ es un real positivo r tal que $r^2 = x^2$. Si $x > 0$, entonces $r = x$ es un real positivo que satisface $r^2 = x^2$, así que en este caso $\sqrt{x^2} = x$. Si $x < 0$, entonces $r = -x$ es un real positivo que satisface $r^2 = (-x)^2 = x^2$, por tanto, en este caso $\sqrt{x^2} = -x$. Si comparamos con la definición del valor absoluto $|x|$, concluiremos entonces que en cualquier caso $\sqrt{x^2} = |x|$. Esta fórmula para el valor absoluto de un real será de mucha utilidad en el futuro.

Usando la fórmula $|x| = \sqrt{x^2}$, podemos abreviar algunas demostraciones; por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} |xy| &= \sqrt{(xy)^2} \\ &= \sqrt{x^2 y^2} \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \\ &= |x||y|. \end{aligned}$$

También tenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x}{y}\right| &= \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \\
&= \frac{|x|}{|y|}.
\end{aligned}
$$

1.14 Intervalos, vecindades y distancias

1.14.1 Diversos tipos de intervalos

Para el estudio de las funciones, con frecuencia recurriremos a los intervalos que son subconjuntos de los reales. Los hay de diversos tipos, algunos de los cuales son de especial importancia en el análisis de las funciones. A continuación describimos las diferentes clases de intervalos.

- Si a y b son dos números reales con $a < b$, el **intervalo abierto** (a, b) consiste de todos los reales x que satisfacen $a < x < b$.
- Si a es un número real, el **intervalo abierto** $(a, +\infty)$ consiste de todos los reales x que satisfacen $a < x$.
- Si b es un número real, el **intervalo abierto** $(-\infty, b)$ consiste de todos los reales x que satisfacen $x < b$.
- Si a y b son dos números reales con $a \leq b$, el **intervalo cerrado** $[a, b]$ consiste de todos los reales x que satisfacen $a \leq x \leq b$.
- Si a es un número real, el **intervalo cerrado** $[a, +\infty)$ consiste de todos los reales x que satisfacen $a \leq x$.
- Si b es un número real, el **intervalo cerrado** $(-\infty, b]$ consiste de todos los reales x que satisfacen $x \leq b$.
- Si a y b son dos números reales con $a < b$, los intervalos semiabiertos o semicerrados, $[a, b)$ y $(a, b]$, están definidos, respectivamente, por las desigualdades $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.

Observemos que un intervalo cerrado de la forma $[a, a]$ consiste solo del punto a. Algunas veces, hablaremos del intervalo abierto (a, a), lo cual significa el conjunto vacío. Estos intervalos los llamaremos intervalos degenerados.

1.14.2 Distancia entre dos reales

Ahora veamos el concepto de distancia entre dos reales. Si x y y son dos números reales, el valor absoluto de su diferencia $|x - y|$, representa la distancia entre los puntos de la recta real

correspondientes a los reales x y y, respectivamente. La distancia se asigna a pares de puntos, los cuales son entes geométricos, pero también vamos a referirnos a $|x - y|$ como la distancia entre los reales x y y.

Definición 3

Si x y y son dos reales cualesquiera, la distancia de x a y se define como $d(x, y) = |x - y|$.

En el siguiente teorema establecemos las propiedades más importantes de este concepto distancia.

Teorema

Sean x, y y z reales cualesquiera. Entonces se cumple

1) $|x - y| \geq 0$
2) $|x - y| = |y - x|$
3) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

La desigualdad 3) es conocida como **desigualdad del triángulo** para la distancia.
Los tres incisos también se escriben: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(x, y)$ y $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Demostración

La prueba se sigue inmediatamente de las propiedades del valor absoluto. Probemos el inciso 3).

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |(z - y|. \end{aligned}$$

1.14.3 Intervalo abierto con centro x_0 y radio $r > 0$

Sean x_0 un número real cualquiera y $r > 0$. El **intervalo abierto con centro** x_0 y **radio** $r > 0$ es el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, que consiste de todos los reales x que satisfacen la desigualdad

$$x_0 - r < x < x_0 + r.$$

Esta desigualdad también se escribe

$$-r < x - x_0 < r,$$

la cual equivale a la desigualdad

$$|x - x_0| < r.$$

Entonces tenemos que el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$ con centro x_0 y radio $r > 0$ consiste de los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < r$. En otras palabras, consiste de los puntos x cuya distancia a su centro x_0 es menor que r.

La equivalencia de las tres desigualdades anteriores es tan importante que merece se consigne en una proposición.

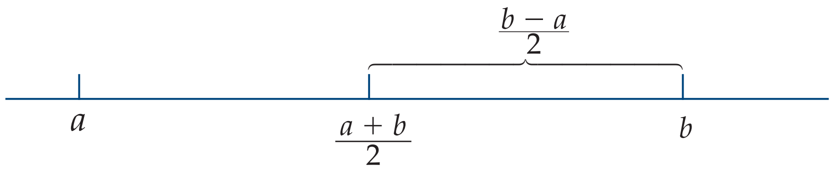
Proposición

Si x_0 es cualquier real y r es positivo, entonces las siguientes desigualdades son equivalentes entre sí:

a) $x_0 - r < x < x_0 + r$
b) $-r < x - x_0 < r$
c) $|x - x_0| < r$

Dicho de otra manera, cualquiera de las desigualdades anteriores puede usarse para caracterizar los puntos del intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Los intervalos abiertos de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ son muy socorridos en pruebas de teoremas de cálculo, sin embargo, todo intervalo abierto (a, b) puede verse como un intervalo de esta forma, con centro el punto $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y radio $r = \frac{b-a}{2}$.



Ahora vemos el concepto de vecindad de un punto.

Sea x_0 un número real, una **vecindad abierta** de x_0 es cualquier intervalo abierto (a, b) que lo contenga; el punto x_0 no necesariamente es el centro de la vecindad (a, b), aunque ciertamente puede serlo. Es una obviedad que cualquier intervalo abierto (a, b) es una vecindad abierta de cualquiera de sus puntos. Por ejemplo, el intervalo abierto $(0, 1)$ es una vecindad abierta de $\frac{1}{2}$, pero también es una vecindad abierta de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. El intervalo abierto $(0, 1)$ es vecindad abierta de cualquier real $0 < x_0 < 1$. A un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ le llamaremos vecindad abierta de x_0 de radio r. Esta terminología nos ayudará a hacer más fluida la redacción de las demostraciones.

Nota: Ya hemos visto que la desigualdad $|x| < r$, donde r es un real positivo es equivalente a la doble desigualdad $-r < x < r$. Ahora veamos cómo se traduce la desigualdad $|x| > r$. Supongamos x un real que satisface $|x| > r$. Si x es positivo entonces tenemos $x = |x| > r$. Si $x < 0$, entonces $-x = |x| > r$, es decir $x < -r$. Recíprocamente, supongamos x un real positivo tal que $x > r$, entonces ciertamente se cumple $|x| > r$. Por otra parte si $x < -r$ entonces $-x > r$, es decir, también se cumple $|x| > r$. Se sugiere al lector que reflexione cuidadosamente sobre el razonamiento que hemos realizado, con el cual probamos la siguiente afirmación: Sea $r > 0$, entonces

$$x \in \mathbb{R} \text{ satisface } |x| > r \text{ si y solamente si } x > r \text{ o bien } x < -r.$$

Dicho en otras palabras

$$x \in \mathbb{R} \text{ satisface } |x| > r \text{ si y solamente si } x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty).$$

En resumen: si r es un real positivo, entonces

a) El conjunto de reales que satisfacen $|x| < r$ es el intervalo abierto $(-r, r)$ cuyos elementos también se describen con la desigualdad $-r < x < r$.
b) El conjunto de reales que satisfacen $|x| > r$ es la unión de intervalos abiertos $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ cuyos elementos también se describen con la disyunción de las desigualdades $x > r$ o bien $x < -r$.

1.15 La desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c < d$

Para finalizar este capítulo estudiaremos desigualdades cuadráticas, es decir, desigualdades como $x^2 - 5x + 6 < 0$ o $x^2 - x + 1 \geq 7$. Las desigualdades que estudiaremos tienen la siguiente forma $ax^2 + bx + c < d$ o bien $ax^2 + bx + c \leq d$, donde a, b, c, y d son reales cualesquiera con $a \neq 0$. Sin embargo dado que toda desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > d$, puede escribirse en la forma $(-a)x^2 + (-b)x + (-c) < -d$ y toda desigualdad $ax^2 + bx + c \geq d$ también se escribe como $(-a)x^2 + (-b)x + (-c) \leq -d$, será suficiente estudiar las desigualdades $ax^2 + bx + c < d$ y $ax^2 + bx + c \leq d$. Cualquiera de estas desigualdades la llamaremos **desigualdad cuadrática**. Un real x que satisface una desigualdad cuadrática la llamaremos una **solución** de la misma. En esta sección aprenderemos un método para encontrar todas las soluciones de cualquier desigualdad cuadrática, cuando tales soluciones existen. El método también permitirá determinar los casos de las desigualdades para las cuales no existe solución.

Ejemplo 13

Antes de estudiar la desigualdad cuadrática general, iniciemos con la desigualdad simple

$$x^2 < 1.$$

Un poco de reflexión nos llevará a concluir que el conjunto de reales que satisfacen esta desigualdad es el intervalo abierto

$$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}.$$

Probemos que efectivamente este intervalo es el conjunto de reales x que satisfacen $x^2 < 1$. Primero osbservemos que los reales x que satisfacen $-1 < x < 1$ son los que satisfacen la desigualdad $|x| < 1$, por lo tanto el intervalo abierto $(-1, 1)$ también podemos expresarlo como

$$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}.$$

La justificación de que el intervalo abierto $(-1, 1)$ es el conjunto de soluciones de la desigualdad $x^2 < 1$ se basa en dos propiedades importantes de las desigualdades:

i) Si $0 \leq a < b$ entonces $0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
ii) Si $0 \leq c < d$ entonces $0 \leq c^2 < d^2$.

También requiere del hecho de que $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo real x y de la prueba de las siguientes implicaciones:

1) Si $a \in \mathbb{R}$ satisface $a^2 < 1$, entonces satisface $|a| < 1$.

y también

2) Si $a \in \mathbb{R}$ satisface $|a| < 1$, entonces satisface $a^2 < 1$.

Las implicaciones se expresan en forma breve como

$$a^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad |a| < 1$$

y

$$|a| < 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 < 1$$

Probemos pues estas dos implicaciones. Supongamos que a satisface $a^2 < 1$. Al extraer raíz cuadrada a ambos miembros, obtenemos de la propiedad enunciada en el inciso i)

$$
\begin{aligned}
0 &\le a^2 < 1\\
0 &\le \sqrt{a^2} < \sqrt{1}\\
0 &\le |a| < 1
\end{aligned}
$$

Con esto hemos probado que si a satisface $a^2 < 1$ entonces satisface $|a| < 1$.

Recíprocamente, supongamos ahora que a satisface $|a| < 1$, entonces elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos de la propiedad ii):

$$
\begin{aligned}
0 &\le |a| < 1\\
0 &\le |a|^2 < 1^2\\
0 &\le a^2 < 1
\end{aligned}
$$

Lo que hemos probado también se expresa diciendo que las desigualdades $x^2 < 1$ y $|x| < 1$ son equivalentes, lo cual significa:

Toda solución de $x^2 < 1$ es solución de $|x| < 1$ y viceversa, toda solución de $|x| < 1$ es solución de $x^2 < 1$.

Una manera breve de formular esta equivalencia es

$$x \text{ satisface } x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ satisface } |x| < 1.$$

Dado que el conjunto de reales x que satisfacen la desigualdad $|x| < 1$ es el intervalo $(-1, 1)$, hemos probado que el conjunto de soluciones de la desigualdad $x^2 < 1$ es este intervalo.

Quizás a algunos lectores les parezca innecesario la larga la demostración, pues tal vez piensen que bastaría escribir la cadena de desigualdades

$$
\begin{aligned}
x^2 &< 1\\
\sqrt{x} &< \sqrt{1}\\
|x| &< 1
\end{aligned}
$$

y ya que la última de las desigualdades equivale a la doble desigualdad $-1 < x < 1$, con ello terminaría la prueba. Pero esto es incorrecto, pues la secuencia de las tres desigualdades anteriores corresponde solo a la implicación

$$x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$$

Sin embargo se requiere probar la implicación recíproca. Ninguna de ellas por sí sola es suficiente para probar la equivalencia de las desigualdades $x^2 < 1$ y $|x| < 1$.

1.15.1 Una nota sobre el razonamiento aplicado en el ejemplo 13

Para poder afirmar que las soluciones de la desigualdad $x^2 < 1$ son las dadas por la desigualdad $|x| < 1$, hemos insistido en la necesidad de probar las dos implicaciones

$$x \text{ satisface } x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x \text{ satisface } |x| < 1$$

y

$$x \text{ satisface } x^2 < 1 \quad \Leftarrow \quad x \text{ satisface } |x| < 1$$

Este tipo de razonamiento se aplica también, por ejemplo, a sistemas de ecuaciones o a otro tipo de ecuaciones o desigualdades. Es importante comprender que no es suficiente deducir o transformar la ecuación original, mediante operaciones algebraicas, a otra ecuación de la cual podamos obtener fácilmente el valor o los valores de la incógnita, sino que debemos garantizar que la solución o soluciones obtenidas de la ecuación simplificada son las soluciones de la ecuación o desigualdad original.

Una manera de garantizar que los valores de la incógnita obtenidos son soluciones de la ecuación original es verificar que ciertamente lo son mediante una simple sustitución, sin embargo, no es necesaria esta verificación si se garantiza que la ecuación simplificada y la original son equivalentes. En cierto sentido se trata de garantizar que el proceso inverso de transformación también es válido. Esto es lo que hemos hecho con nuestro ejemplo simple. Para comprender mejor lo anterior veamos el siguiente ejemplo.

Consideremos la ecuación $x+\sqrt{x^2-4}=1$. A continuación presentamos una secuencia de operaciones que realizamos sobre esta ecuación con el propósito de hallar la solución o soluciones. Sugerimos que el lector se convenza de que todos los pasos algebraicos aplicados son totalmente válidos:

$$\begin{aligned}
x+\sqrt{x^2-4}&=1\\
\sqrt{x^2-4}&=1-x\\
x^2-4&=(1-x)^2\\
x^2-4&=1-2x+\ x^2\\
-4&=1-2x\\
2x&=5\\
x&=\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Sin embargo, si reemplazamos el valor $x=\frac{5}{2}$ en el miembro derecho de la ecuación original, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-4}&=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25-16}{4}}\\
&=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}\\
&=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\\
&=4\neq 1
\end{aligned}$$

Esto significa que el valor obtenido $x=\frac{5}{2}$ no es solución de la ecuación original. Esta aparente paradoja se debe a que alguno de los pasos en el proceso algebraico (todos válidos) que nos condujo al valor $x=\frac{5}{2}$ no es reversible. Se invita al lector a que descubra cuál o cuáles pasos son no reversibles.

El método para el caso general de la desigualdad cuadrática consiste en convertir la desigualdad dada en una equivalente, solo así podemos garantizar que las soluciones de la nueva desigualdad son las soluciones de la desigualdad cuadrática original.

Ejemplo 14

La siguiente desigualdad ilustra el caso de las desigualdades que no tienen solución

$$x^2 - 2x + 1 < 0.$$

En efecto, el miembro derecho puede escribirse como $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, así que la desigualdad se escribe como

$$(x-1)^2 < 0.$$

Dado que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, entonces para todo real x se tiene $(x-1)^2 \geq 0$, así que no existe un real x que satisfaga $(x-1)^2 < 0$. Esto prueba que la desigualdad no tiene solución.

Los razonamientos que hicimos en el tratamiento de los dos ejemplos anteriores va a prevalecer en el método que utilizaremos para hallar las soluciones de cualquier desigualdad cuadrática, el cual exponemos a continuación.

1.15.2 Método para hallar las soluciones de la desigualdad cuadrática general

Consideremos ahora la desigualdad cuadrática general $ax^2 + bx + c < d$, donde a, b, c y d son reales cualesquiera, con $a \neq 0$. El método para hallar las soluciones cuando estas existen, consiste en transformar la desigualdad dada en una de la forma $(x + \alpha)^2 < \beta$ o bien de la forma $(x + \alpha)^2 < \beta$, donde α y β son números reales, positivos, negativos o cero. La transformación la llevaremos a cabo mediante la conocida técnica de completar cuadrados.

Para dar inicio al procedimiento, dividamos ambos miembros de la desigualdad por a, que por hipótesis es diferente de cero, con lo que obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < \frac{d}{a} \quad \text{si} \quad a > 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > \frac{d}{a} \quad \text{si} \quad a < 0$$

Supongamos primero el caso $a > 0$. Entonces tenemos las siguientes desigualdades, cada una es consecuencia de la que le precede

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < \frac{d}{a}$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} < \frac{d}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 < \frac{d}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Para el caso $a > 0$, hemos transformado entonces la desigualdad $ax^2 + bx + c < d$ en la desigualdad $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 < \frac{d}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Esto lo sintetizamos como

$$a > 0, \quad ax^2 + bx + c < d \quad \Rightarrow \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 < \frac{d}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

La implicación recíproca también es cierta, pues todos los pasos de la cadena de desigualdades son reversibles, es decir, también es cierta

$$a > 0, \quad \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 < \frac{d}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow ax^2 + bx + c < d$$

Si hacemos $\alpha = \frac{b}{a}$ y $\beta = \frac{d}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ obtenemos la forma de la desigualdad anunciada

$$(x + \alpha)^2 < \beta$$

Si $\beta \leq 0$, entonces esta desigualdad no tiene solución, pues $(x + \alpha)^2 \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la desigualdad original tampoco tiene solución, ya que ambas desigualdades $ax^2 + bx + c < d$ y $(x + \alpha)^2 < \beta$ son equivalentes. Si por el contrario $\beta > 0$, entonces al extraer raíz cuadrada a ambos de la desigualdad $(x + \alpha)^2 < \beta$ obtenemos

$$|x+\alpha| < \sqrt{\beta}$$

Así que la solución de la desigualdad original y de esta última es el intervalo con centro $-\alpha$ y radio $\sqrt{\beta}$:

$$-\sqrt{\beta} < x+\alpha < \sqrt{\beta}$$
$$-\alpha-\sqrt{\beta} < x < -\alpha+\sqrt{\beta}$$

Para el caso $a < 0$ se procede de una manera similar. Si $a < 0$, entonces la desigualdad original $ax^2 + bx + c < d$ se transforma en la desigualdad equivalente

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} > \frac{d}{a}$$

Esta última se transforma como sigue

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} > \frac{d}{a}$$
$$\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+\frac{c}{a} > \frac{d}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 > \frac{d}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Si hacemos $\alpha=\frac{b}{a}$ y $\beta=\frac{d}{a}+\frac{b^2-4ac}{4a}$, obtenemos la forma deseada

$$(x + \alpha)^2 > \beta$$

Si $\beta < 0$, entonces todos los reales satisfacen la desigualdad, pues $(x + \alpha)^2 \geq 0 > \beta$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si $\beta = 0$, entonces se cumple $(x + \alpha)^2 > \beta = 0$ para todo real x, excepto cuando $x + \alpha = 0$, es decir, $x = -\alpha$. Entonces en este caso el conjunto de soluciones es la unión de los intervalos $(-\infty, -\alpha)$, y $(-\alpha, +\infty)$:

$$(-\infty, -\alpha) \cup (-\alpha, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{-\alpha\}$$

Finalmente, si $\beta > 0$ entonces extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros de la desigualdad $(x + \alpha)^2 > \beta$ obtenemos $|x+\alpha| > \sqrt{\beta}$, así que los reales x que satisfacen esta desigualdad son los que cumplen $x+\alpha > \sqrt{\beta}$ o $-(x+\alpha) > \sqrt{\beta}$. También podemos describir las soluciones de la desigualdad $|x+\alpha| > \sqrt{\beta}$ como el conjunto de reales x cuya distancia a $-\alpha$ es mayor que $\sqrt{\beta}$. Entonces el conjunto de soluciones de la desigualdad $|x+\alpha| > \sqrt{\beta}$ y, por tanto, de la desigualdad original, cuando $a < 0$, es la unión de dos intervalos:

$$(-\infty, -\alpha-\sqrt{\beta}) \cup (-\alpha+\sqrt{\beta}, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [-\alpha-\sqrt{\beta}, -\alpha+\sqrt{\beta}].$$

Con esto terminamos la discusión de la desigualdad $ax^2 + bx + c < d$.

Dejamos como ejercicio para el lector la discusión de la desigualdad $ax^2 + bx + c \leq d$. Los resultados son muy similares, pero ahora el signo de desigualdad $\leq$ en lugar del signo $<$ modifica la naturaleza de los intervalos solución.

Ejemplo 15

Halle las soluciones de la desigualdad cuadrática $x^2 - 6x + 6 < 1$.

En lugar de aplicar las fórmulas que obtuvimos en nuestra discusión de la desigualdad cuadrática general, reproduzcamos el procedimiento. Completando cuadrados, la desigualdad $x^2 - 6x + 6 < 1$ la transformamos como sigue

$$\begin{gathered}
x^2 - 6x + 6 < 1 \\
x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 6 < 1 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\
(x-3)^2 + 6 < 1 + 9 \\
(x-3)^2 < 4 \\
|x-3| < 2
\end{gathered}$$

Entonces la solución de la desigualdad $x^2 - 6x + 6 < 1$ está dada por la solución de la desigualdad $|x - 3| < 2$, es decir, consiste de los reales x que satisfacen $-2 < x - 3 < 2$ o sea $1 < x < 5$. El conjunto de soluciones es el intervalo abierto $(1, 5)$.

Ejemplo 16

Halle las soluciones de la desigualdad $x^2 - 4x + 10 < 5$.

Mediante completación de cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned}
&x^2 - 4x + 10 < 5 \\
&x^2 - 4x + 2^2 + 10 < 5 + 2^2 \\
&(x-2)^2 + 10 < 9 \\
&(x-2)^2 < -1
\end{aligned}$$

Por tanto, dado que el cuadrado de todo real es no negativo, concluimos que no existe real x que satisfaga la última de las desigualdades. Entonces esta desigualdad y la desigualdad original $x^2 - 4x + 10 < 5$ no tienen solución, pues ambas desigualdades son equivalentes.

Ejemplo 17

Halle las soluciones de la desigualdad $-x^2 + 8x + 3 < 20$.

Transformemos la desigualdad completando cuadrados:

$$\begin{gathered}
-x^2 + 8x + 3 < 20 \\
x^2 - 8x - 3 > -20 \\
x^2 - 8x + 4^2 - 3 > -20 + 4^2 \\
(x-4)^2 > -1
\end{gathered}$$

Dado que el cuadrado de todo real es no negativo, deducimos que la última de las desigualdades se cumple para todo real x, esto significa que el conjunto de soluciones de la desigualdad original $-x^2 + 8x + 3 < 20$ es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los reales.

Ejemplo 18

Halle las soluciones de la desigualdad $-x^2 + 6x + 1 < 10$.

Multiplicando ambos miembros por −1 y completando cuadrados tenemos

$$\begin{aligned} -x^2+6x+1&<10\\ x^2-6x-1&>-10\\ x^2-6x+3^2-1&>-10+3^2\\ (x-3)^2-1&>-1\\ (x-3)^2&>0 \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple para toda $x \neq 3$ (para $x = 3$ el miembro izquierdo toma el valor cero), por tanto el conjunto de soluciones son todos los reales diferentes de 3. Este conjunto se puede escribir de diversas formas:

$$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ , x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Ejemplo 19

Halle las soluciones de la desigualdad $-x^2 + 10x - 20 < 1$.
Multipliquemos ambos miembros por −1 y completemos cuadrados:

$$\begin{aligned} -x^2+10x-20&<1\\ x^2-10x+20&>-1\\ x^2-10x+25+20&>-1+25\\ (x-5)^2+20&>24\\ (x-5)^2&>4\\ |x-5|&>2 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la desigualdad dada son todos los reales cuya distancia al 5 es mayor que 2, es decir son todos los reales del conjunto

$$\mathbb{R} \setminus [3, 7] = (-\infty, 3) \cup (7, +\infty)$$

1.16 Método de inducción matemática

1.16.1 Introducción

Se trata de un método de prueba muy poderoso en matemáticas que nos permite demostrar proposiciones acerca de los números naturales, por ejemplo, proposiciones como las siguientes:

Proposición A. Para todo natural n, la suma de los primeros n naturales es

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Dicho de otro modo

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

para todo natural n.

Proposición B. La suma de los cuadrados de los primeros n naturales es

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

es decir

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo natural n.

Proposición C. Para todo número natural n, $7^n - 4^n$ es divisible entre 3.

Proposición D. Para todo natural n se cumple

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

El método de inducción matemática es particularmente útil para probar relaciones que descubrimos empíricamente cuando realizamos cálculos en casos particulares y en los que observamos un patrón de comportamiento. Por ejemplo, consideremos las sumas de los primeros naturales impares:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+4 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

Observemos que la suma de los dos primeros impares es $2^2 = 4$; la suma de los tres primeros impares es $3^2 = 9$; la suma de los cuatro primeros es $4^2 = 16$. Si continuamos calculando estas sumatorias verificaremos que siempre que elijamos cualquier número de impares consecutivos iniciando con el 1, la suma será el cuadrado del número de impares.

Pero, ¿cómo podemos probar que esto va a ocurrir siempre? No podemos hacer la afirmación de que esto va a ocurrir para cualquier número de impares consecutivos, por el hecho de que así ocurra con algunos casos particulares, no importa que sea grande el número de casos particulares. Debemos dar un argumento contundente que nos permita afirmar que, independientemente de la cantidad de impares consecutivos que adicionemos iniciando con el 1, la suma es igual al cuadrado del número de impares que elijamos. Mientras no tengamos una prueba, la afirmación tiene el carácter de conjetura, es decir, una afirmación en cuya veracidad creemos apoyados en evidencias empíricas. Si la proposición resulta cierta entonces será fácil calcular las siguientes sumas:

$$\begin{aligned} x &= 1+3+5+\cdots+99 \\ y &= 1+3+5+\cdots+2\,011 \\ z &= 1+3+5+\cdots+100\,001 \end{aligned}$$

Es un buen ejercicio para el lector que calcule estas sumas, suponiendo que la proposición es verdadera.

En esta sección estudiaremos el Método de Inducción Matemática. Este método es un magnífico recurso para probar conjeturas o proposiciones como la que acabamos de descubrir y se basa en lo que se llama Principio de Inducción Matemática.

1.16.2 Principio de Inducción Matemática

En lo que sigue utilizaremos la letra P para referirnos a una proposición. Por ejemplo, P puede referirse a la proposición: la suma de los primeros n naturales impares es n^2.

Supongamos que tenemos una proposición P sobre los números naturales, que cumple las siguientes dos condiciones

1) La proposición P es cierta para $n = 1$.
2) Del supuesto de que la proposición P es cierta para $n = k$, es posible desprender que es cierta para $n = k + 1$.

Entonces podemos afirmar que la proposición P es cierta para todo natural n.

Esto es lo que se llama principio de inducción matemática, el cual nos permite probar que una proposición sobre los naturales es cierta para todo los naturales. Para aplicarlo a una proposición específica debemos mostrar que la proposición cumple con las condiciones 1) y 2) de su enunciado. Es decir, primero debemos verificar que la proposición es cierta para el caso particular $n = 1$. Esta parte, en general, es la más fácil de llevar a cabo. En seguida debe mostrarse que la proposición satisface la condición 2). Para ello debe probarse que bajo el supuesto de que la proposición es cierta para algún natural $n = k$, entonces la proposición es cierta para el natural siguiente $n = k + 1$. Esta es la manera de mostrar que se cumple la condición del inciso 2) y es la parte más difícil.

Reflexión importante

Para mostrar que una proposición satisface la condición 2) debe hacerse una deducción bajo un supuesto. El supuesto es que la proposición es cierta cuando $n = k$. Este supuesto se llama **hipótesis de inducción** y con frecuencia utilizaremos este término cuando apliquemos el principio de inducción matemática en la prueba de proposiciones.

El método de inducción matemática consiste de dos etapas. Por una parte debemos mostrar que la afirmación es cierta para el natural $n = 1$. Por otra parte, debemos probar que la afirmación es cierta para $n = k + 1$ bajo la hipótesis de que es cierta cuando $n = k$. Ambas partes son necesarias, ninguna por sí sola es suficiente. Por ejemplo analicemos las siguientes tres fórmulas

A) $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = (n - 1) + n\,(n + 1)$
B) $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n\,(n + 1) + 6$
C) $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n\,(n + 1)$

Se verifica fácilmente que la fórmula A) es cierta para $n = 1$, pero no es posible pasar a la validez de la fórmula para $n = k + 1$ a partir de su validez para $n = k$. En efecto, para $n = k$ la fórmula A) se escribe

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2k) = (k - 1) + k\,(k + 1)$$

Por una parte, de esta fórmula se deduce

$$\begin{aligned}\overbrace{2+4+6+\cdots+(2k)}^{(k-1)+k(k+1)}+2(k+1) &= \overbrace{(k-1)+k(k+1)}+2(k+1).\\ &=(k-1)+(k+2)(k+1)\end{aligned}$$

Por otra parte, cuando sustituimos $n = k + 1$, en el miembro derecho de la fórmula A) obtenemos

$$(n - 1) + n\,(n + 1) = k + (k + 1)\,(k + 2).$$

Pero es falsa la igualdad

$$(k - 1) + (k + 2)\,(k + 1) = k + (k + 1)\,(k + 2)$$

para todo natural k, pues si fuese cierta para alguna k de esta se deduciría $k - 1 = k$, es decir $-1 = 0$, lo cual es un absurdo. Así que no podemos pasar de la veracidad para $n = k$ a la veracidad para $n = k + 1$. De hecho se verifica fácilmente que la fórmula A) es falsa para $n = 2$. En este caso el miembro izquierdo es igual a 6, mientas que el miembro derecho es igual a 7.

Ahora analicemos la fórmula B). En este caso es posible deducir la veracidad de la fórmula para $n = k + 1$ a partir de su veracidad para $n = k$. En efecto, supongamos que la fórmula B) es cierta para alguna $n = k$. Tenemos entonces que vale la igualdad

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2k) = k\,(k + 1) + 6.$$

Probemos que de esta igualdad se deduce la fórmula B) para $n = k + 1$. Si sustituimos $n = k + 1$ en el miembro izquierdo de la fórmula B) obtenemos

$$\begin{aligned}\overbrace{2+4+6+\cdots+(2k)}^{k(k+1)+6}+2(k+1) &= \overbrace{k(k+1)+6}+2(k+1).\\ &= k(k+1)+2(k+1)+6\\ &= (k+1)(k+2)+6.\end{aligned}$$

Por otra parte, si sustituimos $n = k + 1$ en el miembro derecho de la misma fórmula B) obtenemos

$$n(n + 1) + 6 = (k + 1)(k + 2) + 6.$$

Como ambos resultados coinciden hemos mostrado que vale la fórmula para $n = k + 1$ siempre y cuando valga para $n = k$.

Pero la fórmula B) es falsa para $n = 1$, así que no podemos aplicar el principio de inducción matemática. Por supuesto, la fórmula podría ser cierta para algún valor de n diferente de 1, pero no es el caso, de hecho no existe un natural n para la cual la fórmula B sea válida. Esto es consecuencia de que la fórmula C) es válida para todo natural n. En efecto

1) Para $n = 1$, ambos miembros de la fórmula C) toman el valor de 2, por lo que es cierta para este valor de n.
2) Supongamos ahora que la fórmula es cierta para $n = k$, es decir supongamos que para algún valor k se cumple

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2k) = k\,(k + 1)$$

Probemos que la fórmula C) es cierta para $n = k + 1$. Calculemos primero el miembro izquierdo de C) para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}\overbrace{2+4+6+\cdots+(2k)}^{k(k+1)}+2(k+1) &= k(k+1)+2(k+1)\\ &= (k+1)(k+2)\end{aligned}$$

Como el miembro derecho para $n = k + 1$, también es igual a $(k + 1)(k + 2)$, tenemos que la fórmula es cierta para $n = k + 1$.

Por tanto, aplicando el principio de inducción matemática podemos concluir que la fórmula C) es cierta para todo natural n.

Finalizamos esta sección con un comentario acerca de la naturaleza del principio de inducción matemática. En matemáticas los enunciados podemos clasificarlos como axiomas, definiciones y teoremas (en esta categoría están los lemas, proposiciones y corolarios). En física el término

principio tiene una acepción muy especial que no es de estas categorías matemáticas, entonces es natural preguntarse de qué categoría es el principio de inducción matemática. La respuesta es simple. Primero mostremos que el principio de inducción matemática puede deducirse de la siguiente propiedad de los números naturales:

> Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento que es menor que todos los elementos del conjunto. Dicho de otra manera, todo conjunto de naturales tienen un elemento mínimo.

En efecto, supongamos que una proposición P cumple con las condiciones 1) y 2) del Principio antes enunciado. Mostremos que la proposición P es cierta para todo los naturales n. supóngase que no fuese cierta para todos los naturales y sea M el conjunto de naturales para los cuales es falsa. Usando la propiedad anterior de los números naturales, sea m el menor elemento de M. Es decir, m es el menor de los naturales para los cuales la proposición es falsa. Como la proposición es cierta para $n = 1$, entonces $m \neq 1$, por tanto $m - 1$ es un número natural. Como $m - 1$ es menor que m, la proposición es cierta para $m - 1$, pues m es el menor natural para los cuales es falsa. Pero siendo cierta para $m - 1$ y teniendo P la propiedad 2), P debería ser cierta para m. Pero esto contradice la propiedad de m. Esto prueba que P es cierta para todo natural n.

Por lo anterior, podemos considerar que el Principio de Inducción Matemática es un teorema cuya prueba se basa en la propiedad antes enunciada. Esta propiedad es uno de los axiomas que define los números naturales cuando se les estudia desde un punto de vista axiomático.

1.16.3 Aplicaciones del método de inducción matemática

Veamos más ejemplos que ilustren cómo se aplica el principio de inducción matemática en la prueba de proposiciones. Iniciemos con una fórmula muy simple, que si bien puede deducirse por varios métodos, ahora la utilizaremos para ilustrar el método de inducción matemática.

Ejemplo 20

Probemos que para todo número natural n, se cumple

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Para aplicar el principio de inducción matemática, verifiquemos que se cumplen las condiciones 1) y 2) del mismo.

1) Debemos verificar que la fórmula es cierta para $n = 1$. Para hacer esto calculamos ambos miembros de la fórmula haciendo $n = 1$ y mostramos que son iguales. El miembro derecho es trivialmente igual a 1. Por otra parte, haciendo $n = 1$ en el miembro derecho de la fórmula obtenemos

$$\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Entonces, ambos miembros, izquierdo y derecho, tienen el valor 1, por lo que son iguales. Esto verifica la primera condición del principio de inducción matemática.

2) Supongamos ahora que la fórmula es cierta para algún natural $n = k$, es decir, para algún natural k es cierta la igualdad

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Esto es lo que llamamos hipótesis de inducción. Probemos que obtenemos una igualdad cuando en la fórmula original sustituimos $n = k + 1$. Es decir, probemos que se cumple la igualdad

$$1+2+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

que es la que resulta después de sustituir $n = k + 1$ en la fórmula por probar.

Por una parte tenemos

$$1 + 2 + \cdots + (k + 1) = 1 + 2 + \cdots + k + (k + 1)$$

Entonces es cierto que

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(k+1) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

Esto prueba que la fórmula es cierta para $n = k + 1$.

Por tanto, se cumplen las condiciones del principio de inducción matemática, por lo que podemos concluir que la fórmula

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

es cierta para todo natural n.

Ejemplo 21

Probemos que para todo natural n se cumple

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) Verifiquemos que la fórmula es válida para $n = 1$. Por una parte, el miembro izquierdo de la fórmula propuesta es igual a $1^2 = 1$. Por otra parte, el miembro derecho se reduce a

$$\frac{1(1+1)\,(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1.$$

Como ambos miembros de la fórmula tienen el mismo valor 1, entonces concluimos que la fórmula es cierta para $n = 1$.

1) Supongamos ahora que la fórmula es cierta para algún natural k, es decir, para algún natural k se vale la igualdad

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Esta es la hipótesis de inducción. Usando esta hipótesis, vamos a probar que la fórmula es cierta para $n = k + 1$. Es decir, probaremos que se vale la igualdad

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Por una parte tenemos que el miembro izquierdo de la igualdad a probar es

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

Usando la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 &= \overbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}^{\text{para esta suma conocemos la fórmula}} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right](k+1)}{6} \\ &= \frac{\left[(2k^2 + k + 6k + 6)\right](k+1)}{6} \end{aligned}$$

Luego

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{\left[(2k^2 + 7k + 6)\right](k+1)}{6}$$

Por otra parte el miembro derecho de la igualdad a probar es

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+2)(2k+3)(k+1)}{6} \\ &= \frac{(2k^2 + 7k + 6)(k+1)}{6}. \end{aligned}$$

Por tanto ambos miembros, izquierdo y derecho, son iguales a

$$\frac{\left[2k^2 + 7k + 6\right](k+1)}{6}.$$

Usando el principio de inducción concluimos que la fórmula

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

es cierta para todo número natural n.

Ejemplo 22

Pruebe que para todo natural n, el entero $7^n - 4^n$ es divisible entre 3.

Mostremos que la proposición cumple con las dos condiciones del principio de inducción matemática.

1) La afirmación es cierta para $n = 1$. En efecto, para $n = 1$ la expresión $7^n - 4^n$ es igual a $7 - 4 = 3$, así que obviamente es divisible entre 3.
2) Supongamos ahora que la afirmación es cierta para algún natural $n = k$. Es decir, $7^k - 4^k$ es divisible entre 3. Esto significa que existe un natural q tal que $7^k - 4^k = 3q$. Mostremos que $7^{k+1} - 4^{k+1}$ es divisible entre 3. Para ello escribiremos de manera conveniente $7^{k+1} - 4^{k+1}$:

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 4^{k+1} &= 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k \\ &= 3 \cdot 7^k + 4 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k \\ &= 3 \cdot 7^k + 4(7^k - 4^k) \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción $7^k - 4^k = 3q$, donde q es un natural, entonces tenemos

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 4^{k+1} &= 3 \cdot 7^k + 4(7^k - 4^k) \\ &= 3 \cdot 7^k + 4 \cdot 3q \\ &= 3 \cdot (7^k + 4q) \end{aligned}$$

Esto prueba que $7^{k+1} - 4^{k+1}$ es múltiplo de 3, que es lo que deseábamos mostrar.

Entonces por el principio de inducción matemática concluimos que $7^n - 4^n$ es divisible entre 3 para todo natural n.

Ejemplo 23

Pruebe que para todo natural n, la suma de los primeros n impares es n^2.

Como en los ejemplos anteriores, para probar que la proposición es cierta para todo natural n, mostremos que la proposición cumple con las condiciones del principio de inducción matemática.

1) La proposición evidentemente es cierta para $n = 1$, pues en este caso se trata de un solo natural impar, el primero de ellos, que es 1.
2) Supongamos que la proposición es cierta para $n = k$, es decir, la suma de los k primeros naturales es k^2:

$$\underbrace{1 + 3 + \cdots + m}_{\text{primeros } k \text{ naturales impares}} = k^2$$

Una pregunta que surge, ¿cuál es el impar m? Sabemos que m es el k-ésimo natural impar. La pregunta se responde fácilmente si observamos que los impares se generan con la fórmula $2p - 1$ donde p varía sobre todos los naturales. Por ejemplo:

Para $p = 1$, $2p - 1 = 1$
Para $p = 2$, $2p - 1 = 3$
Para $p = 3$, $2p - 1 = 5$, etcétera.

Entonces el k-ésimo natural impar se obtiene haciendo $p = k$, es decir, el k-ésimo natural impar es $2k - 1$. De esta fórmula para los naturales impares podemos escribir entonces

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Probemos ahora que la suma de los primeros $k + 1$ naturales impares es $(k + 1)^2$. Observemos primero que el $(k + 1)$-ésimo natural impar se obtiene sustituyendo $p = k + 1$ en la fórmula $2p - 1$, así que este impar es $2\,(k + 1) - 1 = 2k + 1$. Entonces la suma de los primeros $k + 1$ naturales impares se escribe

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1).$$

Probaremos que esta suma es igual a $(k + 1)^2$. En efecto, aplicando la hipótesis de inducción (la suma de los primeros k impares es k^2) obtenemos

$$\begin{aligned}\underbrace{1+3+\cdots+(2k-1)}_{\text{primeros } k \text{ impares}}+(2k+1) &= k^2+(2k+1)\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Con esto completamos la prueba por inducción matemática, por lo que podemos concluir que para todo natural n, la suma de los primeros n impares es n^2.

Ejemplo 24

Pruebe que para todo natural n se cumple

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Mostremos que se cumplen las condiciones 1) y 2) del principio de inducción matemática.

1) Para probar que la fórmula es cierta para $n = 1$, calculemos por separado ambos miembros. Para $n = 1$ el miembro izquierdo se reduce a $\frac{1}{1\circ 2}=\frac{1}{2}$. Por otra parte, para $n = 1$ el miembro derecho es

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Entonces ambos miembros son iguales a $\frac{1}{2}$. Con esto verificamos la condición 1).

2) Supongamos ahora que la fórmula es cierta para algún natural $n = k$, es decir, es cierta la igualdad

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Usando esta hipótesis probemos que la fórmula es cierta para $n = k + 1$. Primero observemos que el miembro izquierdo de la fórmula propuesta cuando sustituimos $n = k + 1$ toma la forma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}.$$

Usando la hipótesis de inducción, obtenemos

$$\overbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}^{\text{por hipótesis es igual}\frac{k}{k+1}}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}.$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

Pero $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, por tanto, al hacer la simplificación correspondiente obtenemos

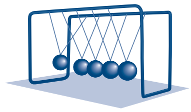
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Pero esta es precisamente la fórmula propuesta para $n = k + 1$.

Como ya hemos verificado que se cumplen las dos condiciones del principio de inducción, concluimos que para todo natural n se cumple

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

1.17 Problemas y ejercicios



Números racionales

I. Determine la expansión decimal de los siguientes números.

1. $\frac{3}{8}$
2. $\frac{4}{11}$
3. $\frac{127}{66}$
4. $\frac{23}{99}$
5. $\frac{1}{16}$
6. $\frac{1}{17}$
7. $\frac{m}{99}$ con m natural de 2 o menos cifras.

II. Escriba los siguientes números racionales en la forma $\frac{p}{q}$.

8. 1.75
9. 5.125
10. 1.4142
11. $10.10\overline{10} = 10.101010...$
12. $1.\overline{75}$
13. $1.\overline{4142} = 1.41424142...$
14. $1.41\overline{42}$
15. $2.0111\overline{1} = 2.01111...$
16. $3.04518\overline{18} = 3.045181818...$
17. $0.\overline{101}$
18. 0.03125
19. $0.4\overline{9}$
20. $1.3\overline{45}$
21. 2.505
22. $0.\overline{0123456789}$
23. $0.11\overline{9}$

Números irracionales

24. Pruebe que $\sqrt{5}$ es irracional.
25. Sabiendo que $\sqrt{5}$ es irracional, pruebe que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es irracional.
26. Demuestre que $\sqrt{p}$ es irracional, si p es primo.
27. Pruebe que si a es número racional y b es un número irracional, entonces $a + b$ es irracional.
28. Pruebe que si a es un número racional diferente de cero y b es un número irracional, entonces el producto ab es irracional.
29. Demuestre con un ejemplo que la suma de dos números irracionales, no es necesariamente irracional.
30. Demuestre con un ejemplo que el producto de dos números irracionales no es necesariamente irracional.
31. Considere la "ecuación formal" con un número infinito de radicales

$$x = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}$$

¿Cuál es el valor de x?

32. Considere la "ecuación formal" con un número infinito de radicales

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}$$

Prueba que para $x \geq 0$, y está dada por

$$y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

33. Obtenga el valor de la

$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}}$ y pruebe que satisface la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de Φ?

34. Considerando que Φ cumple la ecuación $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, es decir $\Phi^2 = \Phi + 1$, pruebe que $\Phi^3 - 2\Phi + 1$.

35. Halle una fórmula para Φ^n, donde n es un entero positivo.

36. Pruebe que $\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

Radicales

I. Simplifique las siguientes expresiones.

37. $\sqrt{50} - \sqrt{8}$

38. $\sqrt{125} + \sqrt{12} - \sqrt{147}$

39. $\sqrt{63} - \sqrt{80} - \sqrt{28} + \sqrt{45}$

40. $\left(\sqrt{3} + 4\right)^2 - \left(1 + 4\cdot\sqrt{3}\right)^2$

41. $\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$

42. $\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(3 - \sqrt{2}\right) + 7$

43. $\left(\sqrt{7} - 3\right)^2 + 6 \cdot \left(\sqrt{7} - 3\right) - 19$

44. $3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$

45. $\left(8\cdot\sqrt{2} + 5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\cdot\sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{3}\right)$

46. $\left(5 + 2\cdot\sqrt{3}\right)^2 - 10\cdot\left(5 + 2\cdot\sqrt{3}\right) + 13$

Racionalización

I. Racionalice las siguientes fracciones.

47. $\dfrac{6}{7\sqrt{2}}$

48. $\dfrac{3}{5 - 2\sqrt{3}}$

49. $\dfrac{2}{\sqrt{5} - 1}$

50. $\dfrac{5}{\sqrt[5]{5}}$

51. $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

52. $\dfrac{7 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$

53. $\dfrac{\sqrt{6}}{2 - \sqrt{6}}$

54. $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

55. $\dfrac{12}{3 + \sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{2}}$

56. $\dfrac{9 + \sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

57. $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

58. $\dfrac{5 + \sqrt{5}}{7 - \sqrt{5}}$

59. $\dfrac{7 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 3}$

60. $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

61. $\dfrac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$

62. $\dfrac{2}{\sqrt{a + 1} + \sqrt{a - 3}}$

63. $4\cdot\sqrt[3]{5} - 2\cdot\sqrt[3]{135} + 3\cdot\sqrt[6]{1600} - 15\cdot\sqrt{\dfrac{1}{25}}$

64. $\dfrac{2}{\sqrt{18}} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$

65. $\dfrac{2 + \sqrt[3]{4}}{3 \cdot \sqrt[3]{4}}$

66. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$

II. Resuelva las siguientes cuestiones.

67. Si $\sqrt{2} \approx 1.4142$, halle una aproximación de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

68. Si $\sqrt{3} \approx 1.732050807$, halle una aproximación de $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

69. Sabiendo que 2.2360679774 es una aproximación de $\sqrt{5}$ con 10 decimales correctos, halle una aproximación con 10 decimales correctos de

$$\frac{2}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{5} + 1}}$$

Desigualdades

70. Como $2 < 4$, podemos concluir que $\sqrt{2} < 2$. Prueba que

a) $\sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$

b) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} < 2$

71. Pruebe que $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} < 3$

72. Pruebe que para cualesquiera reales x, y, se cumple

$$|x|\,|y| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Sugerencia: considere la desigualdad $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, que se cumple para cualesquiera reales x, y.

73. Si $0 < x < y$, pruebe que

$$\sqrt{xy} < \frac{x + y}{2}$$

74. Pruebe que

a) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

b) $\sqrt{3} < \sqrt{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} < 0.62$

75. Pruebe que si $0 \leq a < b$ y n es cualquier natural, entonces $a^n < b^n$

Valor absoluto

76. Si $|a| = |b|$, calcule $\dfrac{|a + b| - |a^2 - b^2|}{|ab| + ab\;|a^2 + b^2|}$.

77. ¿En qué se simplifica la expresión $\dfrac{|x|}{x}$?

78. ¿En qué se simplifica la expresión $\dfrac{x + |x|}{2}$?

79. ¿En qué se simplifica la expresión $\dfrac{x - |x|}{2}$?

80. Pruebe que el más grande de dos reales, u y v, está dado por

$$\text{máx}(u, v) = \frac{u + v + |u - v|}{2}$$

81. Pruebe que el menor de dos reales, u y v, está dado por

$$\text{mín}(u, v) = \frac{u + v - |u - v|}{2}$$

82. Halle una fórmula para el máximo de tres números reales u, v, w.

83. Halle una fórmula para el mínimo de tres números reales u, v, w.

Problemas sobre desigualdades y valor absoluto

84. Pruebe que para cualesquiera reales a y b se cumple

a) $|a| - |b| \leq |a - b|$

b) $|b| - |a| \leq |a - b|$

85. Para cada uno de los incisos halle todos los reales x que satisfacen la desigualdad dada.

a) $|x - 3| < 7$

b) $|x + 1| < 1$

c) $|2x - 5| < 4$

d) $|x - 3| \leq 2$

e) $|x + 5| \geq 5$

f) $|3x + 2| \geq 6$

g) $x^2 - x + 4 < 10$

h) $x^2 + x + 4 > 10$

i) $x(1 - x) > 1$

j) $x^2 + 2x < -2$

86. Halle todos los reales x que satisfacen

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{1-x} > 0$$

87. Halle todos los reales x que satisfacen

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{1-x} < 0$$

88. Halle los reales x que satisfacen

$$|x - 1| + |x - 1| = 4$$

89. ¿Para qué valores de x se cumple la condición $-5 \leq 3x-2 \leq 9$?

90. Sabiendo que $a+b>c+d$, $a>b$, $c>d$, ¿siempre se cumple alguna de las desigualdades siguientes $a>c$, $a>d$, $b>c$, $b>d$? Pruebe su afirmación o proporcione un contra ejemplo en cada caso.

91. Encuentre para qué valores de x se cumple

$$\frac{1}{x} > 3$$

92. Encuentre los valores de x que cumplen

$$\frac{x}{x-1} > 4.$$

93. Encuentre los valores de x que satisfacen la desigualdad $(x-a)(x-b)(x-c) \leq 0$.

94. Encuentre los valores de x que satisfacen la desigualdad $\left|\frac{2}{x}\right| \geq \frac{x}{5}$.

95. Determine los números reales x que satisfacen la desigualdad $(x-1)^2 < 4$.

96. Determine los reales x que satisfacen la desi-gualdad $2 \leq x^2$.

97. Determine los reales x que satisfacen la desigualdad $(x-2)^2+3 < 12$.

98. Determine los reales x que satisfacen la desigualdad $x^2 - x + \frac{9}{4} < 3$.

99. Determine los reales x que satisfacen la desigualdad $2x^2 + 3x - 2 < x^2 + x + 1$.

100. Determine los números reales x que satisfacen la desigualdad $x^4 < 2x^2 + 3$.

101. Exprese, sin valor absoluto, la ecuación $|x^2 + 4x + 4| - |3x| = 0$.

102. Determine los valores de x que cumple la desigualdad $|7x| - |3x| \leq 0$.

103. ¿Existen valores de x que cumplan la ecuación $|x^2| - 4|x| - 1 = 0$?

104. Dada la siguiente desigualdad $\sqrt{|x| - 1} \geq a > 0$ encuentre los valores de x que la satisfacen.

Intervalo y vecindades

105. La temperatura se puede medir en grados Cel-sius o grados Fahrenheit; la relación entre ambas escalas de temperatura es: $c = \frac{5}{9}(f - 32)$, donde c es el valor numérico de una temperatura en grados Celsius y f lo es en grados Fahrenheit.

106. ¿Cuál es el intervalo de temperaturas en grados Fahrenheit correspondiente al intervalo $7 < c < 55$? ¿El punto medio de dicho intervalo de temperaturas corresponde al punto medio del intervalo en grados Fahrenheit?

II. Para cada uno de los siguientes intervalos encuentre el centro y el radio correspondiente.

107. $(-1, 2)$

108. $(-2, 5)$

109. $(a+c, b+c)$

110. $\left(\frac{h-1}{h}, \frac{h+1}{h}\right)$

111. $(1-r, 1+2r)$

III. Describa cada uno de los siguientes intervalos, mediante una desigualdad de la forma $|x-a|< r$ o $|x-a|\leq r$.

112. $(-4, -2)$

113. $[0, 6]$

114. $[-1,3]$

Inducción matemática

115. Pruebe que $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n\,(n + 1)$ para todo natural n.

116. Pruebe que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo natural n.

117. Pruebe que $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ para todo natural n.

118. Pruebe que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

para todo natural n.

119. Pruebe que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

para todo natural $n \geq 2$.

120. Pruebe que para todo natural n se tiene

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

121. Pruebe que $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ para todo natural n.

122. Pruebe que $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2\,(2n^2 - 2)$ para todo natural n.

123. Pruebe que

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \cdots + (-1)^{n+1}\,n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (-1)^{n+1}\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

para todo natural n.

124. Observe que

$$1 = 1$$
$$1 - 4 = -(1 + 2)$$
$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$
$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

Establezca una conjetura y pruébela usando inducción matemática.

125. a) Sea $r \neq 1$. Pruebe que para todo natural n se tiene

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

b) Deduzca que si r es cualquier real, entonces para todo natural n se cumple la igualdad

$$1 - r^{n+1} = (1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n+1}).$$

c) Deduzca de la relación anterior que si a y b son reales cualesquiera entonces

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

para todo natural n.

126. Pruebe que para todo real $r \neq 1$ y todo n natural se cumple

$$1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} = \frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

127. Sean a y b dos reales cualesquiera. Pruebe que $a - b$ es divisor de $a^n - b^n$ para todo natural n.

128. Pruebe la desigualdad de Bernoulli: si $h > -1$, entonces para todo natural n se cumple

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

129. Sea $h \geq 0$, pruebe que para todo natural n se cumple

$$(1 + h)^n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2} h^2$$

130. Pruebe que $7^n - 4^n$ es divisible por 3 para todo natural n.

131. Pruebe que $5^n - 2^n$ es divisible por 3 para todo natural n.

132. Pruebe que $11^n - 7^n$ es divisible por 4 para todo natural n.

133. Pruebe que $2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n$ es divisible por 5 para todo natural n.

134. Pruebe que $3^{2n} - 1$ es divisible por 8 para todo natural n.

135. Pruebe que $2^{2n} - 1$ es divisible por 3 para todo natural n.

136. Pruebe que $5^{2n} - 1$ es divisible por 8 para todo natural n.

137. Pruebe que $5^{2n} - 1$ es divisible por 3 para todo natural n.

138. Pruebe que $5^{2n} - 1$ es divisible por 6 para todo natural n.

139. Pruebe que para todo natural n,

$$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$$

es divisible por 9. Dicho de otro modo, la suma de los cubos de tres naturales consecutivos cualesquiera es divisible por 9.

140. Pruebe que para todo x que no sea múltiplo de 2π y todo natural n se tiene

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

141. Pruebe que $2^n < n!$ para todo natural $n \geq 4$.

142. Pruebe que $2^n < (n + 1)!$ para todo natural n.

143. Pruebe que $2^n + 1 \leq 3^n$ para todo natural n.

144. Diga para cuáles naturales n se cumple $n^2 < 2^n$. Pruebe su afirmación usando inducción matemática.

145. Halle $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n^3 < 2^n$ para todo natural $n \geq n_0$. Pruebe su afirmación usando inducción matemática.

146. Pruebe que para todo natural n, se cumple

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$

147. Pruebe que para todo natural n, se cumple

$$1^1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

148. Pruebe que para todo natural n se tiene

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

149. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que para todo natural n se cumple

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \bullet 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \bullet 2 \bullet 3} a^{n-3} b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \cdots \bullet k} a^{n-k} b^k + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\bullet \cdots \bullet 2 \bullet 1}{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \cdots \bullet n} b^n$$

Esta fórmula suele escribirse en la forma

$$(a+b)^n = \binom{1}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n+1} b \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots \binom{n}{n} b^n.$$

donde $\binom{n}{k}$ se llaman coeficientes binomiales y se definen como

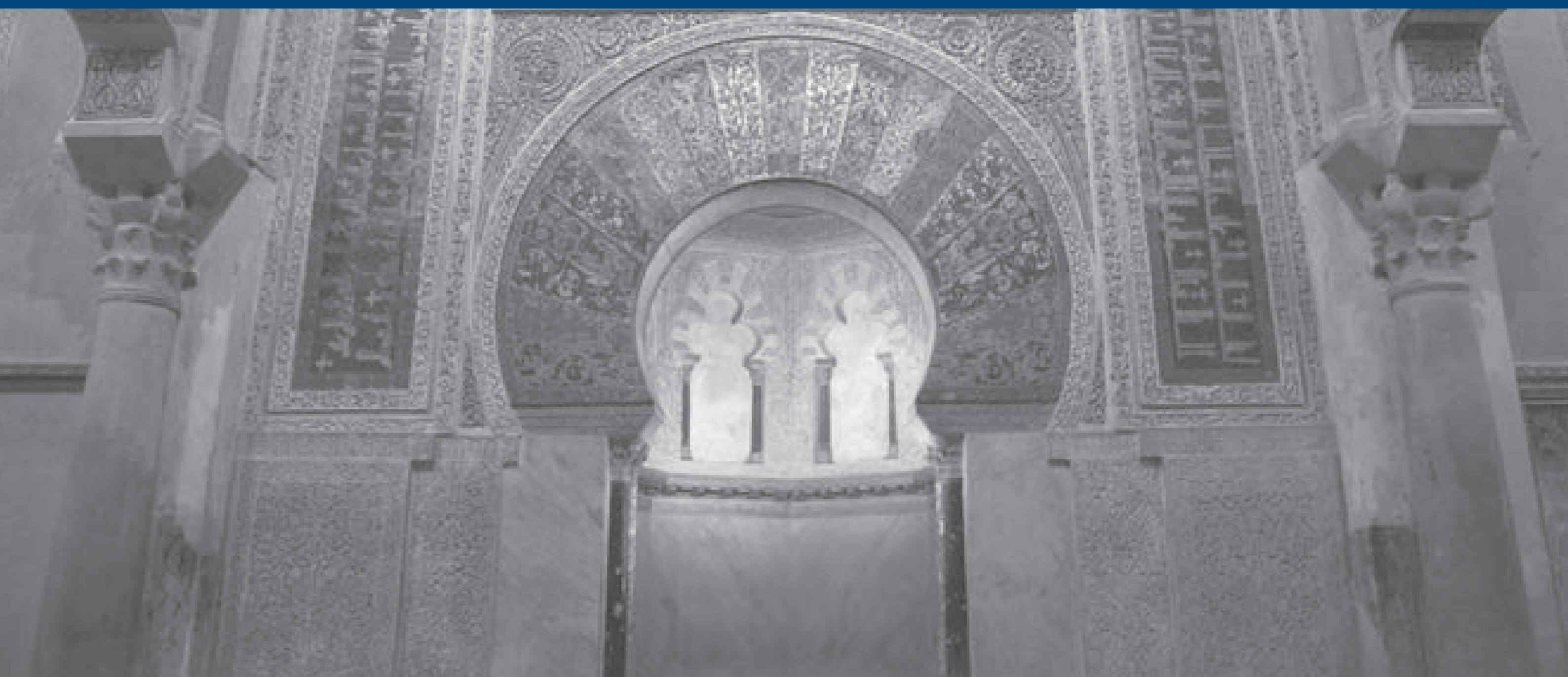
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)}$$

para $k = 1, \ldots, n = 1$ y

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n} = 1$$

CAPÍTULO 2

FUNCIONES



2.1 El concepto de función

2.1.1 Introducción

Desde la época de Galileo Galilei (1564-1642), la matemática ha ocupado un lugar de excelencia en el método científico. Uno de los más fuertes defensores de la matemática en este sentido fue el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), quien decía que no admitía ni esperaba ningún principio en física, a no ser aquellos que se explicaran mediante la geometría o la matemática abstracta. Podemos considerar que la matemática moderna nace en el siglo XVII, con la creación de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Con esto nace, también, el concepto de función, el cual es uno de los conceptos más importantes de la matemática.

La mayoría de las funciones conocidas en el siglo XVII fueron estudiadas como curvas, este fue el caso, por ejemplo, de la funciones a^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$. La gráfica de esta última, la curva senoidal, aparece en un trabajo sobre la Cicloide, del matemático francés Personne de Roberval (1602-1675). En aquel tiempo disponían de tablas de valores para las funciones trigonométricas y logarítmicas con un alto grado de aproximación, sin embargo, el concepto de función no estaba totalmente claro. Un intento de definición de función fue dada en el siglo XVII por el matemático y astrónomo escocés James Gregory, quien decía que una función era una cantidad obtenida de otras por una sucesión de operaciones algebraicas o por cualquier otra operación imaginable (esto último se refiere al "paso al límite").

La palabra función fue usada por primera vez en 1673 por el abogado, filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a quien se le deben también los términos variable, constante y parámetro. Leibniz no solo es parte de la historia de la matemática por la creación del cálculo, quien junto con Newton comparte ese honor, sino también fue un importante filósofo; asimismo, a él se le atribuye el invento de la calculadora mecánica, la cual era una versión perfeccionada de la máquina de Pascal.

En la actualidad, el concepto de función ya es una noción muy depurada; sin embargo, las funciones interpretadas como "fórmulas", "expresiones matemáticas" o bien como "gráficas", siguen teniendo vigencia; pero, debe dárseles su justo lugar, reconociéndoles su bondades o ventajas, pero también entendiendo sus limitaciones y el papel que juegan dentro del concepto general de función. Desde un punto de vista conceptual y práctico, es insuficiente concebir una función como fórmula o gráfica; una definición que goza de gran aceptación es la que la describe como la regla de asociación, que es la que adoptaremos en este libro. Este capítulo está dedicado a los aspectos teóricos de las funciones. Vale la pena hacer un esfuerzo para comprender la teoría aquí presentada, pues redundará en un buen manejo de las mismas. El capítulo 3, también está dedicado a las funciones, aunque ahí lo haremos desde un punto de vista práctico.

2.1.2 Concepto de función

Aun cuando en este libro solo manejaremos funciones de una clase especial, como lo explicaremos más adelante, es conveniente que conozcamos los elementos básicos acerca de las funciones en un contexto general.

Definición 1

Dados X, Y, conjuntos cualesquiera, una **función con dominio** X y **contradominio** Y, es toda regla de asociación que asigna a cada elemento $x \in X$ uno y solo un elemento $y \in Y$.

Así que una función es un enunciado, el cual debe decirnos a cada elemento del conjunto X qué elemento del conjunto Y se le asocia. Por lo común, a las funciones se les asignan nombres, a veces con apellido, a veces simples. Por ejemplo, podemos hablar de la función que lleva por nombre **valor absoluto**, la cual también puede llamarse ABS. Los nombres pueden ser tan simples como consistir de una sola letra de nuestro alfabeto o de otro alfabeto, por ejemplo f, g, h, F, G, H, γ, φ, Γ, incluso para los nombres de funciones pueden usarse símbolos, por ejemplo $+$, $*$ y $||$.

Para decir que f es una función con dominio X y contradominio Y, escribiremos el símbolo compuesto

$$f\colon X \to Y,$$

el cual se lee "f de X en Y".

Dada una función $f\colon X \to Y$, un elemento $x \in X$, y un elemento $y \in Y$, para simbolizar el hecho de que y es el elemento asociado a x por la función f, usaremos la flecha especial $\mapsto$ como se muestra a continuación

$$x \overset{f}{\mapsto} y \quad \text{o simplemente} \quad x \mapsto y.$$

En esta última simbolización hemos omitido el nombre de la función f , lo haremos con cierta frecuencia, siempre y cuando la notación simple no cause ambigüedad acerca de qué función estamos hablando.

Un símbolo más común que los dos anteriores es $y = f(x)$. Este se lee "y igual a f de x" y significa que la función f asigna el elemento $y \in Y$ al elemento $x \in X$. Así que los símbolos

$$y = f(x)$$

$$x \overset{f}{\mapsto} y$$

$$x \mapsto y$$

significan lo mismo: la función f asigna $y \in Y$ al elemento $x \in X$.

Ejemplo 1

Sea f la función con dominio los reales $\mathbb{R}$ y contradominio el mismo conjunto $\mathbb{R}$, tal que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna su cuadrado $x^2 \in \mathbb{R}$. Una manera abreviada de definir esta función es:

$$\text{Sea } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = x^2 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}$$

Con el símbolo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicamos el dominio, el contradominio y el nombre de la función. Con la fórmula $f(x) = x^2$ estamos enunciando abreviadamente la regla de asignación. Por ejemplo, podemos escribir

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$-3 \overset{f}{\mapsto} 9$$

Ejemplo 2

Sea h la función con dominio el intervalo $[0, +\infty)$ y contradominio $\mathbb{R}$, tal que a cada $x \in [0, +\infty)$ le asigna su raíz cuadrada. Forma abreviada:

$$\text{Sea } h:[0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ dada por } \quad f(x)=\sqrt{x} \text{ para toda } x\in[0,+\infty).$$

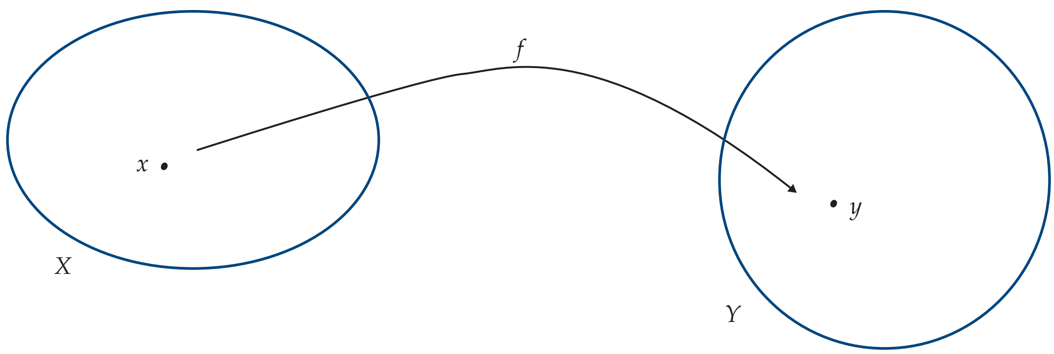
Ejemplo 3

En este ejemplo acudiremos a la expansión decimal de los números reales. Las expansiones decimales finitas son las que tienen periodo cero, por ejemplo $2.025 = 2.025000\ldots = 2.025\overline{0}$. Estos casos también admiten una expansión decimal infinita con periodo 9, en nuestro ejemplo $2.025 = 2.025\overline{0} = 2.024\overline{9}$. Si evitamos el periodo 9, todos los reales admiten una única expansión decimal (finita o infinita), la cual utilizamos para definir la siguiente función que tiene por dominio todos los reales y por contradominio los enteros. La función asigna a cada real expandido decimalmente, el entero correspondiente a su primer decimal. Este último enunciado es propiamente la función. Aun cuando no le asignemos nombre, tenemos correctamente definida la función. Por ejemplo, esta función hace las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} 7.53 &\mapsto 5 \\ 105.7 &\mapsto 7 \\ -9.08 &\mapsto 0 \\ \pi &\mapsto 1 \\ \sqrt{2} &\mapsto 4. \end{aligned}$$

2.2 Imagen, preimagen e imagen inversa

Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera y $f: X\to Y$. Si $x\in X$ y $y\in Y$, son tales que $y=f(x)$, diremos que y es la **imagen** de x bajo f, o bien que x es **preimagen** de y. También llamaremos a y, el **valor** de f en x y diremos que f toma el valor y en x. En términos menos formales, diremos que "x va a dar a y bajo f" o que "f manda x a y". El siguiente diagrama es útil para representar los conceptos anteriores.



Si A es un subconjunto de X, la **imagen** de A bajo f es el conjunto

$$\{y \mid y=f(x) \text{ para algún } x\in A\},$$

el cual denotaremos por $f(A)$. En el caso particular $A = X$, el conjunto de imágenes de los puntos de X

$$f(X)=\{y \mid y=f(x) \text{ para algún } x\in X\}$$

que hemos llamado la imagen de X bajo f, también recibirá el nombre especial de **imagen de la función** f (algunos autores le llaman **rango** de f). Así que tenemos dos maneras de referirnos al conjunto $f(X)$: la imagen de X bajo f y también la imagen de f.

Por otra parte, si M es un subconjunto del contradominio Y, llamaremos **imagen inversa** de M bajo f al conjunto

$$f^{-1}(M) = \{x \in X \mid f(x) \in M\}.$$

El símbolo $f^{-1}(M)$ se lee "imagen inversa de M" y de ninguna manera debe leerse "f a la menos uno" o "f inversa de M", pues el superíndice $^{-1}$ no representa un exponente, ni en este caso f^{-1} representa una función inversa, concepto del que hablaremos más adelante.

Observemos que la imagen de un conjunto A bajo una función $f\colon X \to Y$, es un subconjunto del contradominio Y, mientras que la imagen inversa de un conjunto M bajo una función f es un subconjunto del dominio X de f.

Por definición, una función $f\colon X \to Y$ es una regla de asociación f, que asigna a cada elemento de su dominio X un único elemento de su contradominio Y. En términos un poco más estrictos, una función $f: X \to Y$ es la terna (X, Y, f), donde X es el dominio de la función, Y el contradominio y f la regla de asignación. Al interpretar las funciones como ternas, podemos distinguir dos funciones que, por ejemplo, tienen la "misma regla" de asignación, pero diferente dominio. En general, dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo contradominio y la misma regla de asignación. Dos funciones son diferentes si al menos difieren en uno de estos tres elementos. Dos funciones pueden tener el mismo dominio y el mismo contradominio, pero no ser la misma función por tener diferente regla de asignación. Un caso relativo de menor interés es cuando tenemos dos funciones con el mismo dominio y la misma regla de asignación, pero son diferentes por tener distinto contradominio. Por ejemplo,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ y } g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

cuyos valores están definidos por las fórmulas

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^2 \text{ para toda } x \in \mathbb{R},$$

son funciones diferentes, pues no obstante que tienen el mismo dominio y la misma regla de asignación, su contradominio es diferente.

Por lo común resulta irrelevante cuál es el contradominio de una función; pero habrá ocasiones en las que sí sea importante especificar el contradominio, tal será el caso cuando estudiemos el concepto de función inversa en una sección posterior.

2.3 Funciones reales de una variable real

A una función cuyo dominio sea un subconjunto de los números reales, la llamaremos **función de variable real**. A una función cuyo contradominio sea un subconjunto de los reales, es decir, una función cuyos valores sean números reales, la llamaremos **función real**. Así que con el término *función real de variable real* nos referiremos a una función cuyo dominio es un subconjunto de los

números reales, y que toma valores reales. En este texto estudiaremos funciones reales de variable real.

Si deseamos establecer con precisión los resultados del cálculo, resulta muy conveniente entender las funciones como reglas de asociación y distinguir los valores de la función de la función misma; es decir, distinguir $f(x)$ de f. Vale la pena insistir en que el símbolo $f(x)$ representa el valor de la función f en el punto x. En ocasiones, el símbolo $f(x)$ puede representar una fórmula mediante la cual se definen los valores de la función f para todos los puntos x de su dominio o para los puntos de algún subconjunto de su dominio, pudiéndose tener entonces diferentes fórmulas para diferentes subconjuntos, pero para valores específicos de x no olvidemos que $f(x)$ representa un número.

El símbolo $f(x)$ fue introducido por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), quizá el más prolífico de todos los tiempos. Es probable que Euler no imaginó la enorme utilidad que tendría su notación, y seguramente no tenía la intención de distinguir entre lo que es la función f y su valor $f(x)$ en un punto arbitrario x, pues en su época las funciones no se concebían en la forma en la que lo hacemos ahora. En aquella época, las funciones eran las fórmulas mismas, las cuales, en la actualidad, solo son un recurso para definirlas, ni siquiera se permitían tener funciones definidas por varias fórmulas, mucho menos se podían aceptar enunciados 100% verbales para definirlas, esto es posible hoy en día por el carácter general que ahora le concedemos al concepto de función.

Dado que usualmente los valores de las funciones reales de variable real están dadas por una única fórmula, haremos, de una vez para siempre, la importantísima convención de que si no se indica explícitamente el dominio y el contradominio de una función f cuando la estemos definiendo mediante una fórmula, entonces entenderemos que el dominio consistirá precisamente de todos los números reales para los cuales aplique "la fórmula". Por otra parte, el contradominio de la función se sobreentenderá que consiste de todos los números reales. De esta manera, tendremos una forma abreviada de definir nuestras funciones en cálculo, sin embargo, no debemos olvidar que se trata de una mera convención, no estamos renunciando a nuestro concepto original de función, este permanece. Por tanto, también prevalece la diferencia entre lo que es propiamente una función f y su valor $f(x)$ en un punto de su dominio x. Así pues, con esta convención definiremos nuestras funciones mediante enunciados como el siguiente:

"Sea f la función dada por $f(x) = \dots$"

o quizá, simplificaremos este enunciado como

"Sea la función $f(x) = \dots$"

En este último enunciado estamos abusando un tanto del lenguaje, por lo que ampliaremos nuestra convención, con tal enunciado estaremos proporcionando el nombre de la función, en este caso f, y la fórmula $f(x) = \dots$ que describe la regla de asignación. Pero no está por demás aclarar que la función no es esa fórmula.

Ejemplo 4

Sea la función f dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Según hemos convenido, esta función está definida para todos los reales x donde aplica la fórmula $\sqrt{1 - x^2}$; es decir, el dominio consiste de todos los reales que satisfacen la condición $1 - x^2 \geq 0$. Esto significa que x debe satisfacer $x^2 \leq 1$. Los reales x que cumplen esta condición son precisamente los reales del intervalo $[-1, 1]$. Así

que el dominio de f es el intervalo $[-1, 1]$. El contradominio, también por convención, es el conjunto de los reales $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5

Sea la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$. La función se llama g y su dominio es el conjunto de reales donde aplique la fórmula.

Veamos dónde aplica la fórmula que define g. La raíz cuadrada $\sqrt{4 - x^2}$ está definida para los reales x que satisfacen $0 \leq 4 - x^2$, es decir $x^2 \leq 4$. Los reales que satisfacen esta desigualdad son precisamente los que cumplen $-2 \leq x \leq 2$, así que la raíz cuadrada $\sqrt{4 - x^2}$ aplica a todos los reales del intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Pero, esta raíz cuadrada toma el valor cero en los extremos -2 y 2, por lo que el cociente $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ solo está definido para $-2 < x < 2$, así que el dominio de g es el intervalo abierto $(-2, 2)$. El contradominio es, por supuesto, el conjunto de todos los reales, según hemos convenido.

Ejemplo 6

Sea la función $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$. Como en el ejemplo anterior, el dominio de h serán los reales x donde aplique la raíz $\sqrt{x^2 - 4}$ y además sea diferente de cero. La raíz $\sqrt{x^2 - 4}$ aplica a todos los reales x que satisfacen $0 \leq x^2 - 4$, es decir $4 \leq x^2$. Los reales que satisfacen esta desigualdad son los del conjunto formado por la unión de los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[2, +\infty)$. Pero, la raíz cuadrada $\sqrt{x^2 - 4}$ se anula en -2 y 2, por lo que el cociente $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ está definido en el conjunto $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Esta unión de intervalos es el dominio de h.

2.4 Gráfica de una función

La **gráfica** de una función $f : X \to Y$ es el conjunto de parejas ordenadas

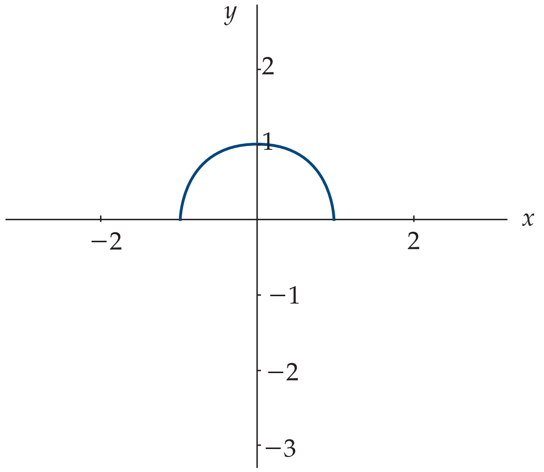
$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

La gráfica de una función $f : X \to Y$ es un conjunto; es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. La gráfica está definida para todas las funciones en general, sin importar su naturaleza; en el caso particular de funciones de variable real con valores reales, es posible representar las parejas ordenadas $(x, f(x))$ mediante puntos en un plano, tomando como referencia un sistema de ejes coordenados. Entonces, para funciones reales de variable real, la gráfica admite una representación como conjunto de puntos del plano. En sentido estricto, la gráfica es un conjunto de parejas ordenadas de números reales, pero en este caso se identifica con un objeto geométrico, al cual podemos llamar gráfica geométrica de la función. Dado que la gráfica geométrica de una función es un excelente recurso para analizar, entender y explicar propiedades de la función, abu-

saremos del lenguaje y usualmente nos referiremos a ella como la gráfica de la función. Así pues, la gráfica de una función entonces también será, un conjunto de puntos del plano; a dicho conjunto lo llamamos **curva**, independientemente del aspecto que tenga. Por ejemplo, hay curvas formadas por segmentos de rectas, en cuyo caso las llamamos **curvas poligonales**. También hay curvas formadas por líneas curvilíneas y segmentos de rectas o incluso por conjuntos de puntos más complicados.

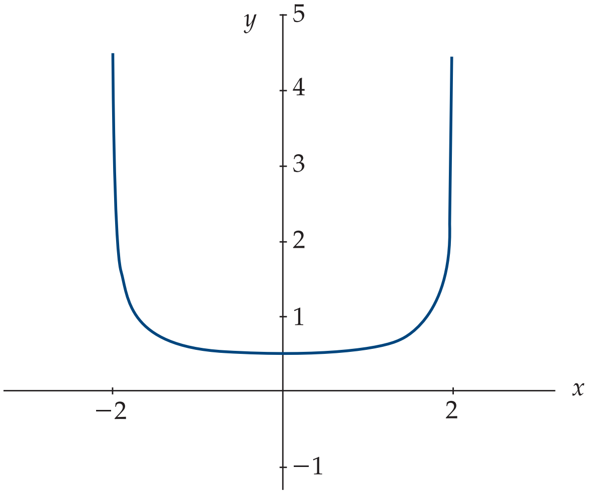
Ejemplo 7

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ se ilustra en la siguiente figura.



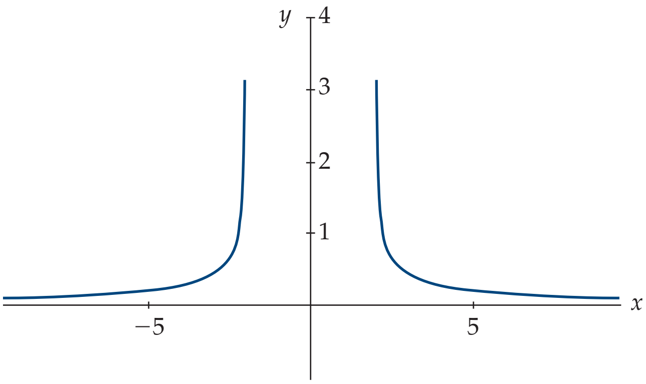
Ejemplo 8

La función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$, cuyo dominio es el intervalo abierto $-2 < x < 2$, tiene la gráfica que se ilustra a continuación.



Ejemplo 9

En la siguiente figura se ilustra la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ del ejemplo 5, cuyo dominio es la unión de dos intervalos $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.



La gráfica como conjunto de puntos del plano es un objeto geométrico ideal; en ocasiones, no es posible dibujar dichos puntos o quizá no podamos ni siquiera imaginarlos. El **cálculo diferencial** proporciona herramientas poderosas que nos ayudan a entender cómo es el aspecto de la gráfica de una función dada. Estas herramientas son recursos que nos permiten hacer estudios cualitativos de las gráficas como objetos geométricos. En principio, es imposible tener la gráfica de una función, debido a que, como se dijo antes, es un objeto ideal, pero en ocasiones podemos tener buenas aproximaciones geométricas de estos objetos matemáticos. En los capítulos 6 y 7 se incluyen algunas gráficas interesantes.

Ejemplo 10

Función valor absoluto

Sea la función ABS : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$$\text{ABS}(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} \text{ABS}(-2) &= 2 \\ \text{ABS}(3) &= 3 \\ \text{ABS}(1 - \sqrt{5}) &= \sqrt{5} - 1. \end{aligned}$$

Esta función recibe el nombre de **función valor absoluto** y su valor en todo real x, también será denotado por $|x|$, es decir

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como sabemos, la raíz cuadrada $\sqrt{}$ solo se aplica a números positivos o al cero. La raíz cuadrada de cero es cero, pero es una convención en matemáticas que el símbolo de la raíz cuadrada $\sqrt{}$, cuando se aplica a un número positivo, denota un real positivo. Recordemos que todo número a

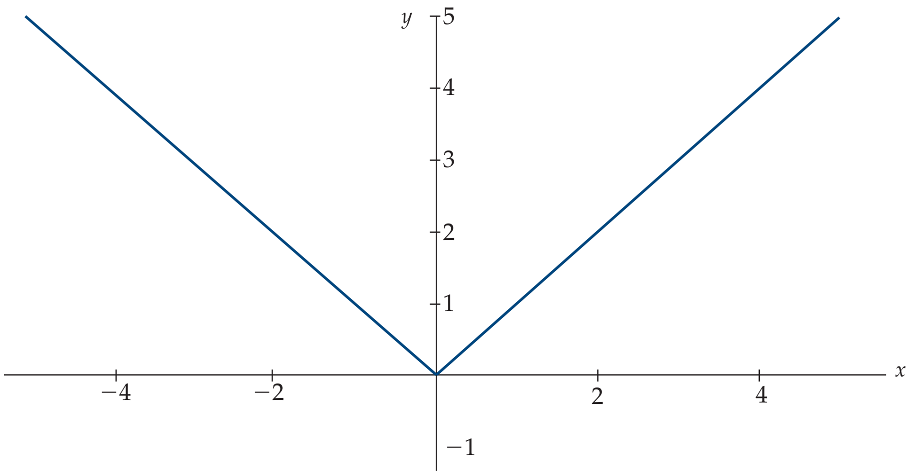
positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y una negativa, pero el símbolo $\sqrt{a}$ se reserva para representar solo la raíz positiva.

Dado el significado del símbolo $\sqrt{a}$, como ya lo hemos estudiado en el capítulo 1, tenemos que en general no es válido escribir $\sqrt{x^2} = x$.

Esta igualdad solo es válida cuando x es positiva o cero. Si x es negativa, tenemos $\sqrt{x^2} = -x > 0$. Así que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Entonces esta fórmula es otra manera de representar la función valor absoluto, la cual será de utilidad más adelante.



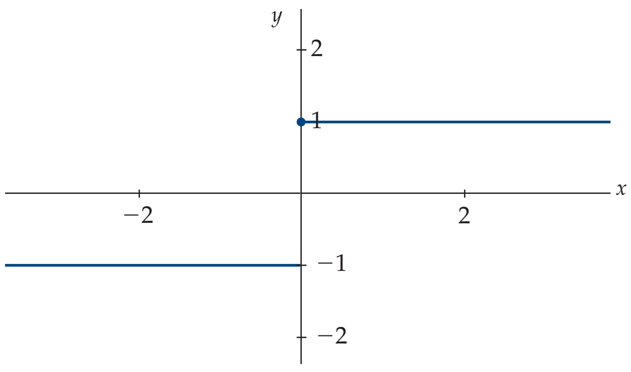
Ejemplo 11

Función de Heaviside

Sea U la función con dominio los reales, tal que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna -1 si x es negativa y le asigna 1 si x es positiva o cero. Manera abreviada:

$$\text{Sea } U: R \to R \text{ dada por } U(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función la llamaremos de Heaviside, y su gráfica se muestra a continuación.



Ejemplo 12

Función parte entera

Sea la función con dominio $\mathbb{R}$ y contradominio $\mathbb{Z}$ (los enteros), tal que a cada real le asigna la parte entera de su expansión decimal. Esta función queda definida aun cuando no le hayamos dado un nombre; no es necesario darle nombre, pero es muy conveniente bautizarla con uno, por lo cual la llamaremos **función parte entera**. Algunos ejemplos de los valores de esta función son

$$2.5 \overset{\text{parte entera}}{\mapsto} 2$$
$$\sqrt{5} \overset{\text{parte entera}}{\mapsto} 2$$
$$\pi \overset{\text{parte entera}}{\mapsto} 3$$

Para simplificar la notación, escribiremos la parte entera de un número x por el símbolo $[x]$. Podemos denotar, entonces, a la función misma por el símbolo [ ], de manera que podemos definir la función parte entera de manera abreviada como sigue.

Sea la función

$$[\ ] : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z} \text{ dada por}$$
$$x \mapsto [x] : \text{parte entera de } x.$$

En la definición justamente dada de la función parte entera hemos acudido explícitamente a la expansión decimal de los reales; ello requiere la convención establecida en el ejemplo 3 de este capítulo, que consiste en evitar las expansiones decimales con periodo 9. También hemos acudido a la concepción intuitiva de lo que significa parte entera de un real, la cual podríamos describir como el real que resulta después de "borrarle" la parte decimal. Sin embargo, se presenta una dificultad adicional que se refiere al tratamiento que le daremos a los reales negativos. La definición que presentamos a continuación prescinde de las expansiones decimales, aplicará a todos los reales positivos y negativos, pero para estos últimos la definición de parte entera de un real no coincide con la idea intuitiva. La ventaja de esta definición, además de que es precisa, es que prescinde del concepto de expansión decimal y algo que es más importante, la gráfica tiene un mejor aspecto. Veamos pues la definición rigurosa

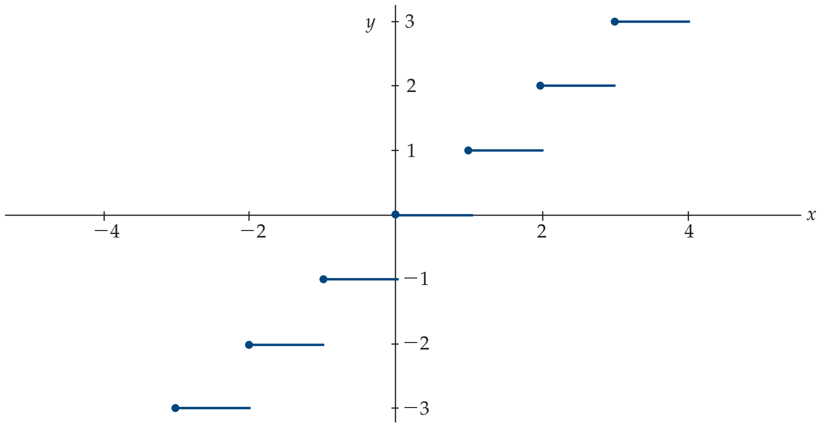
> La parte entera de un real x es el mayor entero menor o igual que x.

Dicho en otras palabras, es el mayor de todos los enteros que son menores o iguales que x. En términos geométricos podemos decir que la parte entera de un real x coincide con x, si este es un entero. Si x no es entero entonces la parte entera es el entero más próximo que se encuentra a su izquierda.

Entonces tenemos

$$[\pi] = 3$$
$$[-\pi] = -4$$
$$[-7.99] = -8.$$

La gráfica de esta función se ilustra en la siguiente figura.



Ejemplo 13

Función parte decimal

Sea la función $(\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que a cada real x le asigna la parte decimal de su expansión decimal, por lo que se le llama **función parte decimal**. Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} 5.1 &\mapsto 0.1 \\ \frac{1}{4} &\mapsto 0.25 \\ \sqrt{2} &\mapsto \sqrt{2} - 1 = 0.4142\ldots \\ \pi &\mapsto \pi - 3 = 0.14159\ldots \end{aligned}$$

También podemos escribir

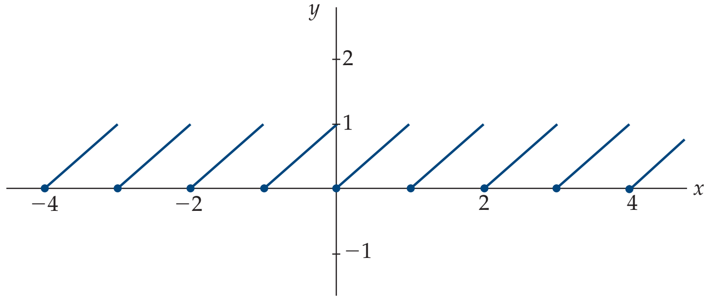
$$\begin{aligned} (5.1) &= 0.1 \\ \left(\frac{1}{4}\right) &= 0.25 \\ \left(\sqrt{2}\right) &= \sqrt{2} - 1 \\ (\pi) &= \pi - 3. \end{aligned}$$

Observe que es posible obtener la parte decimal de un número restando al número su parte entera; de esta forma, tenemos la siguiente relación entre ambas funciones

$$(x) = x - [x].$$

¿Cuál es la parte decimal de -3.57?, ¿Cuál es la parte decimal de un real negativo?

En la figura de abajo se ilustra la gráfica de la función parte decimal.



Ejemplo 14

Función primer decimal

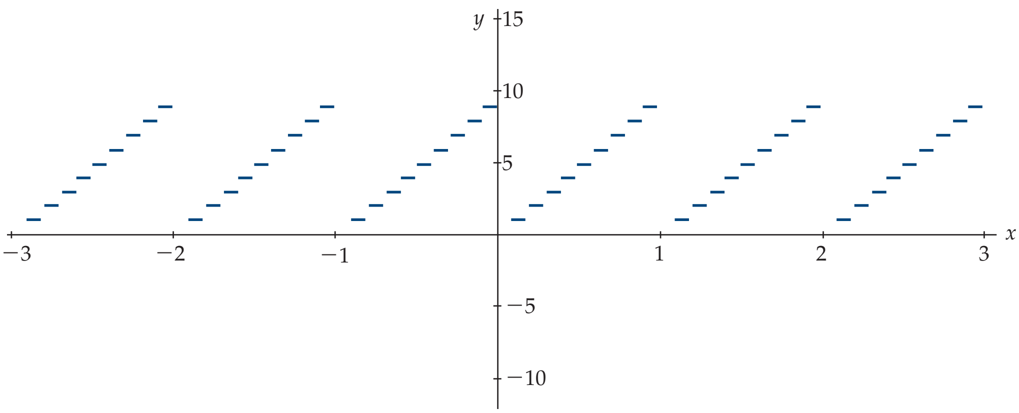
La función de este ejemplo ya la hemos visto en el ejemplo 3, ahora la retomamos y la estudiamos con otros recursos. Sea la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que a cada real x le asigna el primer decimal de su expansión decimal. Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} 5.1 &\mapsto 1 \\ \frac{1}{4} &\mapsto 2 \\ 1.4142 &\mapsto 4 \\ \sqrt{2} &\mapsto 4 \\ \pi &\mapsto 1 \, . \end{aligned}$$

Esta función también la podemos definir como sigue: Sea la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = [10(x - [x])],$$

en donde $[a]$ representa la parte entera del real a. La gráfica de la función del primer decimal aparece en la siguiente figura.



2.5 Composición de funciones

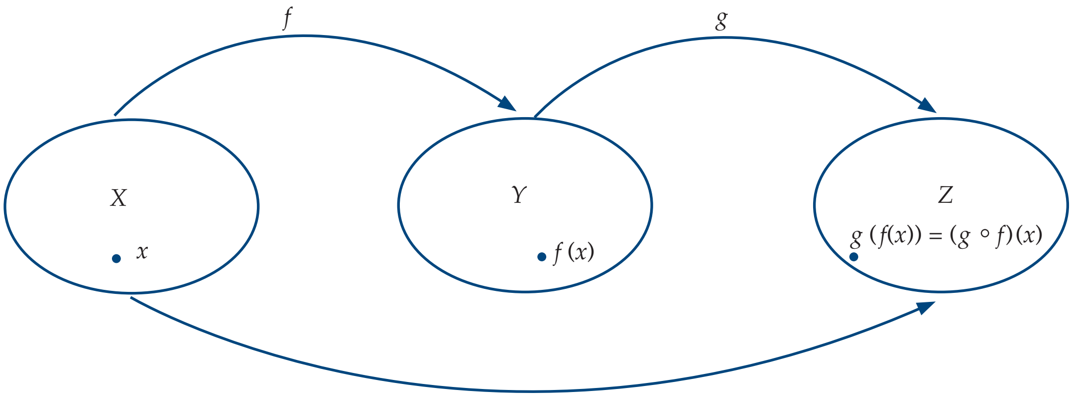
La composición de funciones es una operación que, se aplica a pares de funciones, sin importar su naturaleza, siempre y cuando las funciones cumplan con las condiciones apropiadas. Si f y g son dos funciones arbitrarias, para definir su composición $g \circ f$, vamos a requerir que los valores $f(x)$ de la función f sean elementos del dominio de g. Esto lo establecemos en la siguiente definición.

Definición 2

Sean X, Y y Z tres conjuntos y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones. La **composición** de f y g es la función $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$.
A $g \circ f$ también la llamaremos la **función compuesta** por f y g. Observe que el hecho de que la función compuesta $g \circ f$ esté definida, no significa que también esté definida la función $f \circ g$,

para esta última se requiere que los valores $g(x)$ de g sean elementos del dominio de f. Para que ambas funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$ estén definidas se requiere $Z = X$, es decir, la funciones f y g deben ser de la forma $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$.

La composición de funciones es una operación muy importante en matemáticas, pues hace crecer nuestros recursos para construir funciones, pero debe cuidarse que las funciones cumplan las condiciones que permita componerlas. El símbolo $g \circ f$ también se lee "f seguida de g". En la siguiente figura se muestra un diagrama que ilustra la composición $g \circ f$.



Ejemplo 15

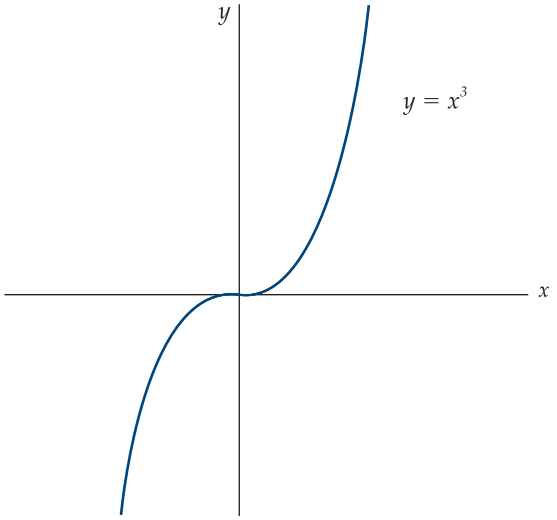
Sea la función valor absoluto $f(x) = |x|$ y sea la función $g(x)=x^3$. En este caso podemos componer las funciones de dos maneras $f \circ g$ y $g \circ f$. Las funciones que resultan son

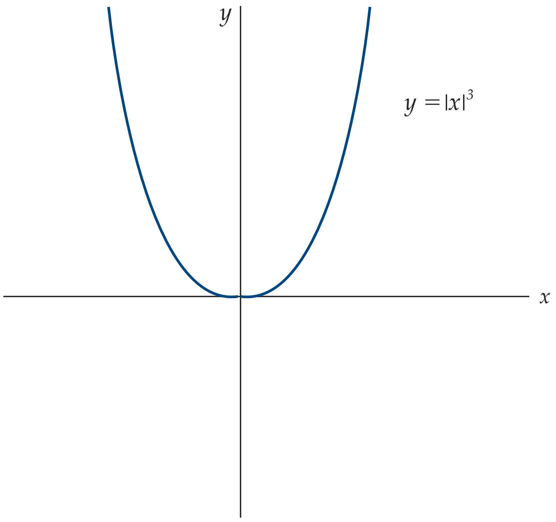
$$(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = |x^3|$$

y

$$(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = |x|^3.$$

Dado que $|x^3| = |x|^3$, tenemos que $f \circ g = g \circ f$. Sin embargo, este no siempre es el caso. En la figura que sigue se muestran las gráficas de ambas funciones de $g(x) = x^3$ y $(g \circ f)(x) = |x|^3$.





Ejemplo 16

Sean $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$; ambas funciones están definidas en todos los reales $\mathbb{R}$ y su contradominio también es $\mathbb{R}$, es decir son funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tenemos entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 + g^2(x)} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1 + x^2)^2 + 1}}{1 + x^2}$$

Por otra parte, tenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{1 + x^2}\right) = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{1 + x^2}\right)^2} = \frac{1}{1 + 1 + x^2} = \frac{1}{2 + x^2}$$

Así que $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones diferentes.

Ejemplo 17

Sean $f(x) = 1 + x^4$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Tenemos $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ y $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. La composición $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 + x^4}\,,$$

mientras que la función compuesta $f \circ g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ está dada por

$$(f \circ g)(x) = 1 + (g(x))^4 = 1 + (\sqrt{x})^4 = 1 + x^2.$$

Así que $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones diferentes. Observe que pudimos haber escrito $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, pero en este caso era mejor considerar g: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, para que el dominio de f coincida con el contradominio de g.

Ejemplo 18

Sean $f(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. En este caso tenemos $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ y $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, así que la composición $f \circ g : [0, +\infty) \to (-\infty, 0)$, está dada por

$$(f \circ g)(x) = -\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{1 + x}\,.$$

Pero no existe la composición $g \circ f$. Si tratamos de construir esta función formalmente obtendremos la fórmula

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{-\frac{1}{1 + x^2}}\,,$$

que no aplica a número real alguno.

Ejemplo 19

Sean las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} - 1$ y $g(x) = -\sqrt[4]{x} - 1$. Estas funciones son del tipo $[0, +\infty) \to (-\infty, 0)$, por lo que ninguna de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ está definida.

Ejemplo 20

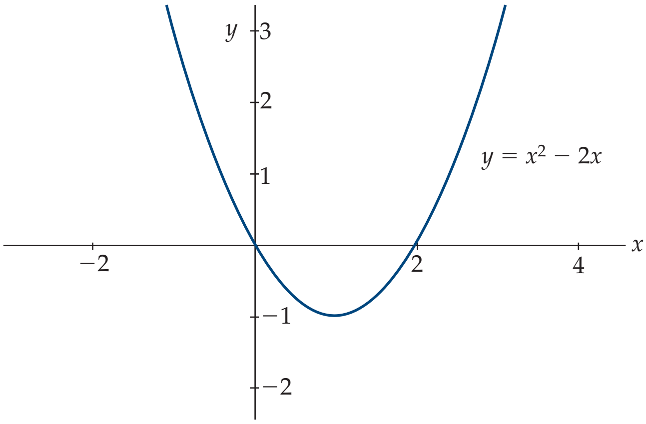
Sean las funciones $f(x)=(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Calculemos formalmente las composiciones

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 2g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} = x - 2\sqrt{x}$$

y

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 2x}$$

Según hemos convenido sobre los dominios de las funciones cuando están definidas por fórmulas, tenemos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Pero, puesto que algunos de los valores de la función f son negativos, la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ no está definida, aunque sí lo está la función $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Esta función que obtuvimos formalmente tiene por dominio los reales x que satisfacen $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq 0$, que son precisamente los que pertenecen a la unión de intervalos $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.



La función $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ puede verse como la composición de las funciones $f\colon (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $f(x) = x^2 - 2x$ y la función $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{x}$.
Uno de los conceptos y recursos más poderosos para el estudio de las funciones es el de función

2.6 Función inversa

inversa. Con este no solo ampliaremos nuestro inventario de funciones sino también ampliaremos nuestras técnicas para el tratamiento de las mismas. Para definir el concepto de función inversa vamos a necesitar otros conceptos que estudiaremos a continuación.

2.6.1 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Consideremos las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas como

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Hay diferencias cualitativas importantes entre estas dos funciones. Una es que para la función f hay pares de puntos donde toma el mismo valor, por ejemplo $f(-1) = 1$ y $f(1) = 1$. De hecho hay una infinidad de pares de puntos donde f toma el mismo valor $f(-a) = f(a) = a^2$. En el caso de la función g, esto no ocurre, es decir, siempre que se tomen dos puntos diferentes de su dominio $\mathbb{R}$, digamos a y b, los valores $f(a)$ y $f(b)$ serán diferentes. Una función con esta característica se dice que es **inyectiva**. La función g es inyectiva, la función f no lo es. Por otra parte, observemos que las dos funciones, f y g, tienen como dominio y contradominio el conjunto $\mathbb{R}$; la función f solo toma valores no negativos, es decir, hay elementos del contradominio que no son valores de la función; por ejemplo, -1 no es un real que pueda ser tomado por la función, es decir, no es un valor de f. Por su parte, la función g toma como valor todo elemento de su contradominio. Una función como g se dice que es **suprayectiva**. La función f no es suprayectiva. A continuación precisamos estos conceptos.

Definición 3

Sea $f\colon X \to Y$ una función arbitraria.

1. Se dice que f es **inyectiva** o **uno a uno**, si puntos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes; es decir, si siempre que se tenga $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$. Una manera equivalente de enunciar esta condición es: si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces necesariamente $x_1 = x_2$.
2. Se dice que f es **suprayectiva** o **sobre**, si cada elemento de su contradominio es imagen de al menos un elemento de su dominio. Es decir, si para cada $y \in Y$ existe al menos un $x \in X$, tal que $y = f(x)$.
3. Se dice que f es **biyectiva**, si es inyectiva y suprayectiva al mismo tiempo.

En forma breve podemos decir que f es suprayectiva si su imagen es todo su contradominio, es decir, si $f(X) = Y$. Por otra parte, que f no sea suprayectiva significa que existe $y \in Y$, para la cual no existe $x \in X$ que cumpla $y = f(x)$. Dicho de otro modo, f no es suprayectiva si existe $y \in Y$, tal que $y \neq f(x)$ para toda $x \in X$. Una función $f\colon X \to Y$ que no es suprayectiva, “esencialmente puede hacerse” suprayectiva redefiniendo su contradominio, haciéndolo igual a su imagen:

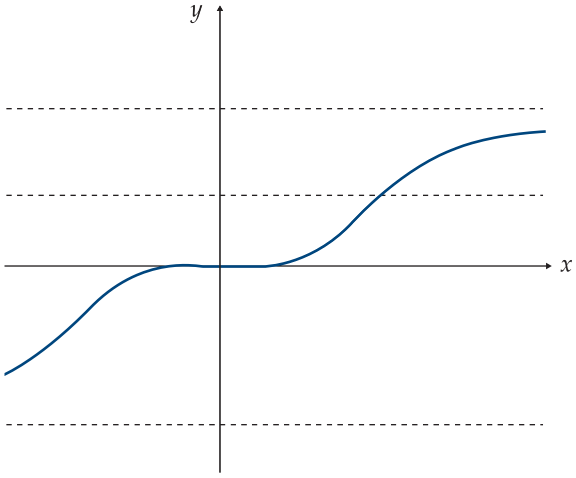
$$f\colon X \to f(X).$$

Sin embargo, en términos estrictos esta función es diferente de la original $f\colon X \to Y$, pues tiene diferente contradominio, aunque posee lo esencial de ella que es el dominio y la regla de asignación.

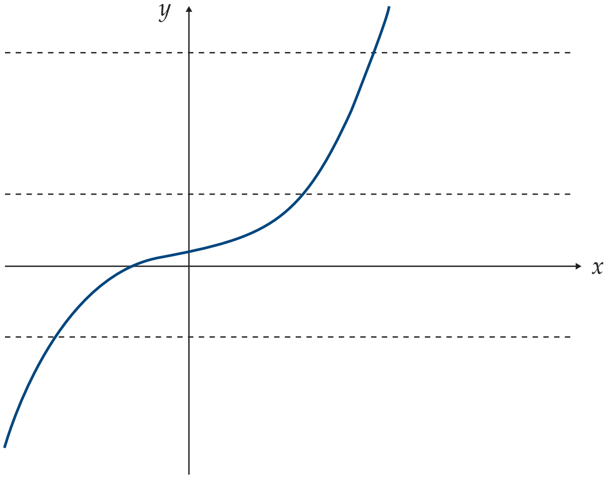
En términos de las gráficas de funciones reales de variable real podemos interpretar geométricamente inyectividad y la suprayectividad.

Que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ sea inyectiva significa que no hay recta horizontal que corte a la gráfica en más de un punto; dicho de otra manera, dada cualquier recta horizontal, o bien no corta a la gráfica o la corta en un solo punto. Que una función sea no inyectiva significa que existe al menos una horizontal que corta a la gráfica en más de un punto. Que una función

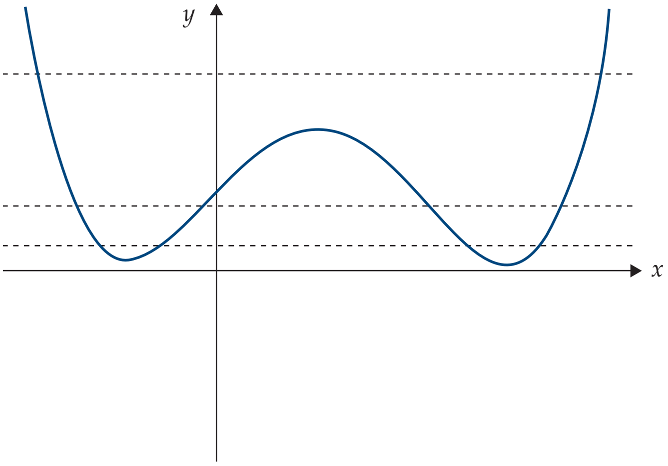
f: $A \to \mathbb{R}$ sea suprayectiva significa que sus valores cubren todos los reales; en este caso, toda horizontal cortará a la gráfica en al menos un punto. En las siguientes figuras, las líneas punteadas son horizontales que ilustran lo antes descrito.



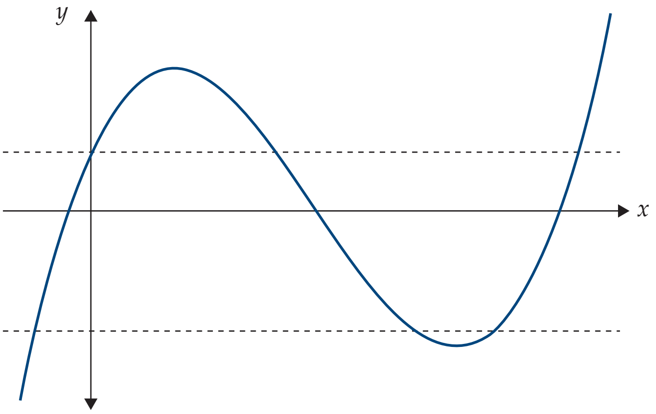
Inyectiva-No suprayectiva



Inyectiva-Suprayectiva



No inyectiva-No suprayectiva



No inyectiva-Suprayectiva

Ejemplo 21

La función f dada por $f(x) = x$ es biyectiva trivialmente. Recordemos que nuestra convención para estos casos es que $\mathbb{R}$ siempre será considerado como el contradominio. El dominio dependerá de la fórmula que estemos usando para definirla. Para la función dada, el dominio también es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 22

La función f dada por $f(x) = x^3$ es inyectiva y también suprayectiva, así que es biyectiva. Probemos que f es inyectiva. Sean a y b reales tales que $f(a) = f(b)$; es decir, $a^3 = b^3$. Vamos a probar que esta condición implica $a=b$. Tenemos entonces $a^3-b^3=0$. Pero

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Esto implica que $a - b = 0$ o bien $a^2 + ab + b^2 = 0$. Si se cumple $a - b = 0$, entonces $a = b$ que es lo que deseábamos obtener. Si se cumple $a^2 + ab + b^2 = 0$, entonces de la igualdad (que obtenemos completando cuadros).

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

tenemos que

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0\,.$$

De aquí obtenemos $b = 0$ y $a + \frac{1}{2}b = 0$, entonces también $a = 0$, por tanto $a = b$. Esto prueba que f es inyectiva. En la siguiente sección analizaremos la suprayectividad.

2.6.2 Una reflexión sobre la suprayectividad y teoremas de existencia

Que $f(x) = x^3$ sea suprayectiva significa que dado cualquier real α, existe a real, tal que $a^3 = \alpha$. Esto no es otra cosa que afirmar que existe la raíz cúbica de α. Este es un hecho que con seguridad aceptamos sin ningún cuestionamiento, sin embargo, más adelante analizaremos que la existencia de la raíz cúbica de cualquier real o la existencia de la raíz de un orden arbitrario es un caso particular de una problemática más general. Por ejemplo, el problema de averiguar si la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ es suprayectiva se traduce en el problema de averiguar si la ecuación $x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = \alpha$, que también escribimos $x^3 - 2x^2 + 5x + 1 - \alpha = 0$, tiene solución para cualquier real α. Este es un problema similar al de averiguar si la ecuación $x^3 - \alpha = 0$ tiene solución, que se refiere a la existencia de las raíces cúbicas para cualquier número real α. En general, el problema de investigar si una función f es suprayectiva, se traduce en el problema de existencia de raíces de la ecuación $f(x) = \alpha$ o $f(x) - \alpha = 0$. Este problema está estrechamente relacionado con las propiedades de la funciones continuas, las cuales dependen fuertemente de la continuidad de los números reales, que hemos postulado.

Como ya lo hemos comentado antes, si una función es inyectiva, pero no suprayectiva, redefiniendo su contradominio, obtenemos una función biyectiva. Hablando en sentido estricto, lo que obtenemos es otra función que, podemos identificar con la original. En todo caso, podemos ignorar la función original y asignar el mismo nombre a la nueva función obtenida. Así que siempre que tengamos una función inyectiva, puede convenirnos mirarla como una función biyectiva con las modificaciones mencionadas.

Las funciones biyectivas son especialmente importantes, pues establecemos para ellas la siguiente definición, que es muy importante.

Definición 4

Sea $f\colon X \to Y$ una función biyectiva, su **función inversa** o simplemente la **inversa** de f, es la función $f^{-1}\colon Y \to X$ definida como sigue:

Para cada $y \in Y$, tomamos la única $x \in X$, tal que $f(x) = y$ (existe tal x por ser f suprayectiva y es única por ser f inyectiva), entonces hacemos $f^{-1}(y) = x$.

2.6.3 Funciones crecientes y funciones decrecientes

Un tipo de función especialmente importante es el de las llamadas funciones crecientes. Estas tienen propiedades asombrosamente interesantes, como veremos en el capítulo 5. Las funciones crecientes, en particular, tienen inversa, lo cual será evidente de su definición.

Definición 5

Sea A un subconjunto de los reales y f una función $f : A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **creciente** si siempre que se tengan $x, y \in A$ con $x < y$, se cumple $f(x) \leq f(y)$. Decimos que f es **decreciente** si cuando $x, y \in A$ con $x < y$, se cumple $f(x) \geq f(y)$.

Note que en la definición anterior el dominio A no necesariamente es un intervalo; puede ser, por ejemplo, la unión de dos intervalos abiertos sin puntos en común. Quizá en este momento sea irrelevante la naturaleza del conjunto, sin embargo en el capítulo 3 volveremos a recordar esta situación. También note que x y y son dos puntos del dominio A que cumplen la desigualdad estricta $x < y$, sin embargo la desigualdad que deben satisfacer los valores de f en esos puntos es no estricta. Más específicamente, cuando f es creciente se debe cumplir $f(x) \leq f(y)$ y cuando f es decreciente, es la desigualdad $f(x) \geq f(y)$ la que ha de cumplirse. Cuando se cumplen las desigualdades estrictas para los valores de las funciones, tenemos otras definiciones.

Definición 6

Sea A un subconjunto de los reales y f una función $f\colon A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **estrictamente creciente** si siempre que se tengan $x, y \in A$ con $x < y$, se cumple $f(x) < f(y)$. Decimos que f es **estrictamente decreciente** si cuando $x, y \in A$ con $x < y$, se cumple $f(x) > f(y)$.

Complementamos las dos definiciones anteriores con la siguiente definición.

Definición 7

Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es de cualquiera de los tipos creciente o decreciente, en forma estricta o no estricta, diremos que f es **monótona**. Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente diremos que es **estrictamente monótona**.

Un hecho evidente es el siguiente teorema.

Teorema

Toda función estrictamente monótona es inyectiva, por tanto, tiene inversa. En particular, toda función estrictamente creciente tiene inversa.

Ejemplo 23

Mostremos que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, es estrictamente creciente. En efecto, sean x y y reales cualesquiera tales $x < y$. Debemos probar que entonces se cumple $x^3 < y^3$, para ello factoricemos $y^3 - x^3$. Entonces tenemos

$$y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2).$$

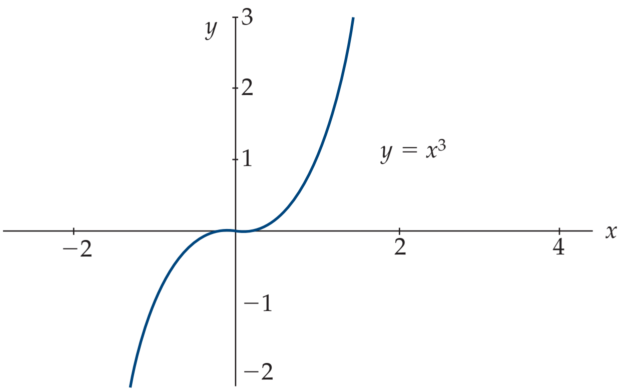
Como $y > x$, tenemos que el factor $y - x$ es positivo. Mostremos que el otro factor $x^2 + xy + y^2$ también es positivo, independientemente de los signos de x y y. El factor $x^2 + xy + y^2$ se puede escribir

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

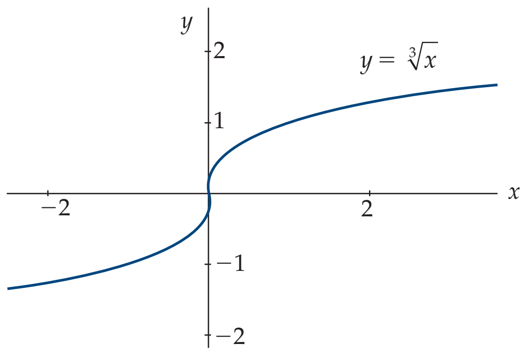
así que $x^2 + xy + y^2 \geq 0$. Observe que el miembro derecho de la expresión de arriba toma el valor cero solo cuando $y = 0$ y, por tanto, solo cuando $x = y = 0$. Pero, por hipótesis $x < y$, así que bajo esta condición siempre se tiene $x^2 + xy + y^2 > 0$. Esto prueba que cada factor del miembro derecho de la expresión $y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2)$ es positivo, por lo cual al final obtenemos $x^3 < y^3$. Esto prueba que f es estrictamente creciente.

Ejemplo 24

Dado que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, es estrictamente creciente, tiene inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La función inversa es precisamente la función **raíz cúbica** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Las gráficas de ambas funciones se ilustran a continuación.



$f(x) = x^3$



$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Ejemplo 25

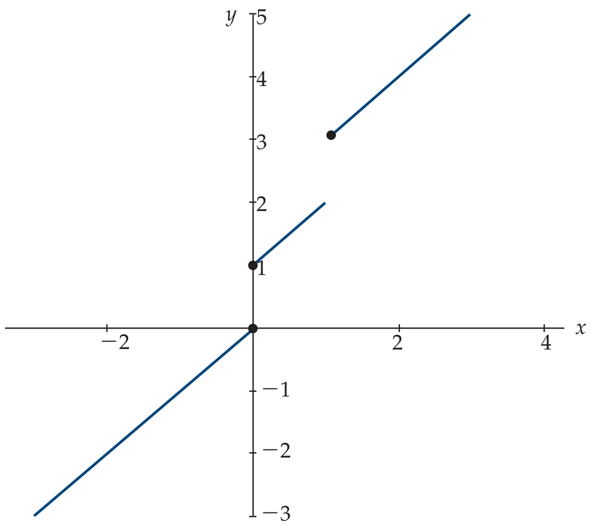
Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

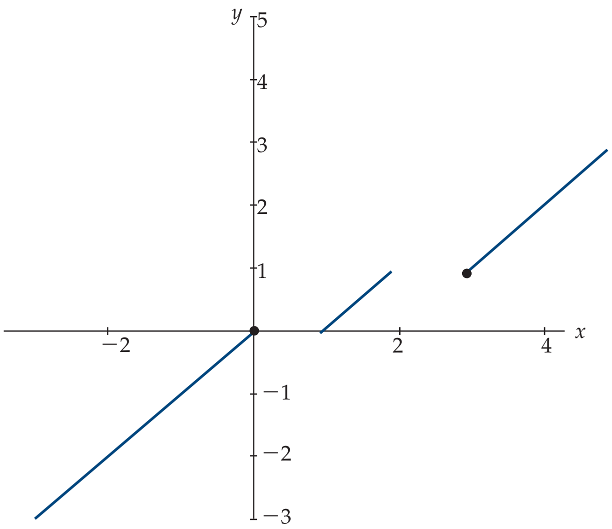
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x < -\infty \end{cases}$$

Esta función es estrictamente creciente; su función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$

En las siguientes figuras se ilustran la gráficas de ambas funciones f y f^{-1}.





Observe que el dominio de la función f, es el intervalo $\mathbb{R}$, mientras que el dominio de f^{-1} consiste de la unión de intervalos ajenos, a saber $(-\infty, 0] \cup (1, 2) \cup [3, +\infty)$. Retomaremos esta función en el capítulo 5, con el fin de ilustrar un asombroso teorema.

2.6.4 Una caracterización de la función inversa

Dada una función $f : X \to Y$ biyectiva, observemos que su función inversa $f^{-1} : Y \to X$ satisface por definición las siguientes relaciones

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda} \quad x \in X$$

y

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para toda} \quad y \in Y.$$

Invitamos al lector a que justifique con cuidado cada una de las relaciones. De hecho, estas condiciones determinan la función inversa; es decir, si $f : X \to Y$ es cualquier función para la cual conocemos $g : Y \to X$, que satisface las relaciones

$$g \circ f = I_X \text{ (identidad } X \to X)$$

y

$$f \circ g = I_Y \text{ (identidad } Y \to Y)$$

podemos estar seguros que g es la función inversa f^{-1}. Este es un teorema que formularemos y probaremos más adelante en esta sección. Mientras tanto, es importante advertir que deben cumplirse ambas relaciones, si solo se satisface una de ellas, entonces no necesariamente significa que una es la inversa de la otra.

Ejemplo 26

Sea $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, definida como $g(x) = \sqrt{x}$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ &= x.\end{aligned}$$

Así que $f \circ g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, es la función identidad $I_{[0,\ +\infty)}$, sin embargo, f no es la función inversa de g, pues

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \sqrt{x^2} \\ &= |x|.\end{aligned}$$

Cuando solo se cumple una de las igualdades $g \circ f = I_X$ o $f \circ g = I_Y$, es posible afirmar lo siguiente.

Proposición

Sean $f: X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos funciones cualesquiera, tales que $f \circ g : Y \to Y$ es la función identidad $I_y : Y \to Y$, es decir, $(f \circ g)(y) = y$ para toda $y \in Y$, entonces g es inyectiva y f es suprayectiva.

Demostración

Mostremos que g inyectiva:

Sean y_1 y y_2 elementos de Y, tales que $g(y_1) = g(y_2)$. Se tiene entonces $f(g(y_1)) = f(g(y_2))$. Pero $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ para toda $y \in Y$, por tanto, $f(g(y_1)) = y_1$ y $f(g(y_2)) = y_2$, lo cual implica $y_1 = y_2$. Esto prueba que g es inyectiva.

Mostremos que f es suprayectiva:

Elijamos un punto arbitrario y del contradominio Y de f. Como y está en el dominio de g, sea $x = g(y)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}f(x) &= f(g(y)) \\ &= (f \circ g)(y) \\ &= y\end{aligned}$$

Esto prueba que es f suprayectiva.

Como consecuencia inmediata de esta proposición tenemos.

Proposición

Si dos funciones, $f: X \to Y$ y $g : Y \to X$ satisfacen las condiciones

$$g \circ f = I_X$$

y

$$f \circ g = I_Y,$$

donde $I_X : X \to X$ e $I_Y : Y \to Y$ son las funciones identidad en X y Y, respectivamente, entonces ambas funciones, f y g, son biyectivas.

De lo anterior se sigue de manera inmediata el teorema prometido.

Teorema

Sea $f : X \to Y$ una función tal que existe otra función $g : Y \to X$ que satisface las relaciones

$$g \circ f = I_X$$

y

$$f \circ g = I_Y\ .$$

Entonces f es biyectiva y g es la función inversa f^{-1}.

La siguiente proposición es un resultado evidente.

Proposición

Si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces así lo es $f^{-1} : Y \to X$, además $(f^{-1})^{-1} = f$.

La siguiente proposición también se prueba con facilidad.

Proposición

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones biyectivas, entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es biyectiva.

Demostración

Mostremos que $g \circ f$ es inyectiva:

Sean x_1 y x_2 elementos diferentes de X. Como f es inyectiva, tenemos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por otra parte, como g es inyectiva, tenemos que $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, es decir $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$. Esto prueba que $g \circ f$ es inyectiva.

Mostremos que $g \circ f$ es suprayectiva:

Sea $z \in Z$. Como g es suprayectiva, podemos tomar $y \in Y$, tal que $g(y) = z$. Como f es suprayectiva, para la y anterior existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Para esta x se tiene, entonces, $g(f(x)) = z$, es decir, $(g \circ f)(x) = z$. Esto prueba que $g \circ f$ es suprayectiva. Hemos probado que $g \circ f$ es biyectiva.

De esta proposición concluimos que si dos funciones, f y g, tienen inversas y está definida su composición $g \circ f$, entonces esta composición tiene inversa. Esto es lo que se establece en el siguiente teorema.

Teorema

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones biyectivas. Entonces, la composición $g \circ f : X \to Z$ tiene inversa $(g \circ f)^{-1} : Z \to X$ y está dada por

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Es decir

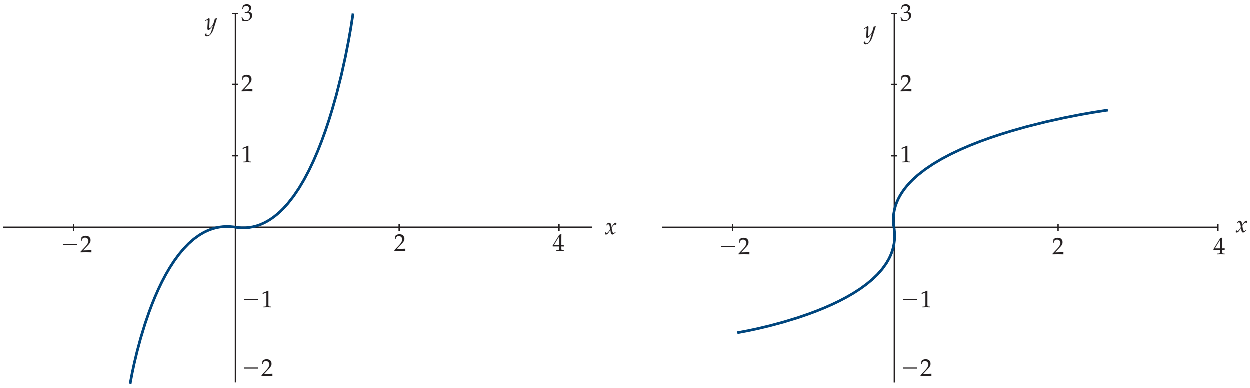
$$(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$$

para toda $z \in Z$.

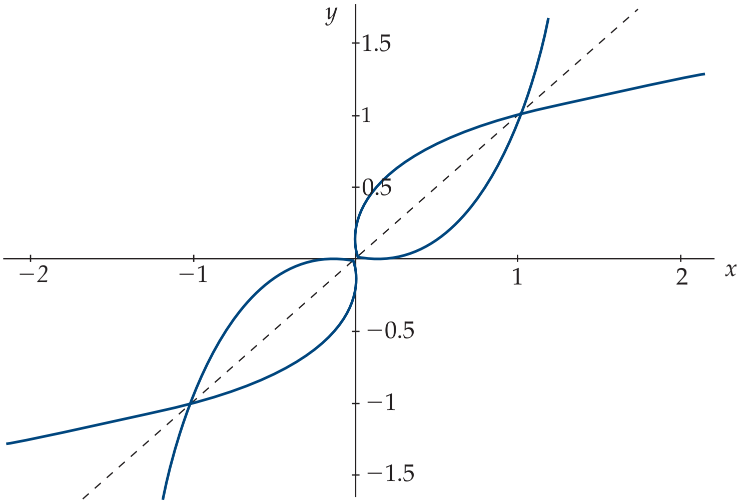
La gráfica de la función inversa se relaciona de manera muy interesante con la gráfica de la función original; ese será nuestro siguiente tema.

2.6.5 Gráfica de la función inversa

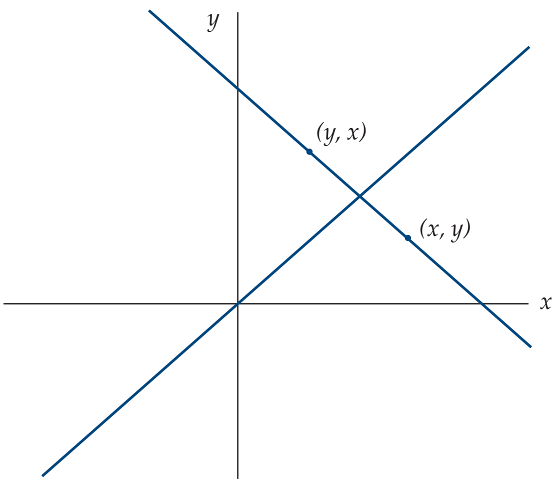
En el ejemplo 23 mostramos las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, las cuales son mutuamente inversas



Grafiquemos ambas funciones en un mismo sistema de referencia.



Observemos la simetría que guardan ambas gráficas respecto de la recta $h(x) = x$. La razón de esto es muy simple: si un punto (x, y) pertenece a la gráfica de una función $f\colon X \to Y$, entonces el punto (y, x) pertenece a la gráfica de su inversa $g : Y \to X$:



Así que el simétrico, respecto de la recta $h(x) = x$, de cada punto de la gráfica de f es un punto de la gráfica de g y viceversa, el simétrico de cada punto de la gráfica de g es un punto de la gráfica de f. Por tanto, las gráficas son simétricas respecto de la recta que forma un ángulo de 45° con el semieje positivo de las abscisas.

Una manera práctica de obtener la gráfica de la inversa de una función f es observando la de f a través de un papel traslúcido e intercambiando los papeles de los ejes de coordenadas. El eje de las ordenadas para f tomará el papel del eje de las abscisas para g.

2.7 Tablas de valores y funciones definidas mediante tablas

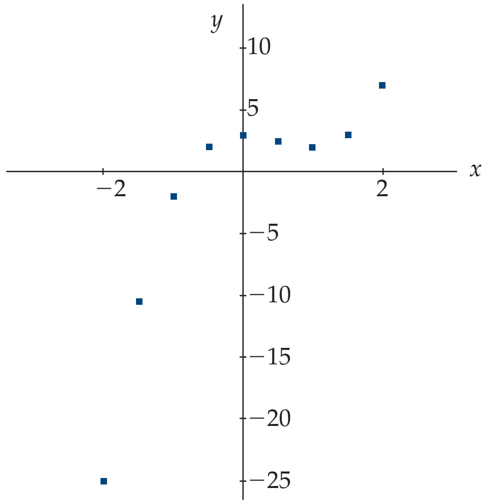
Uno de los recursos más utilizados para estudiar funciones es la tabulación, la cual consiste en calcular los valores de la función objeto de estudio, en un subconjunto finito de puntos de su dominio. Estos valores suelen presentarse en forma de tabla y, por lo general, se utilizan, junto con otros recursos de cálculo diferencial, para esbozar con lápiz y papel la gráfica de la función. Cuando este es el objetivo, los puntos deben elegirse cuidadosa y convenientemente; son, por lo regular, puntos especiales, no necesariamente enteros.

Podría pensarse que, dado que en la actualidad se tiene acceso a poderosas computadoras personales de escritorio o portátiles, las tablas de valores y las herramientas que nos proporciona el cálculo diferencial, para estudiar las propiedades cualitativas de las funciones, pierden importancia. Sin embargo, las gráficas de funciones son, en ocasiones, de una naturaleza tan complicada, que aun las más poderosas computadoras son incapaces de revelárnoslas. Además, la construcción de una tabla de valores de una función no necesariamente tiene como objetivo esbozar la gráfica de la función, de hecho una tabla de valores puede ser la función misma, es decir, un tabla de valores puede ser la manera de proporcionar los valores de la función en todos los puntos de su dominio. Otro caso en donde la tabla de valores de una función es muy importante es el de los datos experimentales. Puede ocurrir que la función que describe un determinado sistema sea conocida solo en un conjunto finito de puntos, valores que se obtienen a través de mediciones experimentales o recolección de datos. Veamos algunos ejemplos.

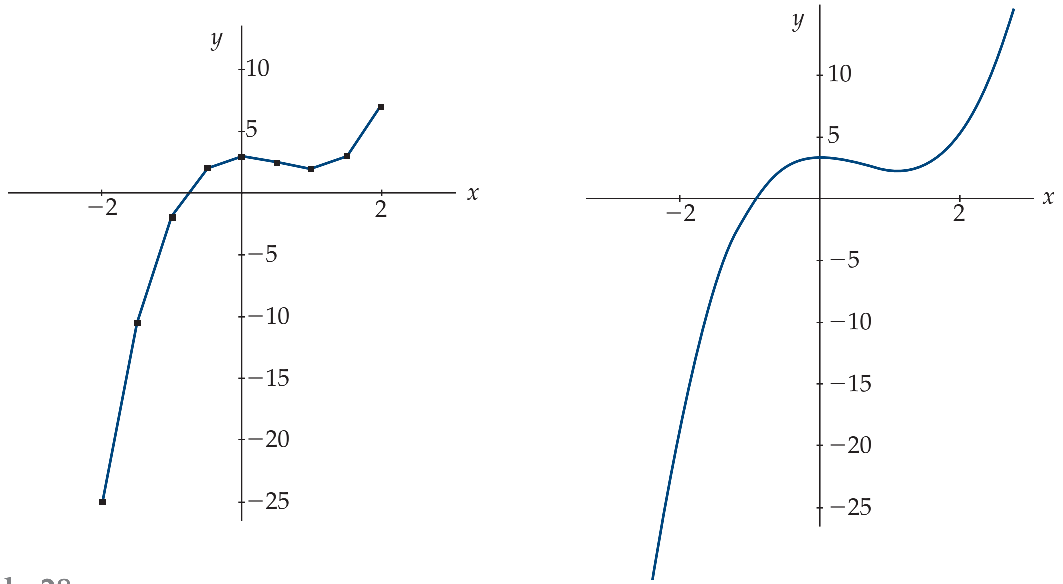
Ejemplo 27

Sea la función $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Con una calculadora o con lápiz y papel es factible hacer la siguiente tabla de valores con su correspondiente gráfica de puntos aislados.

x	$h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$
-2	-25
-1.5	-10.5
-1	-2
-0.5	2
0	3
0.5	2.5
1	2
1.5	3
2	7



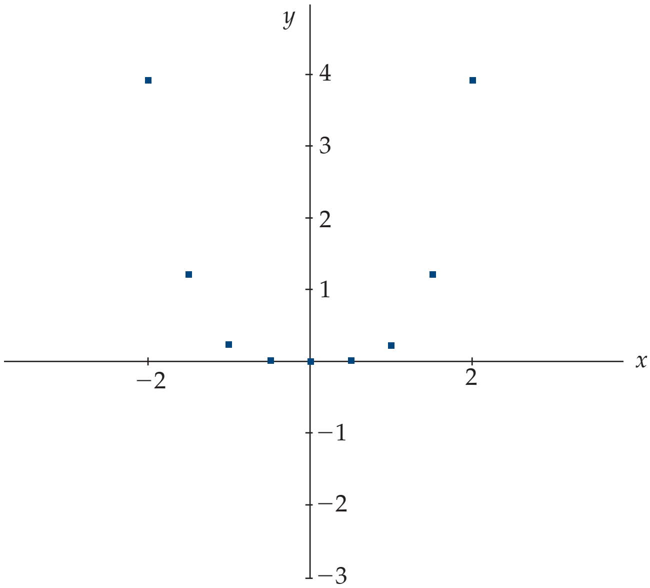
En la figura siguiente es posible observar la gráfica de puntos unidos con segmentos, por medio de la cual obtenemos una curva poligonal, que es lo que algunos estudiantes hacen en este tipo de actividades. También se muestra la gráfica que nos proporciona la computadora.



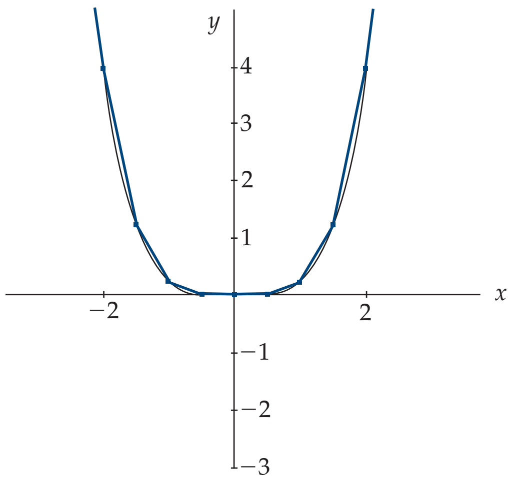
Ejemplo 28

Como en el ejemplo anterior, construyamos una tabla de valores de la función $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{50}x^2 = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - \frac{2}{25}\right)$, así como la gráfica de los puntos correspondientes.

x	$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{50}x^2$
−2	3.92
−1.5	1.220625
−1	0.23
−0.5	0.010625
0	0
0.5	0.010625
1	0.23
1.5	1.220625
2	3.92

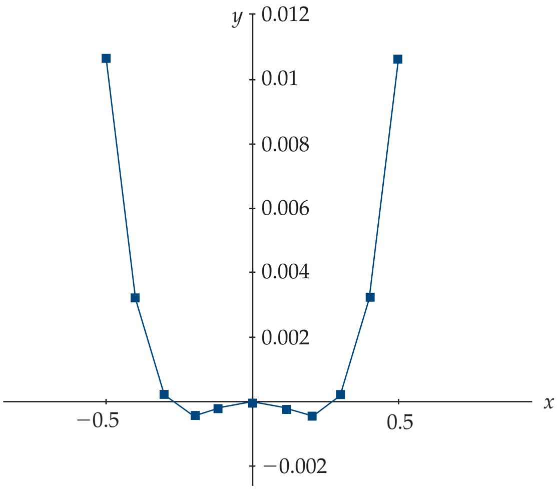


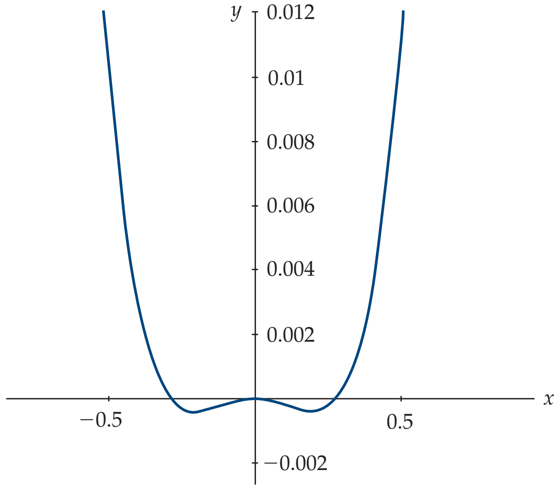
En la figura siguiente se muestran los puntos unidos con segmentos de rectas, con lo cual obtenemos una curva poligonal, así como la gráfica que proporciona la computadora de la función $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{50}x^2$.



Más adelante estudiaremos algunos resultados del cálculo diferencial que nos permitirán obtener información que no se observa de manera inmediata en estas gráficas. En el punto (0, 0) de la gráfica hay una loma, una cúspide. Esto lo podemos observar si calculamos los valores de la función en puntos suficientemente cercanos al origen, como lo muestra la siguiente tabla.

x	$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{50}x^2$
−0.5	0.010625
−0.4	0.0032
−0.3	0.000225
−0.2	−0.0004
−0.1	−0.000175
0	0
0.1	−0.000175
0.2	−0.0004
0.3	0.000225
0.4	0.0032
0.5	0.010625





Este aspecto de loma, que se llama máximo de la función, no fue revelado por la primera gráfica de la computadora, sino que hubo necesidad de mirar la gráfica en puntos cercanos al origen, pero resulta difícil que se nos pueda ocurrir tal búsqueda, si no disponemos de los recursos del cálculo.

Ejemplo 29

La función f que definiremos a continuación tiene por dominio el conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Tenemos varias opciones para definirla, por ejemplo podemos usar la flecha especial $\mapsto$:

$$1 \mapsto 1 \qquad 4 \mapsto 24 \qquad 7 \mapsto 5\,040$$
$$2 \mapsto 2 \qquad 5 \mapsto 120 \qquad 8 \mapsto 40\,320$$
$$3 \mapsto 6 \qquad 6 \mapsto 720 \qquad 9 \mapsto 382\,880$$

También podemos recurrir a una tabla vertical

x	$f(x)$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	382 880

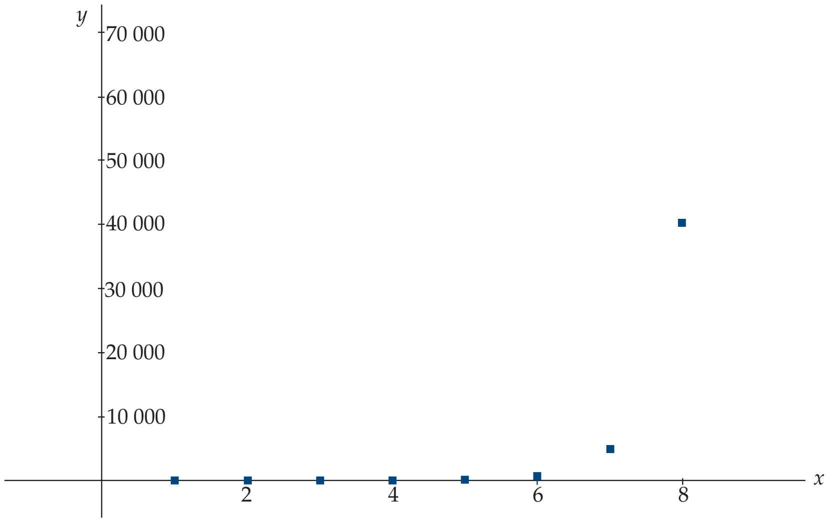
O a una tabla horizontal

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	382 880

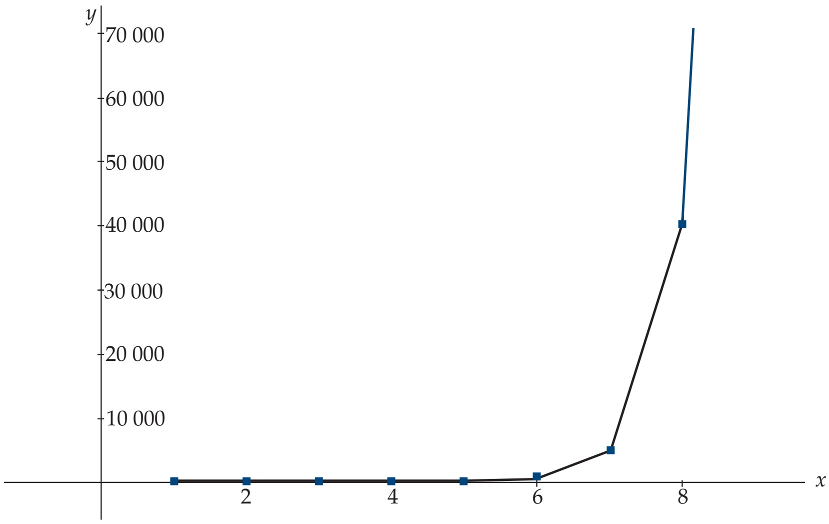
O bien, mediante un conjunto de parejas ordenadas (su gráfica).

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), (5, 120), (6, 720), (7, 5\,040), (8, 40\,320), (9, 382\,880)\}.$$

En este caso, el significado de la tabla es la definición misma de la función, ni más ni menos. También podemos graficar esta función, por supuesto necesitamos de una escala adecuada que nos permita tener visibles los puntos con ordenada grande. Esto hace que los puntos con ordenada pequeña parezcan estar sobre el eje de las abscisas.



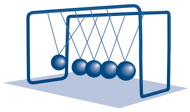
El punto correspondiente a la pareja (9,382 880) está fuera del dibujo. La gráfica de *f* consiste precisamente de estos nueve puntos, no hay más, no es la curva poligonal que podríamos construir uniendo los puntos. La función está definida sólo en los nueve enteros {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, no tiene sentido graficar la función en más puntos. Sin embargo, podemos unir los puntos de la gráfica anterior con el propósito de tener una mejor idea del comportamiento de la función, pero no para graficar más puntos de *f*.



La tabulación proporciona información numérica de una función, los puntos donde se ha de evaluar una función deben responder a necesidades específicas, por lo que no necesariamente ha de limitarse la evaluación a algunos enteros.

La gráfica de una función proporciona una visión global de la misma, mientras que la tabulación da información puntual. Ambas informaciones son complementarias, ninguna es más importante que la otra, depende de las circunstancias o del uso que se les quiera dar. En algunos casos y dependiendo de la información que se desee, es suficiente la visión global, la gráfica nos da información cualitativa de la función, pero en otros casos requerimos de los valores en algunos puntos especiales de su dominio, por ejemplo en puntos donde la función alcanza valores máximos o mínimos. La gráfica puede ser importante, por ejemplo, para averiguar el comportamiento a la larga de una función o su posible comportamiento periódico.

2.8 Problemas y ejercicios



Valuando funciones

1. Si $f(x) = x + 1$, calcule:

a) $f(x+1)$

b) $f(x)+1$

c) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

e) $f\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

f) $\dfrac{1}{f(x+1)}$

g) $\dfrac{1}{f(x)+1}$

2. Si $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, calcule:

a) $f(x^2)$

b) $f(\sqrt{x})$

c) $f(1+x^2)$

d) $f((f(x))^2)$

e) $f(\sqrt{1+x^2})$

f) $f(x+1)$

3. Encuentre una función de la forma $f(x) = ax + b$, tal que $f(1) = 1$ y $f(-1) = -2$.

4. Halle una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $f(-1) = 1$, $f(0) = -2$ y $f(2) = 1$.

5. Halle una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tal que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ y $f(2) = 4$.

6. Si x es un real positivo, sea $a.a_1a_2a_3\ldots$ su expansión decimal. Usando la función parte entera, halle una fórmula para la función f, que a cada x le asigna el primer decimal a_1:

$$x \mapsto a_1$$

Halle, también, una fórmula para la función que a cada real x le asigna su segundo decimal a_2:

$$x \mapsto a_2$$

Dominio de funciones

I. Determine el dominio de las siguientes funciones (parte 1).

7. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

10. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x(x^2 + 2x - 3)}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x - \dfrac{1}{x}}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

14. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^4 + 2x^2 + 2}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x - \dfrac{1}{2}}{x - \dfrac{2}{x-1}}}$

16. $g(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x-2}{x + 1 - \dfrac{1}{x+1}}}$

II. Determine el dominio de las siguientes funciones (parte 2).

17. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

18. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

20. $f(x) = \sqrt[4]{(x - 2)(x - 3)}$

21. $f(x) = \sqrt{(x - 2)(3 - x)}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x - 2)(3 - x)}}$

23. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 3}}$

24. $f(x) = \sqrt[8]{x^2 - 2x - 3}$

25. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

26. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

27. $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$

28. $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 5}$

29. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{x^2}}}$

30. $G(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{2 - x}}$

31. $H(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)}}$

III. Determine el dominio de las siguientes funciones (parte 3).

32. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

33. $f(x) = \sqrt[5]{x^4 - 2x + 3}$

34. $f(x) = 5x + 1 + \sqrt{x + 2}$

35. $f(x) = \sqrt{x - 5} + 3\sqrt{2 + x}$

36. $f(x) = \sqrt{x - 1} - 4\sqrt{x - 7}$

37. $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2} - x}$

38. $f(x) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{2 - x}$

39. $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$

40. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{x - 4}$

41. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} - \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$

Composición de funciones

42. Si $f(x) = x+2$, calcule $f(f(x))$ y $f(f(f(x)))$

43. Si $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, calcule $f(f(x))$ y $f(f(f(x)))$

44. Si $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, calcule

$$\underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n \text{ veces}}$$

45. Para $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, calcule

$$\underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n \text{ veces}}$$

46. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$, calcule $f(g(x))$ y $g(f(x))$. Observe que estas dos composiciones son diferentes.

47. Si $f(x) = x + 3$, calcule $f(x + 7)$

48. Si $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, calcule $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

49. Si $f(x) = x^2 + 4x + 2$, calcule $f(x - 1)$

50. Si $f(x) = x^2 - 6x + 10$, calcule $f(x + 3)$

51. Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, calcule $f(x + h)$

52. Si $f(x + 1) = 2x + 3$, halle la función f

53. Si $f(x-2) = x+5$, halle $f(x)$

54. Si $f(x+5) = 2x-1$, halle $f(x+1)$

55. Si $f(x-2) = x^2$, calcule $f(x)$

56. Si $f(x-3) = 5x+1$, halle $f(x^2-4)$

57. Si $f(2x) = x^2 + x - 3$, halle $f\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$

58. Si $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$, halle $f(x)$

59. Si $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, halle $f(x)$

60. Sea f una función tal que $f(f(a)) = a$, para algún punto a de su dominio. Diga a qué es igual

$$\underbrace{f(f(\ldots(f(a))\ldots))}_{n \text{ veces}}$$

61. Diga si las siguientes igualdades son ciertas. Pruebe su afirmación. Cuando sea falsa puede probar con un contraejemplo, es decir un ejemplo donde no se valga la igualdad.

a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$

b) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

c) $\frac{1}{f} \circ g = \frac{1}{f \circ g}$

d) $\frac{1}{f} \circ \frac{1}{g} = \frac{1}{f \circ g}$

e) $f \circ \frac{1}{g} = \frac{1}{f \circ g}$

62. Sea $f(x) = x + 3$, halle una función g tal que $f \circ g = g \circ f$

Gráficas de funciones

63. Grafique la función $f(x) = x^2 + x + 1$

64. Grafique la función $f(x) = x^2 + x - 2$

65. En un mismo sistema de ejes coordenados, grafique $f(x) = x$ y la función parte entera $g(x) = [x]$.

66. En un mismo sistema de ejes coordenados, grafique las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = [2x+1]$.

67. Grafique las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = [x^2]$.

68. Grafique las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = [x^3]$.

69. Grafique la función $g(x) = [x^2 - 2x + 1]$.

70. Grafique la función $g(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.

Combinando la función valor absoluto

I. Graficar las siguientes funciones.

71. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

72. $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$

73. $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$

74. $f(x) = \frac{x + 1 + |x+1|}{2}$

75. $f(x) = |x^2 - 1|$

76. $f(x) = \frac{x^2 - 1 + |x^2 - 1|}{2}$

77. $f(x) = |x^2 - x + 6|$

78. $f(x) = \frac{x^2 - x + 6 - |x^2 - x + 6|}{2}$

79. $f(x) = |x^3|$

80. $f(x) = x|x|$

81. $f(x) = \frac{1}{|x|}$

82. Graficar las funciones $g(x) = x^2 - 3x + 2$ y

$$f(x) = \frac{|x| - x}{|x| + x}.$$

83. Graficar las funciones $g(x) = x^2 - 3x + 2$ y

$$f(x) = \frac{|x| - x}{|x| + x}$$

Funciones pares y funciones impares

Una función f definida en un intervalo simétrico $(-a, a)$, se dice que es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda $x \in (-a, a)$ y es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in (-a, a)$.

I. Diga cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles impares.

84. $f(x) = x$

85. $f(x) = 2x^3 - 5x$

86. $f(x) = x^3 + 1$

87. $f(x) = x^2 + 1$

88. $f(x) = 5x^2$

89. $f(x) = x^4 - 3x^2$

90. $f(x) = x^4 + 7x^2 - 2$

91. $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{1}{x}}$

92. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - \frac{2}{x}}$

93. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x}$

94. $f(x) = |x|$

95. $f(x) = |x + 1|$

96. $f(x) = |x| + 1$

97. Sea f cualquier función definida en un intervalo simétrico $(-a, a)$. Sean

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Pruebe que f_p es par y f_i impar.

98. Pruebe que toda función definida en un intervalo simétrico $(-a, a)$, por ejemplo $\mathbb{R}$, puede escribirse como la suma de una función par y una impar.

99. Escriba la función $f(x) = x + 1$ como la suma de una función par y una impar.

100. Escriba la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$ como la suma de una función par y una impar.

101. Escriba la función $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}$ como la suma de una función par y una impar.

102. Pruebe que la función $f(x) = x^2$ es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$

103. Pruebe que la función $f(x) = x^3 + 2x$ es creciente en $\mathbb{R}$.

104. Pruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$

105. Pruebe que la función $f(x) = x^5$ es biyectiva en $\mathbb{R}$.

106. Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, dada por $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, es biyectiva.

107. Pruebe que la función $f(x) = 200x^3 - 90x^2 + 12x + 1$ no es inyectiva.

Funciones inversas

I. Halle la función inversa en cada uno de los siguientes incisos.

108. $f(x) = x - 1$

109. $f(x) = 2x + 9$

110. $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

CAPÍTULO 3

FUNCIONES ELEMENTALES



3.1 Funciones elementales básicas

Leonhard Euler (1707-1783)



Leonhard Euler (1707-1783) nació en Suiza, es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia, por sus aportaciones a esta ciencia lo comparan con Gauss y Newton.

Fue discípulo de Johann Bernoulli, pero en poco tiempo superó a su maestro. Con toda seguridad, Euler es el matemático más prolífico de la historia, escribía un promedio de 800 páginas de artículos al año en su época de mayor producción. Entre 1727 y 1783 produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas.

Mientras llevaba a cabo un experimento de óptica, antes de cumplir 30 años, aconteció un accidente que le provocó la pérdida de la visión de un ojo, lo que le acarreó problemas de salud más serios; al final de su vida casi había perdido la vista.

En su obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Euler realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, trigonometría y geometría analítica. En esta obra se encuentran las famosas fórmulas que relacionan las funciones trigonométricas y la función exponencial, expresiones del seno y el coseno en forma de productos infinito, el uso de *i* para $\sqrt{-1}$ y el famoso número *e*.

Euler transformó el cálculo en una teoría formal de funciones, además fue el primer matemático que hizo hincapié en el concepto de función y realizó un estudio sistemático de todas las funciones elementales. Euler, aunque principalmente era matemático, también hizo destacadas aportaciones a la astronomía, mecánica, óptica y acústica.

3.1.1 Introducción

En el capítulo anterior estudiamos la noción general de función, que es uno de los conceptos centrales de la matemática. De la gran diversidad de funciones que se estudian en cálculo, hay una clase especialmente importante, constituida por las llamadas funciones elementales. Este capítulo está dedicado a la descripción de esta familia de funciones.

Hacia el final de este capítulo abordamos el concepto general de función elemental, pero antes conviene que estudiemos algunos casos especiales; así pues, iniciamos con las más simples que son las polinomiales.

3.1.2 Funciones polinomiales

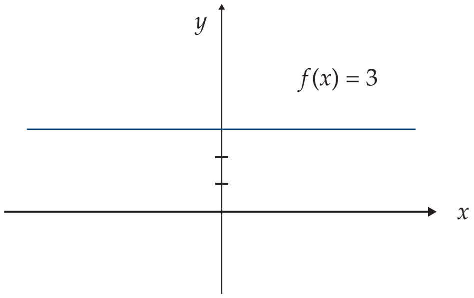
Las **funciones polinomiales** son aquellas definidas por expresiones de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

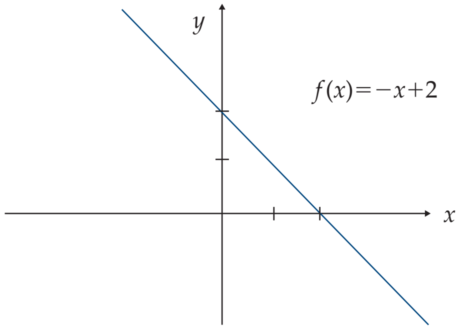
donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son números reales.

Esta familia de funciones incluye las funciones constantes y las funciones lineales, en particular incluye la función identidad $f(x) = x$.

En general, una función es **constante** si toma el mismo valor para todos los puntos de su dominio, independientemente de cuál sea este. Así pues, que una función f con dominio $A \subset \mathbb{R}$ sea constante, significa que existe un número real c, tal que $f(x) = c$ para todo $x \in A$. Sin embargo, de acuerdo con lo convenido en el capítulo anterior, las funciones que definamos a través de fórmulas, sin especificar su dominio, debemos entender que están definidas en todos los reales para los cuales aplica la fórmula. En particular, un enunciado como "sea la función constante $f(x) = c$" lleva implícita la condición de que el dominio consta de todos los reales. Por ejemplo, la función $f(x) = 3$, es una función constante, cuyo dominio son todos los reales. Esta función toma el valor 3 en cada real x. La gráfica de una función constante es una recta paralela al eje de las abscisas. La gráfica de nuestro caso particular se muestra en la siguiente figura.

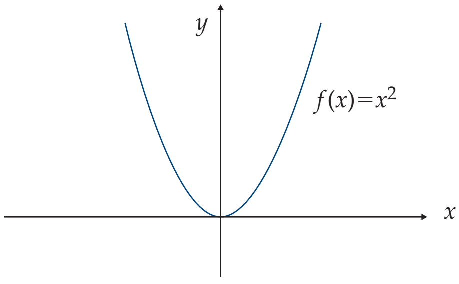


Una función polinomial de primer grado es de la forma $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales con $a \neq 0$, por ejemplo $f(x) = -x + 2$. En este caso $a = -1$ y $b = 2$. En la siguiente figura se muestra la gráfica de esta función.

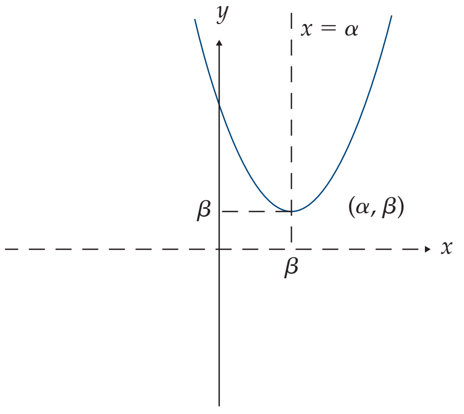


En general, la gráfica de una función polinomial de primer grado $f(x) = ax + b$, es una línea recta, con pendiente a y ordenada en el origen b. La gráfica de la **función identidad** $f(x) = x$ es una recta de pendiente 1, que pasa por el origen.

Un tipo de función polinomial más compleja que las constantes y las polinomiales de primer grado lo constituyen las **funciones cuadráticas**. Estas funciones tienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$. Esta última condición es indispensable para que la función pueda llamarse cuadrática, en caso contrario será una función polinomial de primer grado o constante. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función cuadrática. La gráfica de esta función es una parábola.



El **vértice** de la parábola es el punto (0, 0) y el **eje de la parábola** es el de las ordenadas. La gráfica de toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola, para determinar el vértice y el eje de esta parábola podemos escribir la función en la forma $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. En este caso, el vértice de la parábola es el punto (α, β) y el eje es la recta vertical es $x = \alpha$.



Para escribir la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en la forma $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ podemos recurrir a la conocida técnica de completar cuadrados, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\} \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 2x - \frac{5}{4}$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - \frac{5}{4} \\ &= x^2 - 2x + 1 - 1 - \frac{5}{4} \\ &= (x - 1)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

De la expresión anterior deducimos que el vértice de la parábola dada por la función $f(x) = x^2 - 2x - \frac{5}{4}$ es el punto $\left(1, -\frac{9}{4}\right)$ y su eje es la recta $x = 1$.

Otros casos de funciones polinomiales son las **funciones cúbicas**

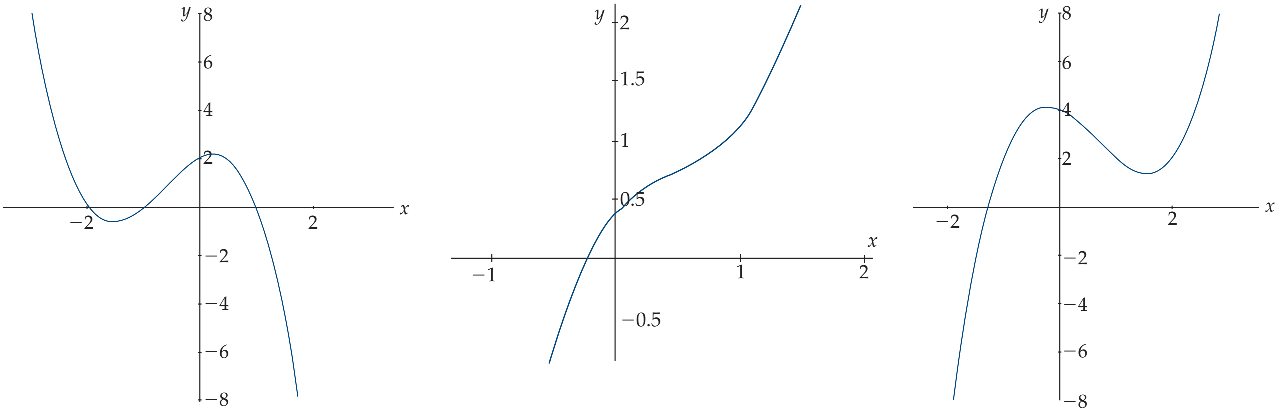
$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde $a_3 \neq 0$, y las **funciones cuárticas**

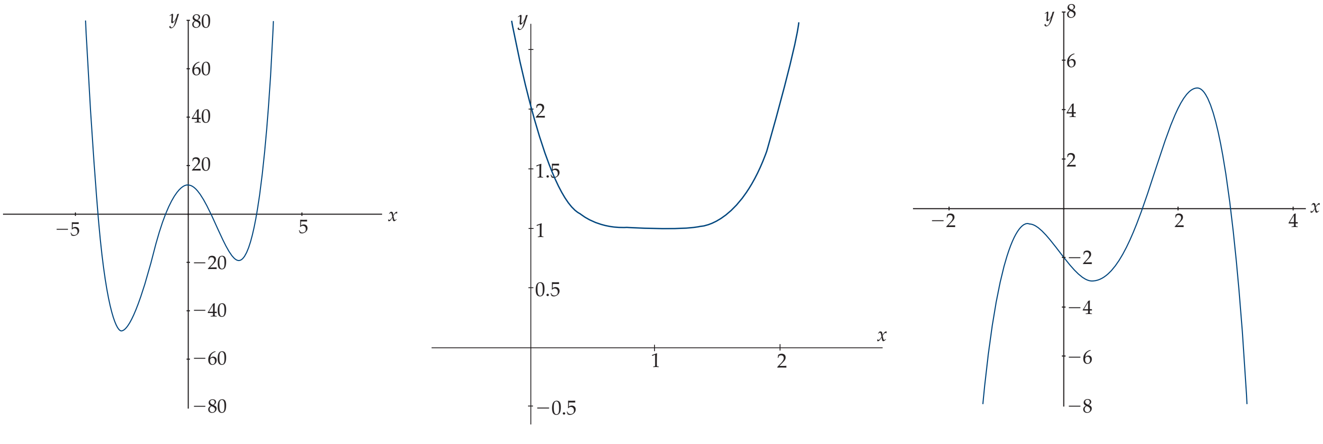
$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $a_4 \neq 0$.

A continuación mostramos el aspecto que en general tienen las gráficas de las funciones polinomiales cúbicas y cuárticas.



Funciones polinomiales cúbicas



Funciones polinomiales cuárticas

Una función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es de **grado** n si $a_n \neq 0$. Las funciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas son de grados 2, 3 y 4, respectivamente.

3.1.3 Funciones racionales

Las funciones racionales son las que pueden escribirse como cociente de funciones polinomiales, es decir, una función f es **racional** si puede escribirse en la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde la función polinomial $q(x)$ es diferente de la constante cero.

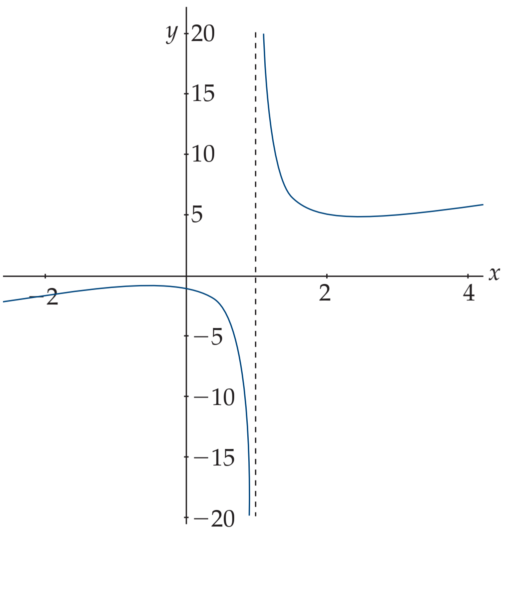
El dominio de una función polinomial $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ consta de todos los reales, excepto aquellos en donde el denominador $q(x)$ es igual a cero, es decir, excepto los reales que son raíces de la ecuación

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0.$$

Las funciones polinomiales son casos especiales de funciones racionales; en particular, la función identidad $f(x) = x$ es una función polinomial y también es racional.

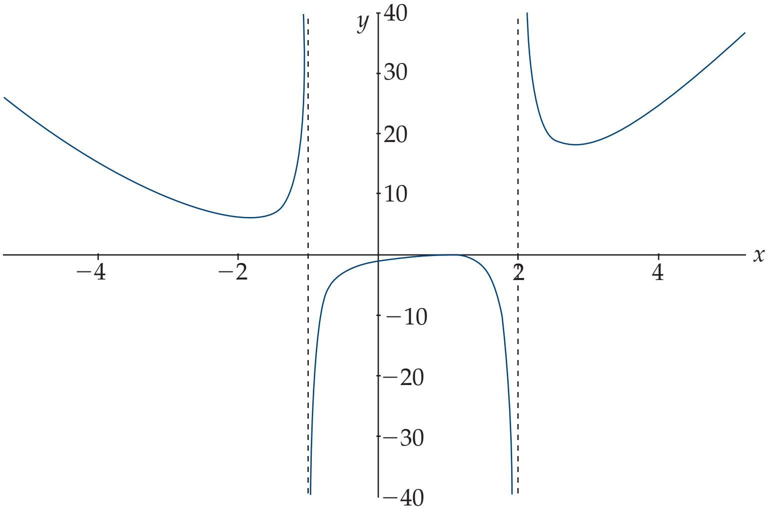
Ejemplo 1

La función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ está definida en todos los reales $x \neq 1$, pues el denominador se anula en $x = 1$.



Ejemplo 2

La función $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ está definida en todos los reales excepto en los puntos $x = -1$ y $x = 2$, pues en dichos puntos el denominador toma el valor cero.



Observe en cada uno de los dos ejemplos anteriores, que en los puntos donde la función racional no está definida, la gráfica "se pega" a las rectas verticales que pasan por esos puntos. Dichas rectas verticales se llaman **asíntotas** de la gráfica o de la función.

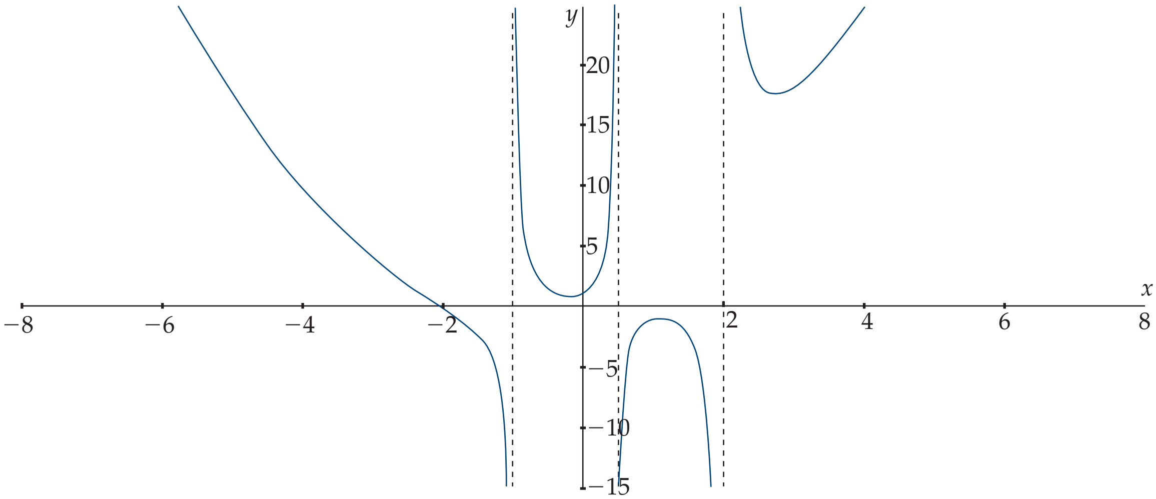
De acuerdo con lo anterior, la recta $x = 1$ es una asíntota de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$. Esta función también se escribe

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x + 2}{(x + 1)(x - 2)}$$

Escrita de esta manera, es posible determinar con facilidad sus asíntotas.

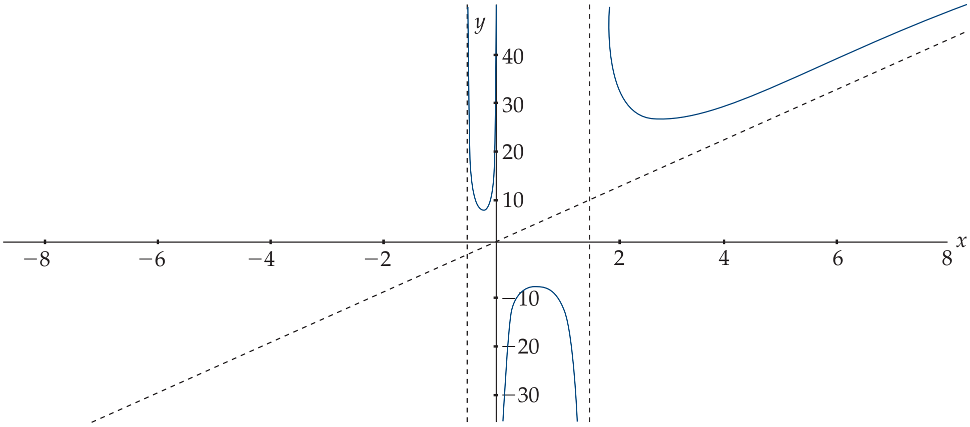
Ejemplo 3

La función racional $f(x) = \dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1}{(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x - 2)}$ tiene por asíntotas las rectas verticales $x = -1$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 2$



Ejemplo 4

La función racional $f(x) = \dfrac{5x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}$ tiene por asíntotas las rectas verticales $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$. También tiene por asíntota la recta oblicua $y = 5x + 3$.



La recta $y = 5x + 3$ tiene la propiedad de que la función

$$f(x) = \frac{5x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x\left(x + \frac{1}{2}\right)x\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{5x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x}$$

para x positivas y negativas, muy grandes en valor absoluto, está muy próxima o es muy parecida a la función $y = 5x + 3$. Nos podemos convencer de esto si realizamos la división con lo cual obtenemos un cociente y un residuo:

$$\frac{5x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x} = 5x + 3 + \frac{\frac{27}{4}x^2 + \frac{25}{4}x + 2}{x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x}$$

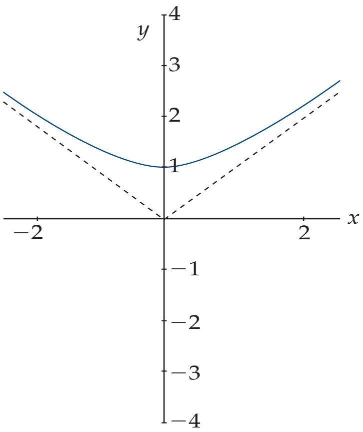
Cuando $|x|$ es "muy grande" la fracción $\dfrac{\frac{27}{4}x^2 + \frac{25}{4}x + 2}{x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x}$ es "muy pequeña", así que $f(x)$ está muy próxima a $5x + 3$: $\dfrac{5x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x} \approx 5x + 3$ para $|x|$ grande. En el capítulo 5 precisamos con detalle el concepto de la asíntota.

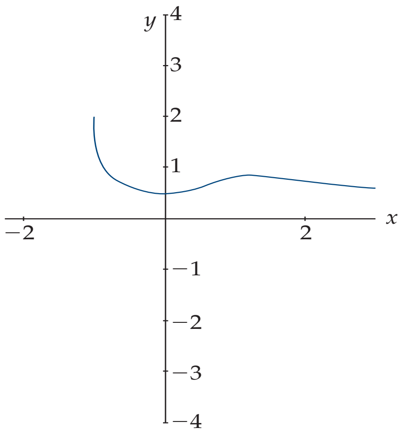
3.1.4 Funciones algebraicas

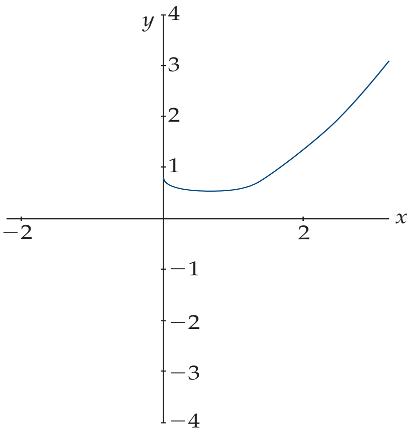
Las funciones que les siguen a las racionales desde el punto de vista de su complejidad son las llamadas algebraicas. Una función algebraica es la que en general se construye con radicales, por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$ es una función algebraica. Más precisamente, una función es **algebraica** si se construye con las operaciones aritméticas elementales suma, resta, división y extracción de raíces de todos los órdenes, aplicadas en cualquier número y mediante cualquier combinación a las funciones polinomiales, racionales y a las mismas funciones que se produzcan mediante una sucesión de estas aplicaciones. Con toda esta libertad de construcción podemos construir funciones algebraicas de aspecto tan complejo como nos lo permita nuestra imaginación. Por ejemplo, las siguientes funciones son algebraicas.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sqrt{1 + x^2} \\
G(x) &= \frac{x^2 + 1}{1 + \sqrt{x^5 + 1}} \\
H(x) &= \frac{\sqrt[2]{x^6 + 2}}{1 + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}
\end{aligned}
$$

Las funciones anteriores tienen las siguientes gráficas.







Las funciones racionales son casos particulares de funciones algebraicas. Aun cuando, en general, las funciones algebraicas tienen un aspecto mucho más complicado que las funciones racionales, no son las más complejas que manejaremos en cálculo.

Las funciones algebraicas, antes descritas, reciben el nombre de **funciones algebraicas explícitas**, pues el concepto de función algebraica es más amplio. En general, una **función algebraica** es toda función $y = f(x)$ que satisface una ecuación polinomial de la forma

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

en donde las funciones $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ son funciones polinomiales.

El nombre de función algebraica explícita se debe a que el valor de la función en x se escribe explícitamente en términos de radicales, pero no todas las funciones algebraicas son explícitas.

La función algebraica explícita $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisface la ecuación

$$y^2 + x^2 = 1.$$

Las funciones algebraicas que satisfacen ecuaciones polinomiales en y de grado 5

$$a_5(x)y^5 + a_4(x)y^4 + a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

en general no son algebraicas explícitas, estas, por lo regular, no se pueden escribir explícitamente en términos de radicales. Esto se debe a que la ecuación algebraica general de grado 5 no se puede resolver en términos de radicales. Se trata de un teorema de teoría de ecuaciones probado

en 1826 por el joven matemático noruego Niels Henrik Abel, quien murió a la edad de 26 años, víctima de tuberculosis.

Una función algebraica que no es explícita recibe el nombre de **función algebraica implícita**.

Otra categoría de funciones son las llamadas **funciones trascendentes**. A esta clase pertenecen la función exponencial e^x, el logaritmo natural $\log x$, las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ y las funciones arco $\operatorname{arcsen} x$ y $\arccos x$. Estas funciones no son algebraicas. Analicemos un poco de ellas, comencemos con la función exponencial, pero antes estudiemos las potencias a^r con r racional.

3.1.5 Potencias racionales a^r

Para definir la función exponencial, necesitamos precisar el significado de expresiones de la forma a^r, en donde pretendemos que a y r sean números reales cualesquiera. Más adelante veremos que es necesario restringir la naturaleza de estos números a y r.

Si a es un número real cualquiera, a^2 significa $a \cdot a$. En general, tenemos para cualquier entero positivo n:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Es obvio que se cumplen las siguientes propiedades básicas

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^m = a^{nm}$$

en donde n y m son enteros positivos cualesquiera y a cualquier real.

Estas propiedades, que llamaremos leyes de los exponentes, son las que requeriremos que se cumplan para establecer la definición de potencia a situaciones más generales. Si deseamos extender nuestra definición a exponentes racionales o incluso irracionales, conservando estas propiedades, se debe cumplir en particular

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Esto nos lleva a *definir*

$$a^0 = 1.$$

La fórmula anterior es una definición. Conviene hacerla así, pues deseamos que se cumplan las leyes de los exponentes después de incorporar los nuevos casos. Si ahora pedimos esta propiedad para todos los enteros (positivos, negativos y cero) entonces debe cumplirse en particular

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

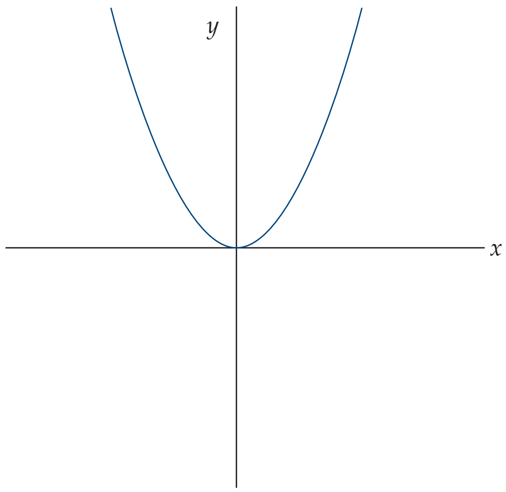
De la igualdad anterior, la cual deseamos se cumpla, se sigue que debemos *definir*

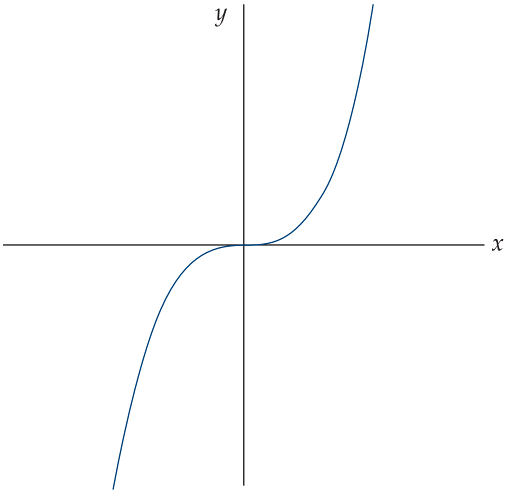
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Hasta el momento hemos definido el símbolo a^n para cualquier real a y todo entero n.

Ahora pasemos a los exponentes racionales, los cuales denotaremos por r. Para esto vamos a requerir de la extracción de raíces de orden arbitrario. Recordemos, primero, las funciones

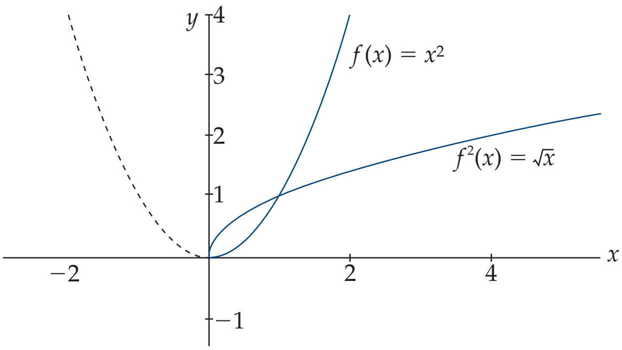
potencia, por ejemplo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y, más generalmente, $f(x) = x^n$, donde n es cualquier número natural. La gráfica de $f(x) = x^n$ tiene uno de los dos aspectos:



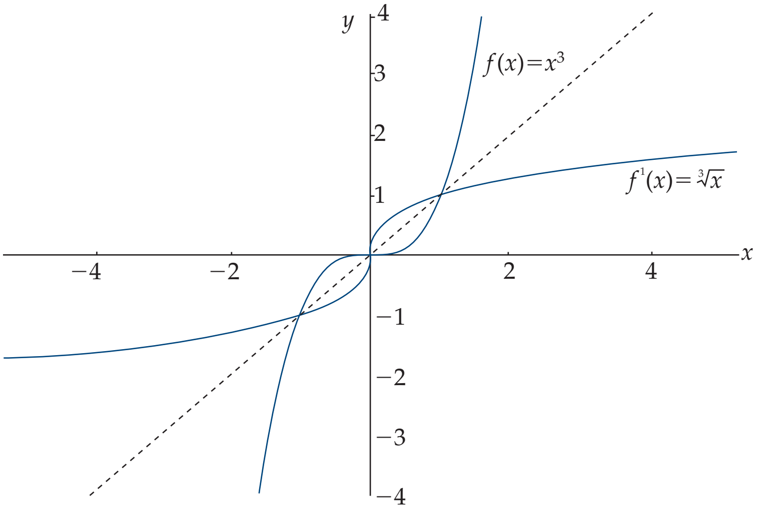


Las gráficas corresponden a $f(x) = x^n$, la de la derecha cuando n es par y la de la izquierda cuando n es impar.

Cuando n es par, la función $f(x) = x^n$ no es inyectiva, pero es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$; su imagen es el mismo intervalo $[0, +\infty)$, por tanto en este intervalo la función tiene inversa y es la raíz de orden n, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Esta función está definida en $[0, +\infty)$. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$, su imagen es $[0, +\infty)$ y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ también está definida en $[0, +\infty)$.



Cuando n es impar, la función $f(x) = x^n$ es creciente en todos los reales $\mathbb{R}$ y su imagen también es el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$. En este caso, la función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida en todo $\mathbb{R}$, por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$, su imagen es $\mathbb{R}$ y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ también está definida en $\mathbb{R}$.



En resumen, cuando n es par, $\sqrt[n]{x}$ está definida para todo real $x \geq 0$. Por otra parte, cuando n es impar, $\sqrt[n]{x}$ está definida para todo real x.

Retornemos a nuestro objetivo de definir a^r para cuando r es un racional. Puesto que para cualquier entero positivo n deseamos que se cumpla la propiedad

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ veces}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}^{n \text{ veces}}} = a^1 = a$$

es decir

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a,$$

hemos de *definir*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ .$$

Esta definición aplica para todo real a si n es un entero positivo impar y aplica a todo real $a \geq 0$ si n es un entero positivo par.

Además, también deseamos que se cumpla

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ veces}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}^{m \text{ veces}}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Esto nos lleva a definir

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Como antes, la definición anterior aplica a todo real a si n es un entero positivo impar y aplica a todo real $a \geq 0$ si n es un entero positivo par.

Para extender la definición anterior a todos los exponentes racionales, definimos

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},$$

en donde m y n son enteros positivos. Por supuesto $a > 0$ si n es par y $a \neq 0$ si n es impar. Esta definición obedece al mismo deseo de que se cumplan las leyes de los exponentes.

Así pues, ya tenemos definida la expresión a^r para todo racional r. Si $r = \dfrac{m}{n} > 0$. La definición aplica a todo real a si n es un entero positivo impar y aplica a todo real $a \geq 0$ si n es un entero positivo par. Si $r = -\dfrac{m}{n} < 0$, la definición aplica a todo real $a \neq 0$ si n es un entero positivo impar y aplica a todo real $a > 0$ si n es un entero positivo par. Si $a > 0$ entonces a^r está definida para todo racional r.

Con nuestra definición, estamos en posibilidades de hablar, por ejemplo, de $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $2^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{2})^5$ y $2^{1.4142} = 2^{\frac{7071}{5000}}$. Pero, ¿qué significa $2^{\sqrt{2}}$? Para definir este número se requiere de un procedimiento más complicado. Necesitamos el concepto de límite de sucesiones, tema que estudiaremos en el capítulo 4. Por el momento podemos decir que la definición se basa en un proceso de aproximación. Si r es irracional, a^r se obtiene mediante aproximaciones a^s con valores racionales de s, aproximándose a r. Por ejemplo, $2^{\sqrt{2}}$ será definido a través de las aproximaciones $2, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, 2^{1.41421}, \ldots$

En la sección 5.4 definiremos a^r cuando $a > 0$ y r es irracional, para ello vamos a requerir las leyes de los exponentes racionales.

3.1.6 Leyes de los exponentes racionales

Teorema (leyes de los exponentes)

Sea $a, b > 0$ y sean $r, s \in \mathbb{Q}$, entonces

1) $a^r a^s = a^{r+s}$
2) $(a^r)^s = a^{rs}$

Demostración

Si m y n son enteros positivos, recordemos que por definición $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. También tenemos

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m}$$

Sean $r = \dfrac{m}{n}$ y $s = \dfrac{p}{q}$ racionales positivos, donde $m, n, p, q, \in \mathbb{N}$.

Probemos el inciso 1). Si uno de los racionales r o s es cero, no hay nada que probar. Supongamos entonces que ambos r y s son diferentes de cero. Sean $r = \dfrac{m}{n}$ y $s = \dfrac{p}{q}$ donde $m, n, p, q, \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{pn}{nq}} \\
&= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{pn} \\
&= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+pn} \\
&= a^{\frac{mq+np}{nq}} \\
&= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}}\, a^{-\frac{p}{q}} &= a^{\frac{mq}{nq}}\, a^{-\frac{pn}{nq}} \\ &= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq}\left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{-pn} \\ &= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq-pn} \\ &= a^{\frac{mq-pn}{nq}} \\ &= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} a^{-\frac{m}{n}} a^{-\frac{p}{q}} &= a^{-\frac{mq}{nq}} a^{-\frac{pn}{nq}} \\ &= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{-mq}\left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{-pn} \\ &= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{-mq-pn} \\ &= a^{\frac{-mq-pn}{nq}} \\ &= a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Esto prueba el inciso 1). Probemos ahora el inciso 2). Mostremos primero las dos siguientes propiedades

i) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{k} = a^{\frac{mk}{n}}$

ii) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{m}{nq}}$

Para i) tenemos: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{k} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}\right)^{k} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mk} = a^{\frac{mk}{n}}$.

Para ii) tenemos $\left(a^{\frac{m}{nq}}\right)^{q} = a^{\frac{m}{nq}q} = a^{\frac{m}{n}}$, esto significa que $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{m}{nq}}$.

Un caso particular de i) es $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = a^{m}$.

Usando i) y ii) obtenemos $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{p} = \left(a^{\frac{m}{nq}}\right)^{p} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{mp}{nq}}$

Esto prueba la relación $(a^r)^s = a^{rs}$ cuando r y s son racionales positivos. Se deja como ejercicio para el lector la prueba para cuando uno o los dos racionales son negativos. Cuando uno de ellos es cero la igualdad se cumple trivialmente.

Teorema

Si b y c son reales positivos y $q \in \mathbb{N}$, se tiene $b^{\frac{1}{q}} c^{\frac{1}{q}} = (bc)^{\frac{1}{q}}$.

Demostración

$$\left(b^{\frac{1}{q}}c^{\frac{1}{q}}\right)^q = \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^q\left(c^{\frac{1}{q}}\right)^q$$
$$= bc$$

Esto significa que $b^{\frac{1}{q}}c^{\frac{1}{q}} = (bc)^{\frac{1}{q}}$.

Teorema

Para cualquier racional r se tiene $b^r c^r = (bc)^r$.

La prueba es muy simple y se deja como ejercicio para el lector.

Tenemos como corolario el siguiente:

Teorema

Sea $a > 0$ y sean r y s racionales cualesquiera tales que $r < s$. Entonces

1) Si $a > 1$ se tiene $a^r < a^s$.
2) Si $0 < a < 1$, se tiene $a^r > a^s$.

Demostración

Probemos primero que si m y n son enteros positivos, entonces cuando $a > 1$ se cumple $1 < a^{\frac{m}{n}}$ y cuando $0 < a < 1$ se cumple $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

De la condición $1 < a$, al multiplicar ambos miembros por $a > 0$ se obtiene $1 < a < a^2$. Nuevamente, de la desigualdad $1 < a^2$ se obtiene $a < a^3$, así que $1 < a^3$. Continuando con este proceso obtenemos $1 < a^m$. De manera similar se prueba que si $0 < a < 1$ entonces $a^m < 1$. También tenemos $\sqrt[n]{a} > 1$ cuando $a > 1$, pues trivialmente no se puede tener $\sqrt[n]{a} = 1$ y tampoco $\sqrt[n]{a} < 1$, pues en este caso por lo ya probado se tendría $a < 1$. De manera análoga se concluye que si $0 < a < 1$, entonces $\sqrt[n]{a} < 1$.

De lo anterior se sigue que si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m > 1 \text{ si } a > 1 \text{ y } a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m < 1 \text{ si } 0 < a < 1.$$

Ahora probemos 1). Sean r y s racionales tales que $r < s$, entonces $s - r$ es un racional positivo. Por lo tanto $1 < a^{s-r}$. Al multiplicar ambos miembros por $a^r > 0$, obtenemos

$$a^r < a^{s-r}a^r.$$

O sea

$$a^r < a^s.$$

Esto prueba 1). Ahora probemos 2).

Nuevamente, r y s son racionales tales que $r < s$, entonces $s - r$ es un racional positivo. Entonces si $0 < a < 1$, tenemos $a^{s-r} < 1$. Al multiplicar ambos miembros por $a^r > 0$ obtenemos $a^s < a^r$. Esto prueba 2). Una prueba de 2) también se obtiene al aplicar el inciso 1) al cociente $\frac{1}{a} > 1$.

Un teorema análogo es el siguiente:

Teorema

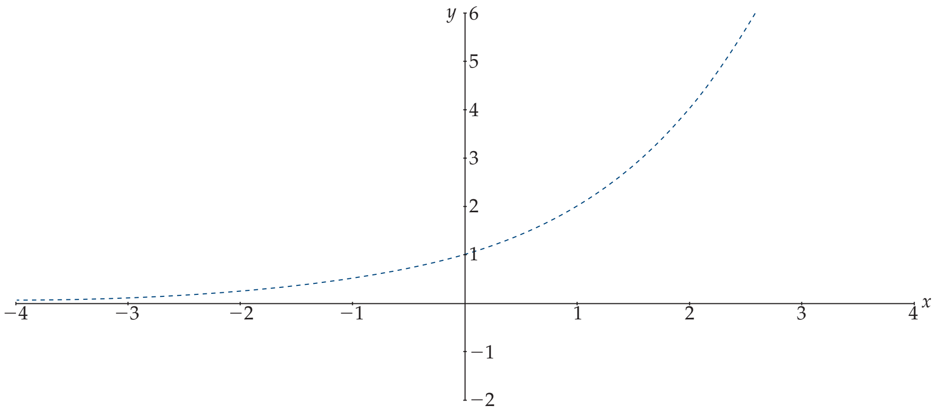
Si r es un racional positivo y $0 < a < b$, entonces $a^r < b^r$. Si r es un racional negativo y $0 < a < b$, entonces $a^r > b^r$.

Demostración

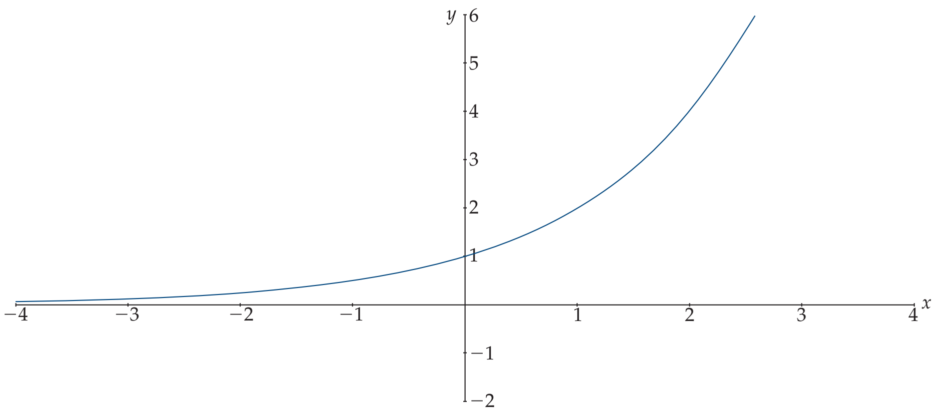
Sea r un racional positivo y $0 < a < b$. Entonces $1 < \frac{b}{a}$, es decir $1 < ba^{-1}$. Del teorema anterior se obtiene $1 < \left(ba^{-1}\right)^r$. O sea $1 < b^r a^{-r}$. Al multiplicar ambos miembros a^{-r} obtenemos $a^r < b^r$. La prueba de la segunda parte del teorema se deja como ejercicio para el lector.

3.1.7 La función exponencial a^x y la función logaritmo $\log_e x$

Consideremos la función $f(x) = 2^x$, definida hasta ahora para todos los racionales x. Su gráfica tiene el siguiente aspecto.

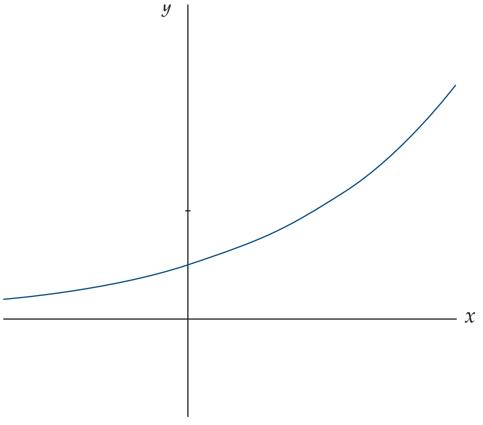


La gráfica de la figura anterior aparece punteada solamente para recordar que la función $f(x) = 2^x$, está definida únicamente en los racionales. Los "huecos" reales de la gráfica están esperando ser llenados con los valores de $f(x) = 2^x$ cuando la tengamos definida para x irracional. Por ejemplo, en el punto $x = \sqrt{2}$, la función no está definida, por lo que no existe ningún punto en la gráfica correspondiente a $x = \sqrt{2}$. Se podrá agregar el punto $(\sqrt{2}, 2^{\sqrt{2}})$ a esta cuado hayamos definido $2^{\sqrt{2}}$. Un hecho interesante es que nuestros ojos son incapaces de distinguir la ausencia de los puntos correspondientes a los irracionales, pues los racionales son densos en los reales, esto significa que, en cualquier vecindad de cualquier real (racional o irracional), hay una infinidad de racionales. La gráfica de $f(x) = 2^x$ debe lucir así ante nuestros ojos, aun cuando solo la hayamos graficado para x racional.

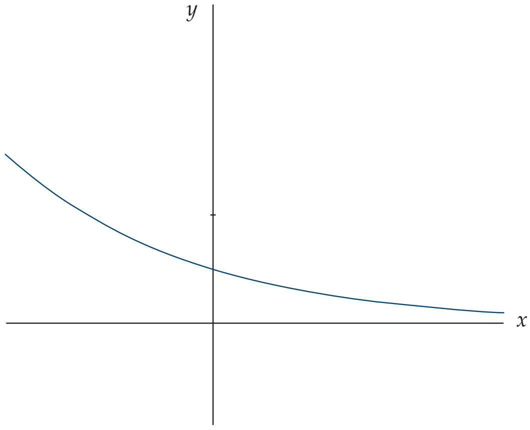


La gráfica corresponde solo a los racionales, pero nos sugiere el "valor natural" que debería tener $2^{\sqrt{2}}$ si quisiéramos que la gráfica de $f(x) = 2^x$, definida para todo x real, conservase este aspecto.

Si de momento aceptamos que tenemos definida la función $f(x) = 2^x$ para todo real x, la gráfica de esta ante nuestros ojos luciría igual. En general, si a es un real positivo, la función $f(x) = a^x$ recibe el nombre de función exponencial. A continuación se muestra el aspecto que tiene la gráfica para cada uno de los casos $a > 1$ y $a < 1$.



$y = a^x, a > 1$

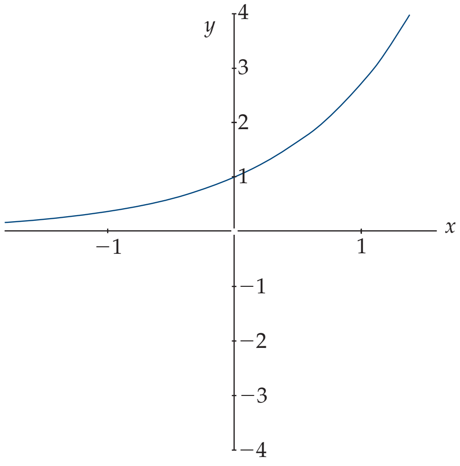


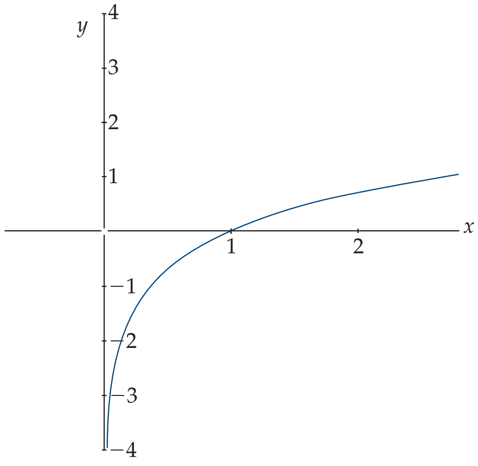
$y = a^x, a < 1$

Una función exponencial particularmente importante es cuando a es el número e. Resulta asombroso que este caso particular tenga tantas virtudes; en los capítulos subsecuentes daremos cuenta de ellas. Dicha función la denotaremos por $\text{Exp}(x) = e^x$, la cual es de las más importantes en matemáticas. Su función inversa es la función logaritmo natural $\log x$.

Notación para el logaritmo natural

Hay diferentes notaciones para la función logaritmo natural. Por ejemplo, algunos autores utilizan $\ln x$, Lnx o $\log x$. En análisis matemático es más común la notación $\log x$. El logaritmo base, un número $a > 0$, se denota generalmente por $\log_a x$. Para el caso especial $a = e$, se conviene en omitir el índice e, y en lugar de escribir $\log_e x$ escribimos simplemente $\log x$, así que el logaritmo base e goza de una notación preferente.

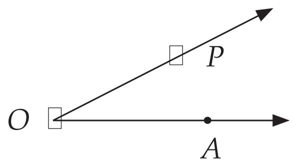




3.1.8 Funciones trigonométricas

3.1.8.1 Círculo trigonométrico. El radián

Consideremos un ángulo agudo $\measuredangle\ AOP$ como se muestra en la figura.

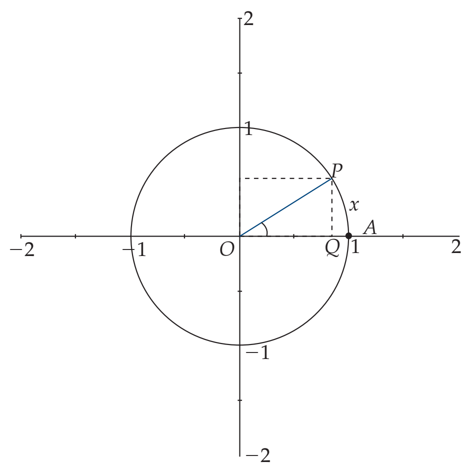


Primero hablemos de la manera en que mediremos este ángulo. Desde nuestros estudios de primaria hemos aprendido que los ángulos se miden en grados. Un grado es la medida del ángulo que se obtiene al dividir un ángulo recto en 90 partes iguales. Un ángulo recto es el que forman dos rectas perpendiculares, es un ángulo que sirve de referencia para definir la unidad grado. Si deseamos ver físicamente un ángulo que mida un grado, es suficiente que dividamos el ángulo que forman dos rectas perpendiculares en 90 partes iguales y tomar una de ellas (por cierto, en la práctica esta división con regla y compás es imposible).

Por definición de grado, un ángulo recto mide 90 grados, esta medida se escribe 90º. El grado es por definición la unidad con la que suele medirse cualquier ángulo. Si nos detenemos a reflexionar sobre el significado de esta unidad para medir ángulos, seguramente llegaremos a la conclusión de que la definición es un tanto arbitraria: ¿por qué $\frac{1}{90}$ del ángulo recto?

Quizá sería más conveniente dividir el ángulo recto en 100 partes iguales o en 25 partes iguales de manera que la vuelta completa estuviese dividida en 100 partes iguales. Esta partición del ángulo recto estaría más acorde con nuestro sistema decimal de medición, por ejemplo de longitudes (1 metro se divide en 100 centímetros). Pero el grado está aceptado universalmente y debemos aprender a trabajar con esta unidad. Por ejemplo, es importante que estemos familiarizados con los ángulos que miden 30º, 45º y 60º, respectivamente.

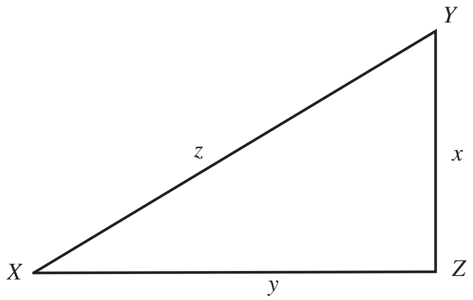
En cálculo, el grado no es una medida muy conveniente para medir los ángulos, en su lugar se adopta otra unidad llamada radián, que responde mejor a los intereses del cálculo. La definición de radián es muy simple, sin embargo, son profundas las ideas que muestran su ventaja sobre el grado. En esta sección explicaremos un poco sobre estas ventajas. Las razones por las que es más conveniente el radián se entienden mejor con el círculo trigonométrico. En la sección 5.3 del capítulo 5 se hará más clara su conveniencia. El círculo trigonométrico es el círculo de radio 1 con centro en el origen de un sistema de ejes cartesianos. Nos vamos a referir a este círculo como el círculo unitario.



Como expusimos antes, el radián es una unidad para medir los ángulos. Para el ángulo $\measuredangle AOP$ de la figura anterior, su medida en radianes es la medida x del arco $\widehat{AP}$ del círculo unitario. La medida x del arco es en unidades de longitud. El radio mide una unidad de longitud. Un ángulo que mide un radián es aquel que subtiende un arco cuya longitud es igual a 1, es decir, la longitud del arco es igual a la longitud del radio. De esa manera podemos mirar físicamente un ángulo que mida 1 radián. Medir así los ángulos tiene sus ventajas. Su medida se traduce en una longitud que podemos ver acompañando al mismo ángulo. Debemos distinguir lo que es el ángulo y lo que es su medida. El ángulo $\measuredangle AOP$ es la región comprendida entre los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OP}$, es una región del plano. La medida de este ángulo es la longitud x del arco $\widehat{AP}$ sobre el círculo unitario. Diremos que este arco $\widehat{AP}$ es subtendido por el ángulo $\measuredangle AOP$. El arco no es el ángulo, ni lo es su longitud. La longitud del arco es la medida del ángulo. Es importante reflexionar sobre estos conceptos y entender las diferencias entre ellos.

3.1.8.2 Las funciones seno y coseno

Desde nuestros estudios de secundaria hemos estudiado las relaciones trigonométricas seno y coseno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.



$$\text{sen } \measuredangle ZXY = \frac{x}{z}$$

$$\cos \measuredangle ZXY = \frac{y}{z}$$

Con base en estas relaciones construiremos las funciones trigonométricas que estudiaremos en cálculo. Estas funciones se aplicarán no solo a los ángulos agudos. Esta es una diferencia entre las relaciones trigonométricas de la secundaria y las funciones trigonométricas del cálculo.

Consideremos el ángulo $\measuredangle AOP$ en el círculo trigonométrico de la figura anterior. La medida en radianes de este ángulo es la longitud x del arco $\widehat{AP}$. Dado que el triángulo ΔQOP es rectángulo con hipotenusa $\overline{OP} = 1$, de la trigonometría elemental tenemos que el coseno de este ángulo es igual a

$$\cos x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} \,.$$

Así pues, tenemos que $\cos x$ es igual a la abscisa del punto P. De forma similar, obtenemos que el seno del ángulo x es igual a la ordenada del punto P

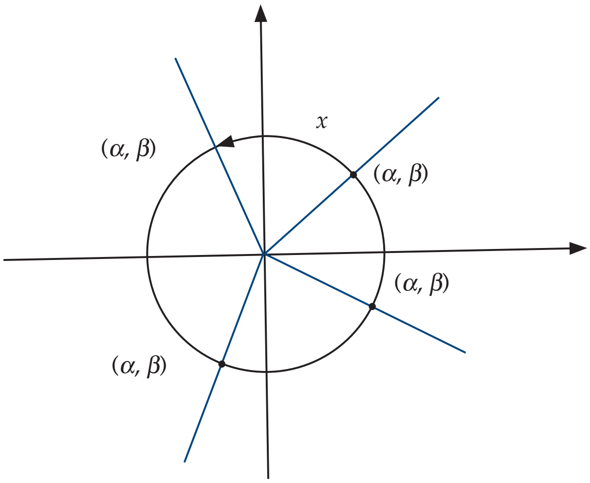
$$\text{sen } x = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QP}}{1} = \overline{QP} \,.$$

Usando estas relaciones para el seno y el coseno de ángulos agudos $0 < x < \frac{\pi}{2}$, extendemos la definición para todos los ángulos $0 \leq x < 2\pi$.

Sea $\measuredangle AOP$ un ángulo de medida en radianes $0 \leq x < 2\pi$. Sea (α, β) la pareja de coordenadas del punto P sobre el círculo unitario. Entonces *definimos* el coseno y el seno del ángulo x, como

$$\cos x = \alpha$$

$$\text{sen } x = \beta$$

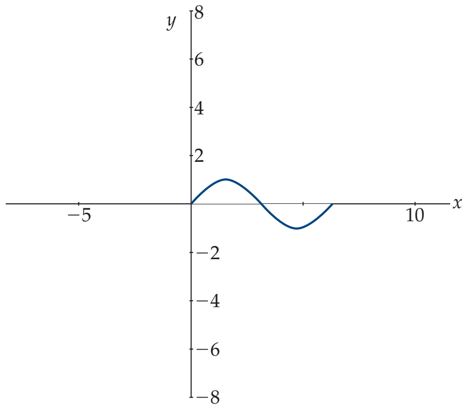


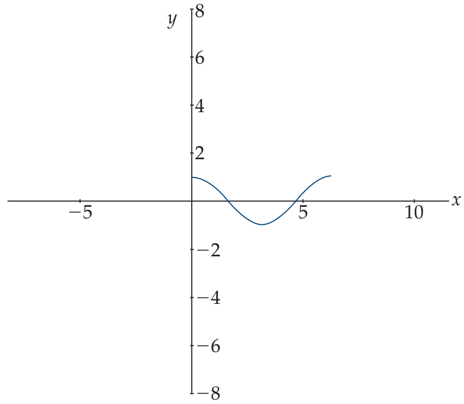
Así que el punto P tiene coordenadas ($\cos x$, $\operatorname{sen} x$). De esta definición se desprenden los siguientes valores particulares.

θ en grados	x en radianes	sen x	cos x
0	0	0	1
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120º	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135º	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150º	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
180º	π	0	-1
210º	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225º	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240º	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
270º	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0

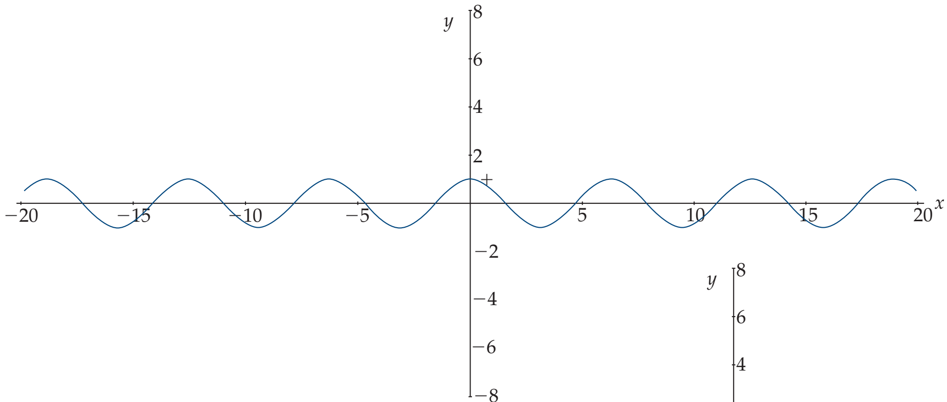
θ en grados	x en radianes	sen x	cos x
300º	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315º	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330º	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

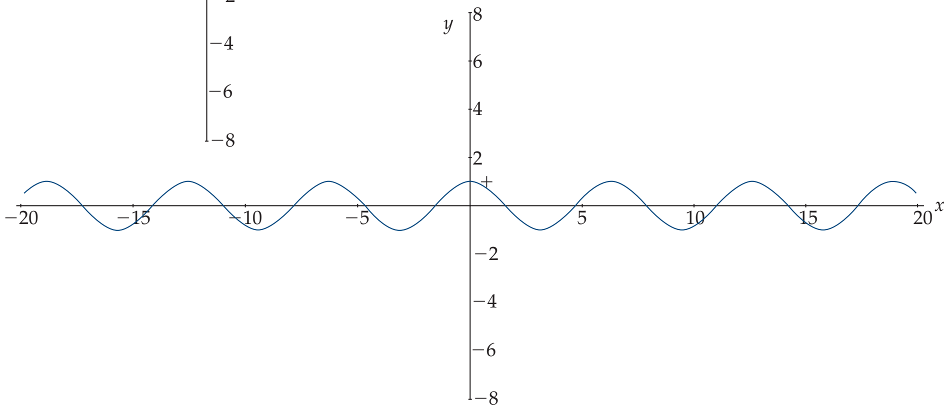
Las funciones seno y coseno, definidas hasta este momento, tienen como dominio el intervalo semiabierto $0 \leq x < 2\pi$, así que sus gráficas se limitan a este intervalo.





Ahora procederemos a extender su definición a todos los reales. Primero expliquemos la idea geométrica de esta extensión; desplacemos las curvas anteriores hacia la derecha e izquierda y "empalmemos" consecutiva e ilimitadamente los trozos de curva como se ilustra en las siguientes gráficas.





La definición analítica de estas funciones es como sigue:

Sea $f(x) = \text{sen } x$ con dominio el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, definida como lo hicimos mediante el círculo trigonométrico. Antes de proceder con la definición de la función extendida consideremos todos los múltiplos de 2π. Si x es cualquier real, se tienen dos posibilidades: o bien x es uno de estos múltiplos, $x = 2n\pi$, o x se encuentra entre dos múltiplos consecutivos, digamos $2n\pi < x < 2\,(n + 1)\pi$. Cualquiera que sea el caso, podemos decir que siempre existe un único entero n tal que $2n\pi \leq x < 2\,(n + 1)\pi$. Sea ahora g: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida como sigue: para toda $x \in \mathbb{R}$ sea n el único entero, tal que $2n\pi \leq x < 2\,(n + 1)\pi$, así que $0 \leq x - 2n\pi < 2\pi$, entonces definimos

$$g(x) = \text{sen}(x - 2n\pi).$$

Es fácil probar que g es una función periódica de periodo $T = 2\pi$, es decir, cumple la siguiente definición.

Definición

Una función f con dominio un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **periódica** de **periodo** T si para toda $x \in A$ se tiene $x + T \in A$ y además

$$f(x) = f(x + T).$$

Note que en la definición anterior, el dominio de f no necesariamente es todo $\mathbb{R}$, pero se debe cumplir que siempre que se tenga un punto x en el dominio de f, también $x + T$ debe estar en ese dominio. Más adelante veremos algunas funciones periódicas que no están definidas en todos los reales $\mathbb{R}$.

A la nueva función g la seguiremos llamando **función seno** y, como ahora será la definitiva, podremos referirnos a ella como la función seno.

De igual modo, la función coseno definida originalmente en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$, la extendemos a todos los reales $\mathbb{R}$. Si denotamos por h la función extendida, entonces para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \cos(x - 2n\pi)$$

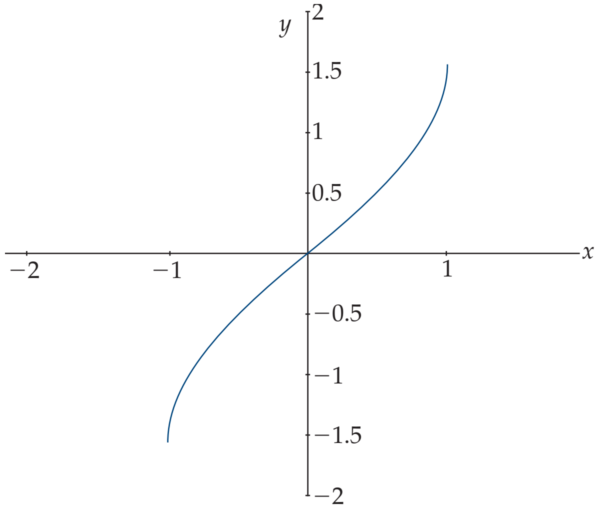
donde n es un entero tal que $2n\pi \leq x < 2\,(n + 1)\pi$.

A la función h la llamaremos la **función coseno**. Dicha función, como la función seno, es periódica de periodo 2π.

Las funciones periódicas son de especial importancia en la modelación o la descripción matemática de sistemas periódicos, es decir, de aquellos sistemas cuyos estados se repiten a intervalos iguales de tiempo. Un ejemplo de sistemas periódicos lo constituye el sistema Sol-Tierra; en este caso, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol es periódico, como también lo es el movimiento de un péndulo.

Como podemos observar, las funciones sen x y cos x no son inyectivas, ya que su misma periodicidad las hace no inyectivas. Sin embargo, la restricción de sen x al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ resulta inyectiva. En este intervalo, la función tiene inversa, a la cual llamaremos **arco seno**:

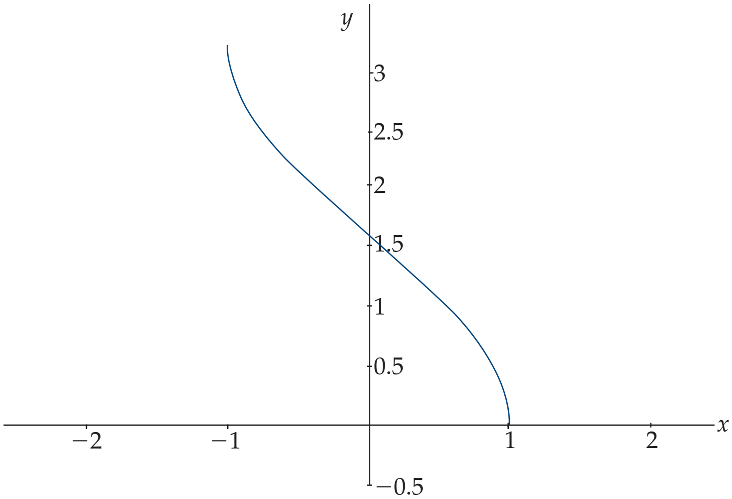
$$\operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x).$$



El dominio de la función arco seno es el intervalo $[-1, 1]$.

De manera similar, la función $\cos x$ restringida al intervalo $[0, \pi]$ es inyectiva y su inversa es llamada **arco coseno**:

$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$$



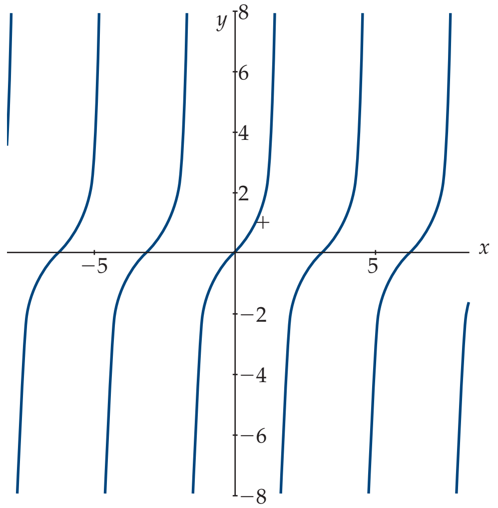
El dominio de la función arco coseno es el intervalo $[-1, 1]$.

Otras funciones trigonométricas son la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante, las cuales definimos, respectivamente, como sigue

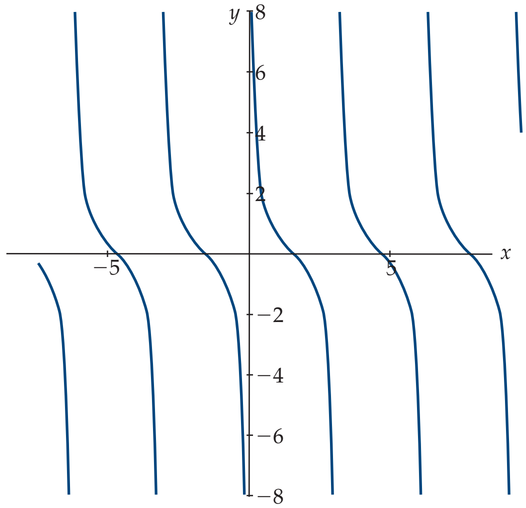
$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\
\cot x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\
\sec x &= \frac{1}{\cos x} \\
\csc x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x}
\end{aligned}$$

El dominio de cada una de estas funciones consta de todos los reales, excepto de aquellos donde la función del denominador se anule. Para tan x y sec x, la función denominador es cos x, por lo que para estas funciones quedan excluidos los reales de la forma $x = \frac{\pi}{2} + nx$, donde n recorre todos los enteros, pues en estos puntos cos x toma el valor cero. Para cot x y csc x, la función denominador es sen x. En este caso, los reales excluidos son los de la forma $x = n\pi$, donde n varía sobre todos los enteros.

A continuación se muestran las gráficas de las funciones tan x y cot x. Estas funciones también son periódicas pero son de periodo π, mientras que sen x y cos x son de periodo 2π.



$y = \tan x$

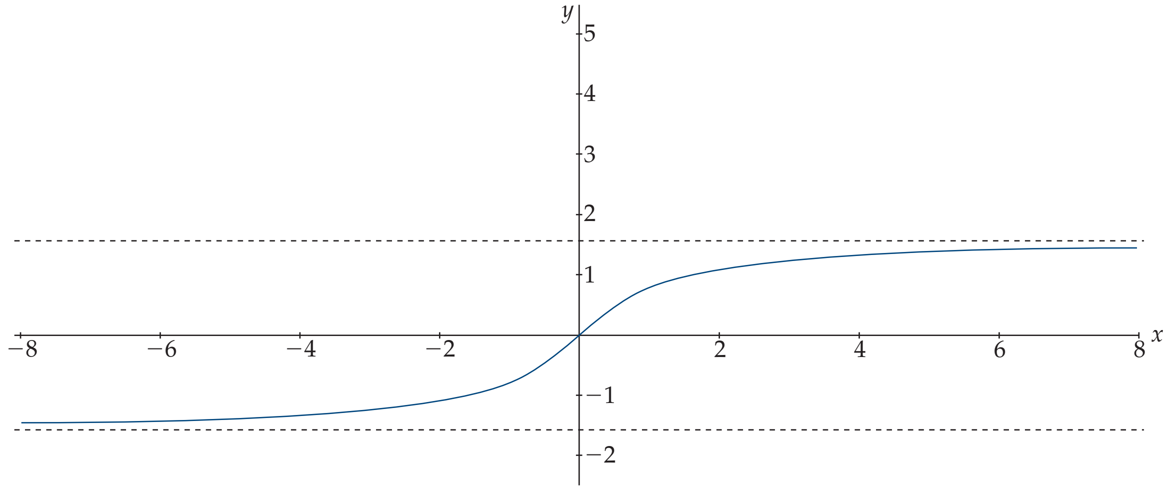


$y = \cot\ x$

Observemos que la función tan x es creciente pero no es inyectiva; sin embargo, si la restringimos al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obtenemos una función inyectiva. Restringida a este intervalo, la función tiene inversa, la cual llamaremos arco tangente:

$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x).$$

La función arctan(x) está definida en todos los reales y toma valores de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

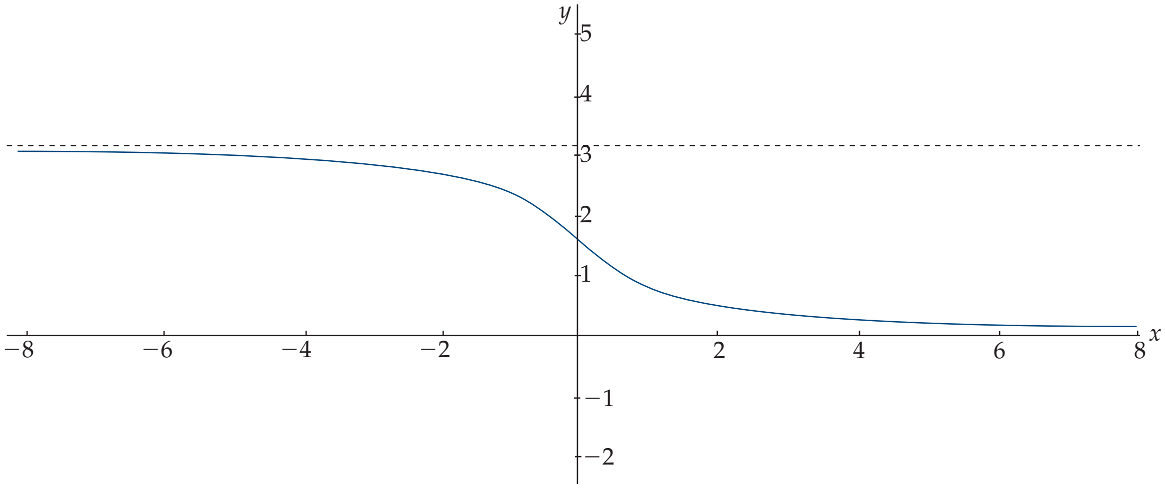


$y = \arctan\ x$

De manera similar, definimos la función arco cotangente. En el intervalo $(0, \pi)$ la función cotangente es inyectiva. La función arco cotangente es la inversa de la función cotangente cuando la restringimos al intervalo $(0, \pi)$:

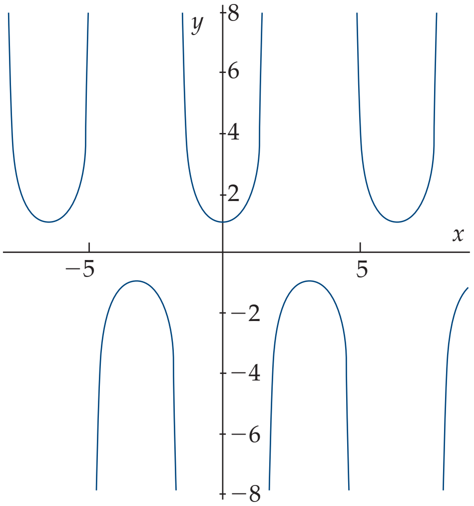
$$\text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$$

La función arccot(x), como en el caso de la función oretan (x), está definida en todos los reales.

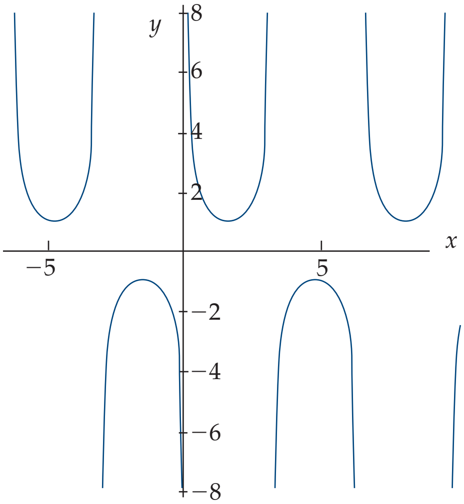


y = arccot x

Consideremos ahora las funciones sec x y csc x, cuyas gráficas se ilustran a continuación.



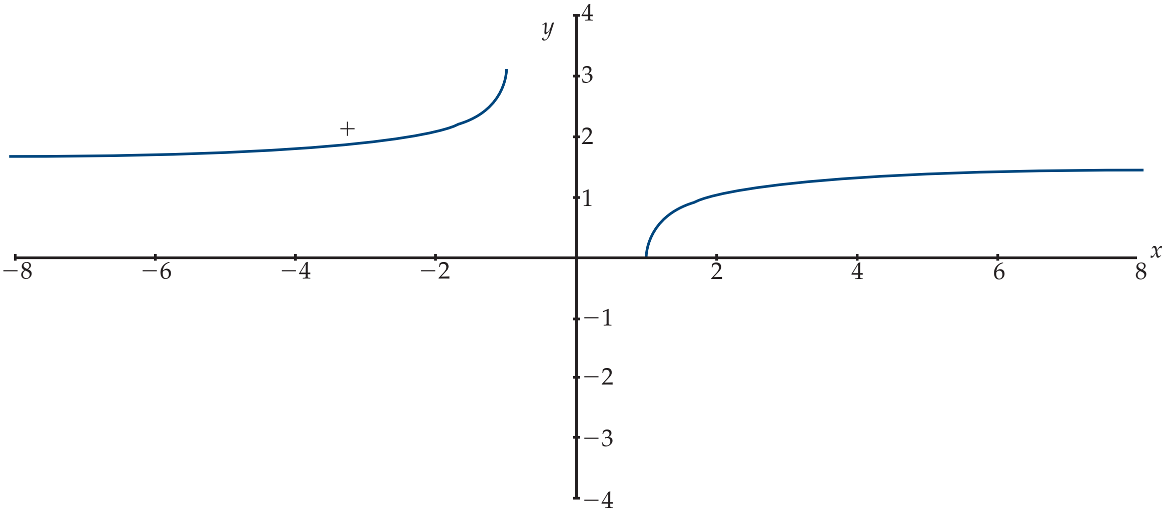
y = sec x



y = csc x

En la unión de intervalos $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, la función sec x es creciente, por lo que, restringida a este conjunto, existe su función inversa, la cual llamaremos **arco secante**:

$$\text{arcsec}(x) = \sec^{-1}(x)$$

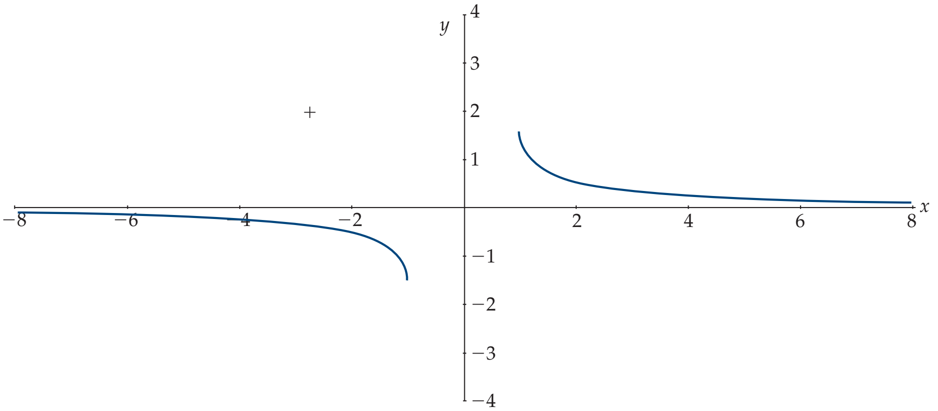


Esta función es creciente y está definida en el conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, constituido por dos intervalos abiertos.

Por otra parte, la función cosecante es decreciente en el conjunto $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$; por tanto, su inversa está definida cuando la restringimos a este conjunto. En este caso, la función inversa se llama **arco cosecante**:

$$\text{arccsc}(x) = \csc^{-1}(x).$$

Esta función, así como arco secante, está definida en el conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



A las funciones antes presentadas:

- funciones polinomiales,
- funciones racionales,
- funciones exponenciales $\text{Exp}(x) = e^x$, logaritmo natural $\log x$,
- las 6 funciones trigonométricas, $\text{sen}\, x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$
- las 6 funciones arco, $\text{arcsen}\, x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\text{arccot}\, x$, $\text{arcsec}\, x$ y $\text{arccsc}\, x$

las llamaremos las **funciones elementales básicas**. Con estas generaremos una familia más amplia de funciones de gran importancia en cálculo diferencial e integral. Este es el tema de la siguiente sección.

3.2 Funciones elementales

Las funciones elementales básicas presentadas en la sección anterior las combinaremos para obtener funciones más complicadas, para ello vamos a requerir las operaciones algebraicas que definimos a continuación.

Definición

Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$. Definimos las funciones SUMA $f + g : X \to \mathbb{R}$ y PRODUCTO $fg : X \to \mathbb{R}$ como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ para toda } x \in X.$$

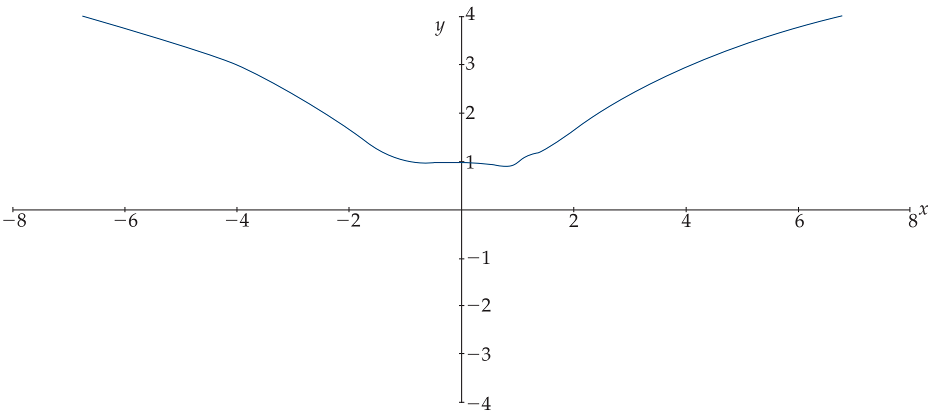
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos la función $\alpha f : X \to \mathbb{R}$ como $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ para toda $x \in X$. Si además se cumple $g(x) \neq 0$, definimos el cociente $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ como $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para toda $x \in X$.

Como casos particulares tenemos las funciones $-f$ y $f - g = f + (-g)$ y , es decir $(-f)(x) = -f(x)$ y $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ para toda $x \in X$.

Combinando las funciones elementales básicas mediante las operaciones aritméticas de suma $(+)$, multiplicación $(\times)$, sustracción $(-)$, división $(\div)$ y extracción de raíces $\sqrt[n]{\ }$; junto con la composición de funciones; aplicadas en cualquier número finito y en cualquier orden a las elementales básicas y a las funciones que resulten de estas aplicaciones, producen lo que se llama **función elemental**. Una función elemental puede tener un aspecto tan complicado como lo permita nuestra imaginación, así que el término *elemental* empleado aquí no es sinónimo de simple o de fácil comprensión, que es una de sus acepciones que podemos encontrar en el diccionario de la Real Academia Española. Por ejemplo, $f(x) = x$ es elemental, pero también lo es

$$g(x) = \operatorname{sen}^2\left[\frac{1 + \dfrac{\sqrt{x^2 + e^x}}{x^6 + 3\cos^2 x}}{\arctan(1 + x^2)}\right] + \log\left(x^4 + e^{\cos x}\right)$$

A continuación se muestra la gráfica de esta función.



Por otra parte, no obstante que la función

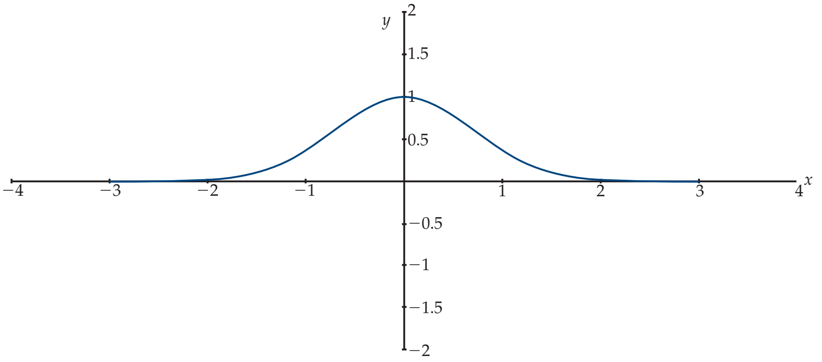
$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es relativamente simple, no es elemental.

Veamos algunos ejemplos interesantes de funciones elementales.

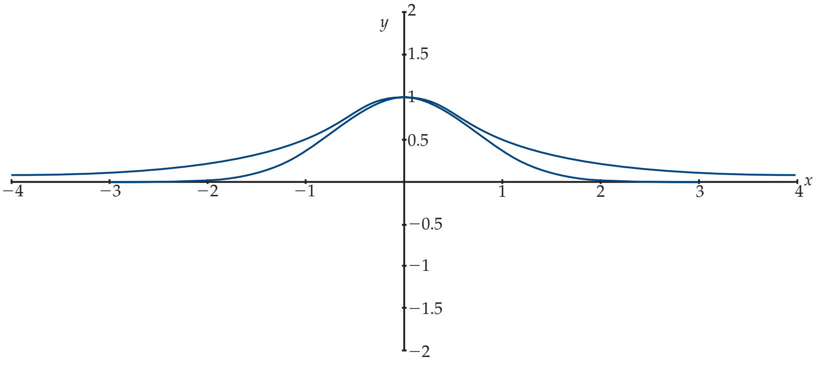
Ejemplo 5

La función $f(x) = e^{-x^2}$ es muy importante tanto en el análisis matemático como en la teoría de las probabilidades. La hemos obtenido componiendo las funciones elementales $\text{Exp}(x) = e^x$ y $g(x) = -x^2$, pues la función $f(x)$ se escribe como $f(x) = \text{Exp}(g(x)) = e^{g(x)}$, por esta razón es una función elemental.



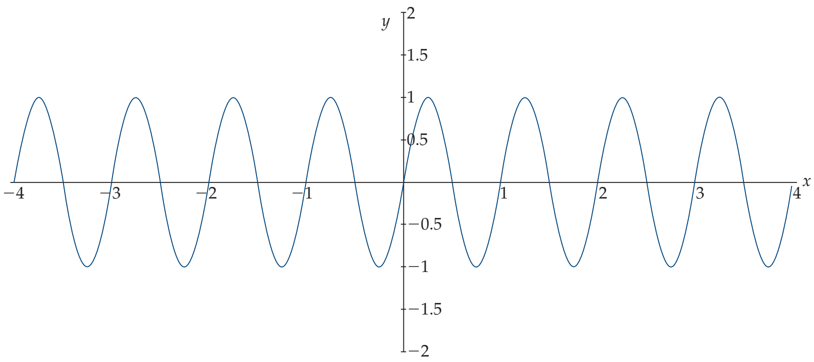
Ejemplo 6

La función $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es elemental y su gráfica se parece a la de la función anterior. En la siguiente figura se muestran las gráficas de ambas funciones. Es un buen ejercicio identificar cada una de ellas.

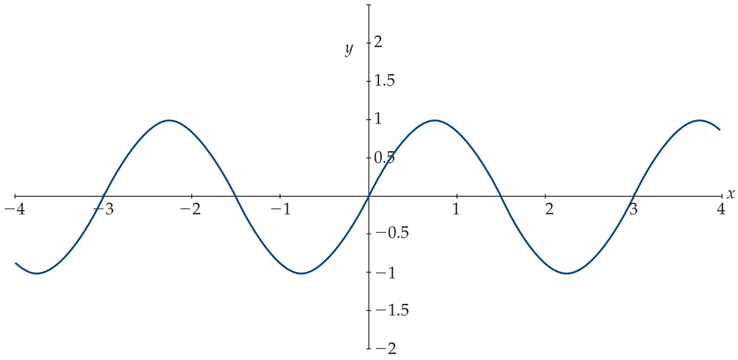


Ejemplo 7

La función $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$ es elemental, pues es composición de funciones elementales, además es periódica de periodo 1.

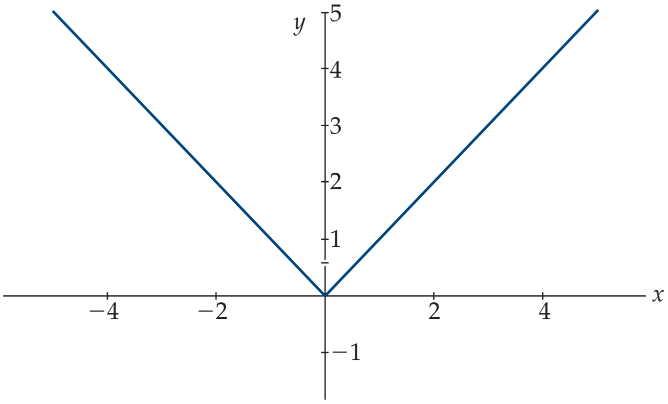


Si T es cualquier número positivo, entonces la función $F(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ es periódica de periodo T. Por ejemplo, la función $G(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ es de periodo 3 y la función $H(x) = \operatorname{sen}(2x)$ es de periodo π. Enseguida se muestra la gráfica de la función G.



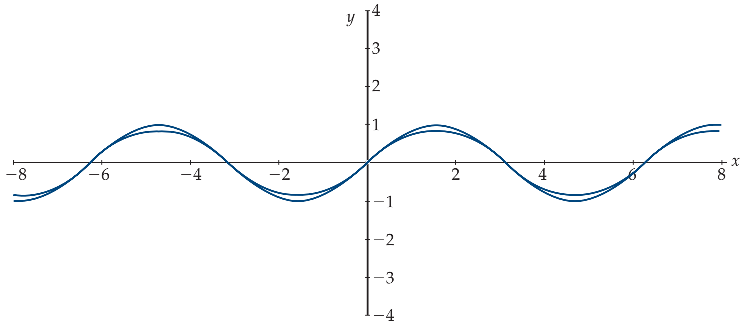
Ejemplo 8

La función valor absoluto $f(x) = |x|$ es elemental, pues se puede escribir $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$, como vimos en el capítulo anterior.



Ejemplo 9

La función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ es elemental, pues es composición de funciones elementales. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones $g(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$. Identifique cada una de ellas y determine razones para su identificación.

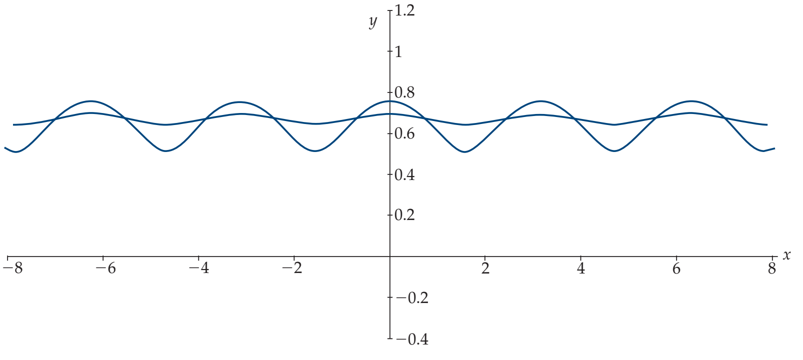


Ejemplo 10

También son elementales las funciones

$$g(x) = \operatorname{sen}(\cos(\cos(\cos x))) \qquad \text{y} \qquad h(x) = \operatorname{sen}(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos x)))))))$$

pues se obtienen mediante la aplicación repetida de la composición de funciones. En la figura siguiente se muestran las gráficas de ambas funciones. Identifique cada una de ellas.



¡Advertencia!

En este juego de combinaciones de funciones, donde podemos aplicar en cualquier número y en cualquier orden las operaciones aritméticas y composición de funciones casi sin restricción alguna, es necesario tomar en cuenta que se cumplan las condiciones para aplicar las operaciones. Por ejemplo, un caso obvio de imposibilidad es $\sqrt{-x^2}$. En términos estrictos, podemos decir que la fórmula aplica solo al real $x = 0$, por lo que si acudimos a esta fórmula para definir una función, el dominio de tal función constará de un solo punto. Una fórmula que aplica a ningún punto es $\sqrt{-1 - x^2}$. Es evidente que para esta fórmula el conjunto de puntos donde aplica es el vacío, sin embargo no siempre será clara una situación como esta, por ejemplo "la función" $f(x) = \log\left(\log\frac{1}{1 + x^2}\right)$ tiene como dominio el conjunto vacío, pero con seguridad no será fácil percatarse de ello. Explique por qué el dominio es ϕ.

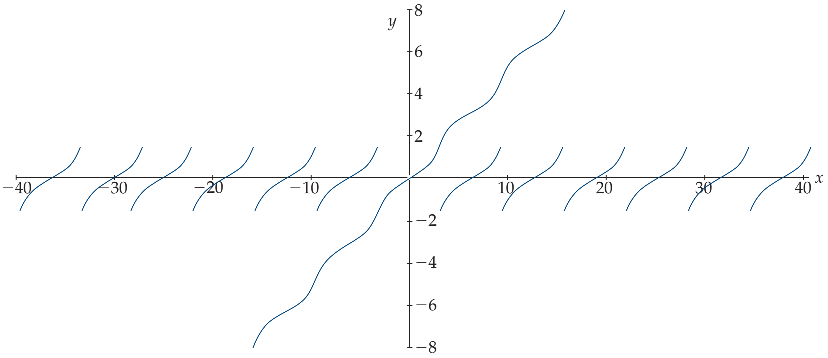
Ejemplo 11

Un par de funciones elementales interesantes son las siguientes:

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$$

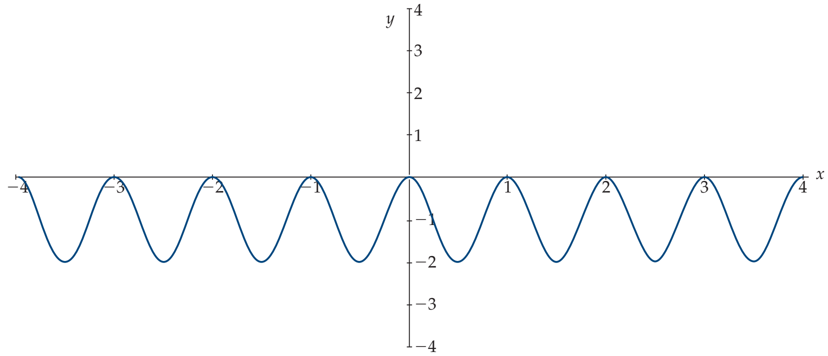
$$h(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}\right)$$

Estas funciones son iguales en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$, pero solo en ese intervalo. Otro detalle que llama la atención es que la función $h(x)$ está definida en todos los reales, mientras que la función $g(x)$ no está definida en los múltiplos de π; por ejemplo, no está definida en $-\pi$ y π, pues $\tan\dfrac{x}{2}$ no está definida en estos puntos. Podemos explicarnos este fenómeno si observamos sus gráficas, las cuales se ilustran en la siguiente figura. Identifique cada una de ellas.

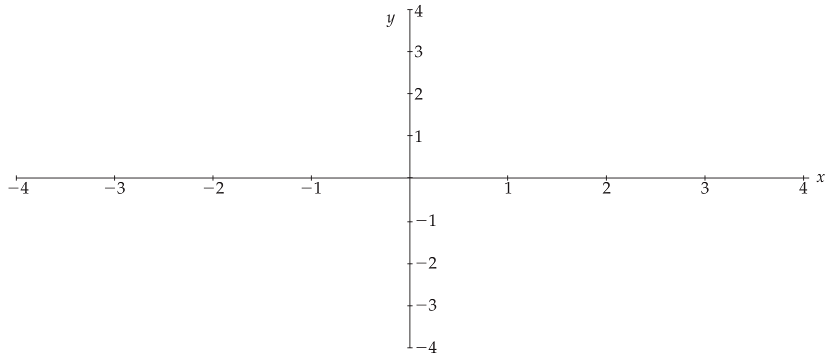


Ejemplo 12

Como vimos en un ejemplo anterior, la función $f(x) = \cos(2\pi x)$ es periódica de periodo 1; esta función toma el valor 1 en todos los enteros. Por tanto, la función $g(x) = f(x) - 1$ toma el valor cero en todos los enteros y en los demás reales es negativa.

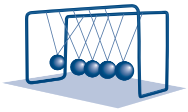


Entonces, la función $h(x) = \sqrt{\cos(2\pi x) - 1}$ está definida solo en los enteros y toma el valor constante cero.



gráfica de $h(x) = \sqrt{\cos(2\pi x) - 1}$

3.3 Problemas y ejercicios



Funciones polinomiales y funciones racionales

I. Elabore las gráficas de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

2. $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

3. $f(x) = x(x^2 - 4)$

4. $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)(x-5) = x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 2x - 40$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

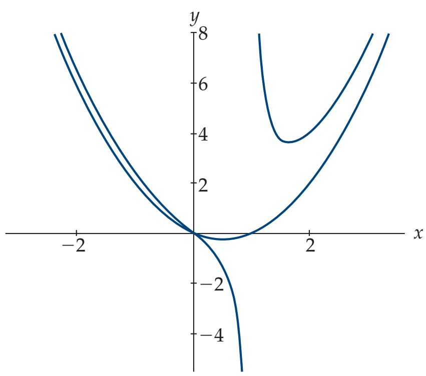
9. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$

II. Usando algún programa de graficación para computadora personal, realice las actividades que se sugieren en los siguientes puntos.

10. Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x}{x-1}$. Esta función racional no está definida en $x = 1$, de hecho la gráfica de $f(x)$ se "pega" a la recta vertical para puntos cercanos a 1; la recta vertical se llama asíntota de la gráfica de $f(x)$. Ahora, realicemos la división para obtener un cociente y un residuo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x}{x-1} = x^2 - x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

En la computadora personal grafique $f(x)$ y $x^2 - x + 1$.



Observe que para x grandes en valor absoluto, la gráfica de $f(x)$ está próxima a la gráfica del cociente $x^2 - x + 1$. En este caso decimos que $f(x)$ tiende asintóticamente a $x^2 - x + 1$ cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ y que la gráfica de $x^2 - x + 1$ es una curva asíntota de $f(x)$.

Halle las curvas asíntotas de las siguientes funciones racionales

11. $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x^2}$

Funciones algebraicas

13. Sea la función algebraica explícita $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Halle un polinomio en dos variables

$$P(x,y) = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0$$

donde las funciones $a_i(x)$ son polinomios en x, tal que si $y = f(x)$, entonces

$$P(x,y) = 0.$$

14. Sea $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. Halle un polinomio en dos variables

$$P(x,y) = a_4(x)y^4 + a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0$$

donde las funciones $a_i(x)$ son polinomios en x, tal que $P(x, f(x)) = 0$.

15. Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

16. Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

17. Usando una computadora personal, grafique las funciones $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $f(x) = \sqrt{0.1 + x^2}$ y $f(x) = \sqrt{0.000001 + x^2}$. ¿Qué fenómeno gráfico observa?

Funciones trascendentes

18. Usando la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, bosqueje la gráfica de la función $g(x) = f(x - 1)$.

19. Con base en la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$, elabore la gráfica de la función $g(x) = f(2\pi x)$. Indique cuál es el periodo de g.

20. Dibuje la gráfica de la función $g(x) = f\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$. Indique cuál es el periodo de g.

21. Señale cuál es el periodo de la función $f(x) = 2\,\text{sen}(\pi x) + 3\cos(\pi x)$.

22. Pruebe que la función $f(x) = \text{sen}(\pi x) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ es periódica. Halle su periodo.

23. Pruebe que la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{7}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$ es periódica. Halle su periodo.

24. Sean f y g funciones periódicas. Sea T_1 el periodo de f y T_2 el de g. Pruebe que si T_1 y T_2 son enteros positivos, entonces $f + g$ es una función periódica y halle su periodo.

25. Sean f_1, f_2 y f_3 funciones periódicas de periodos enteros T_1, T_2 y T_3, respectivamente. Halle el periodo de la función $af_1 + bf_2 + cf_3$, donde a, b y c son constantes diferentes de cero.

26. Determine el dominio de la función $f(x) = \sec(2\pi x) = \dfrac{1}{\cos(2\pi x)}$.

27. Halle el dominio de la función $f(x) = \csc\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.

28. Diga para qué valores de x se cumple la igualdad

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

y para cuáles se cumple

$$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

29. Diga para qué valores de x se aplica la fórmula

$$\text{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

y para cuáles, la fórmula

$$\text{sen}\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

30. Pruebe la fórmula

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

31. Diga para qué valores de x, se cumple

$$\sec x = \sqrt{1+\tan^2 x}$$

y para cuáles se satisface

$$\sec x = -\sqrt{1+\tan^2 x}$$

32. Grafique la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Esta función se llama *función signo*.

33. Grafique la función

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{x+|x|}{2x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Note que para $x \neq 0$, $H(x)$ puede escribirse como $H(x) = \dfrac{1+f(x)}{2}$, donde $f(x)$ es la función del ejemplo anterior. La función $H(x)$ se llama función *escalón de Heaviside*.

34. Sea a un número real y sea $H(x)$ la función escalón de Heaviside. Definamos:

$$H_a(x) = H(x-a).$$

Grafique esta función. La gráfica es una traslación de la gráfica de $H(x)$, considere los casos $a > 0$ y $a < 0$.

35. Grafique la función

$$U(x) = H(-x)$$

36. Sea b un número real y sea $U_b(x)$ la función definida como

$$U_b(x) = U(x-b).$$

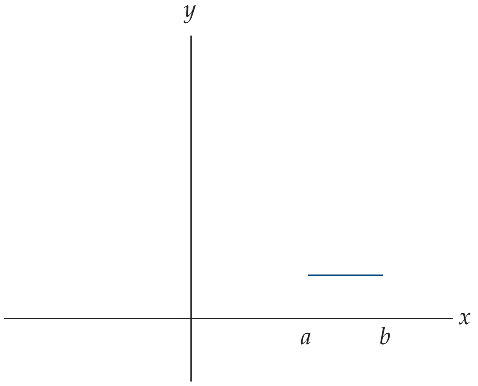
Grafique esta función considerando los casos $b > 0$ y $b < 0$.

37. Sean a y b números reales, tales que $a < b$. Sea la función

$$U_{ab}(x) = H(x-a)\,U(x-b)$$

Verifique que se trata de la función

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{si} \quad b < x \end{cases}$$



38. Grafique la función

$$f(x) = H(x-1)\,U(x-2)x^2$$

La gráfica de esta función "es el tramo" de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $(1, 2)$. En realidad, fuera de este intervalo, la función toma el valor cero, con excepción de los puntos $x = 1, 2$, donde no está definida.

39. Grafique la función

$$g(x) = H(x+1)\,U(x-1)x^3$$

Se trata del "tramo" de la parábola cúbica $y = x^3$ en el intervalo $(-1, 1)$.

40. Grafique la función

$$f(x) = H(x-1)\,U(x) + H(x-2)\,U(x-3).$$

Verifique que se trata de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

41. Sea $f(x)$ la función del ejemplo anterior. Grafique la función

$$h(x) = f(x)(-x^2 + 1).$$

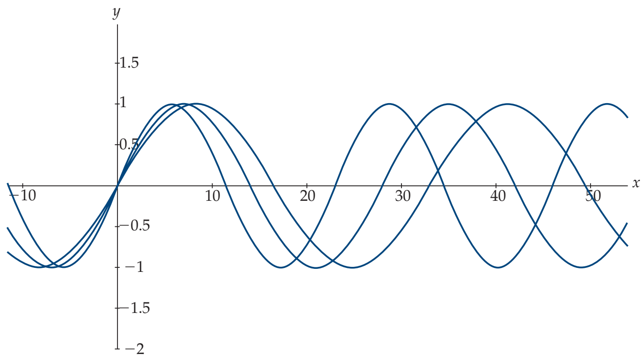
42. Grafique la función

$$f(x) = H(x+1)\,U(x)(x+1) + H(x)\,U(x+1)(-x^2+1) + H(x-1)\,U(x-2)(x-1)$$

Se trata de una función formada por tramos de diferentes funciones.

Problemas de aplicación

43. El **biorritmo** se refiere al ciclo de fenómenos naturales que se manifiestan en las personas y que se traducen en sentimientos, actitudes, estados de ánimo, estado físico y estado intelectual. Estos estados de las personas se repiten cada cierto tiempo, por lo que se trata de fenómenos cíclicos. El estado físico, que se refiere a nuestra fuerza, resistencia o propensión a enfermedades, tiene un periodo de 23 días. El estado emocional, que se refiere al optimismo, la euforia, la depresión o la irritabilidad, tiene un periodo de 28 días. El estado intelectual que se manifiesta en nuestras capacidades de cálculo, razonamiento y aprendizaje, memoria y velocidad de reacción, tiene un periodo de 33 días. Para cada individuo, estos estados están descritos por funciones senoidales, que tienen el valor cero en el instante de su nacimiento. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las tres funciones correspondientes.



Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué edad tendrá la persona cuando sus estados físico y emocional estén (ambos) en el origen?

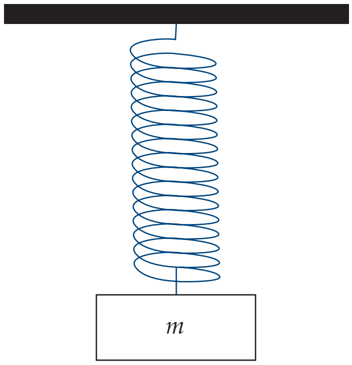
b) ¿Hay algún momento en el que los tres estados se encuentren en su máximo nivel?

c) ¿En qué momento los estados intelectual y físico están (ambos) en su mínimo nivel?

d) ¿Qué edad tendrá la persona en el momento en el que las tres curvas estén en el origen nuevamente?

Movimiento armónico simple

44. Un cuerpo de masa $m = 2$ kg, acoplado a un resorte de constante de Hooke $k = 8\,\frac{Nt}{m}$, oscila sin fricción.



Respecto a un eje coordenado, el movimiento del cuerpo está descrito por una función de la forma

$$x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

donde k y m son las constantes antes dadas. Si el cuerpo se coloca en una posición inicial de manera que el resorte se estira una longitud de 20 cm y se libera en el instante $t = 0$:

Responda las siguientes preguntas:

a) Halle el valor de la constante A.
b) ¿En qué instante, después del inicio del movimiento, el cuerpo se encuentra en el origen de coordenadas?
c) ¿Cuál es el primer instante, después del inicio $t = 0$, en el que el sistema se encuentra con la máxima elongación del resorte?
d) Diga cuál es el periodo del movimiento, es decir, cuánto tiempo le lleva al cuerpo regresar al punto de partida.
e) Halle la frecuencia del movimiento, es decir, el número de ciclos que realiza el cuerpo en un segundo.
f) Halle el número de ciclos que el cuerpo realiza en un minuto.

Ley de enfriamiento de Newton

45. Según esta ley, un cuerpo que se encuentra a una temperatura T_0 en grados centígrados, en un medio ambiente de temperatura A, con $T_0 > A$, se enfría de acuerdo con una función del tiempo t, de la forma

$$T(t) = (T_0 - A)e^{kt} + A$$

donde k es una constante que depende de las características físicas del cuerpo y está asociada a la velocidad con la cual se enfría el cuerpo. Por ejemplo, se enfría más rápido una bola de acero que una papa.

Si originalmente un cuerpo se encuentra a una temperatura de 100º centígrados en un ambiente de 20º y después de 10 minutos tiene una temperatura de 60º, responda las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tiempo se requiere, desde el inicio del enfriamiento, para que el cuerpo alcance una temperatura de 40 ºC?
b) Después del instante en que el cuerpo se encuentra a 40 ºC, ¿cuánto baja su temperatura al cabo de un minuto?, ¿cuánto al cabo de dos minutos?
c) ¿A qué temperatura se encuentra el cuerpo al cabo de 10 horas, desde que inicia el enfriamiento?
d) Escriba, con valores numéricos de los parámetros, la función
$$T(t) = (T_0 - A)e^{kt} + A.$$

Crecimiento poblacional en México

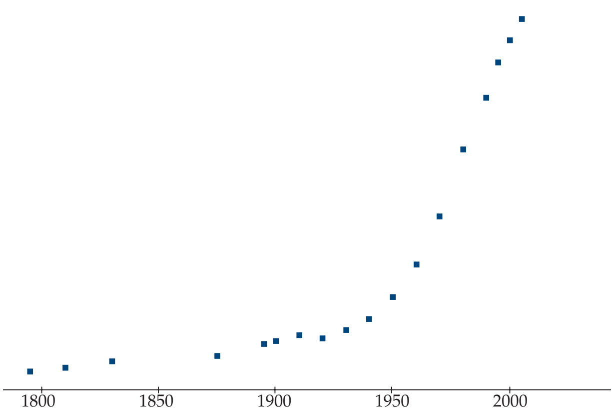
46. Con base en los datos estadísticos obtenidos en los censos de población oficiales a partir de 1895,[1] la población de México ha cambiado durante los siglos XX y XXI, según consigna la tabla siguiente. En esta también aparecen los datos de los dos conteos de población llevados a cabo en 1995 y 2005, los resultados del último se dieron a conocer en octubre de 2005. Asimismo, se incluyen algunos datos históricos de la población, no censos oficiales, para el lapso comprendido entre los años 1795 y 1875.

En general, es posible observar en la tabla que hay un crecimiento de la población conforme transcurren los años, sin embargo, es notable el decrecimiento en la población entre 1910 y 1921. La explicación que algunos encuentran a este fenómeno, la cual parece muy razonable, es el alto número de

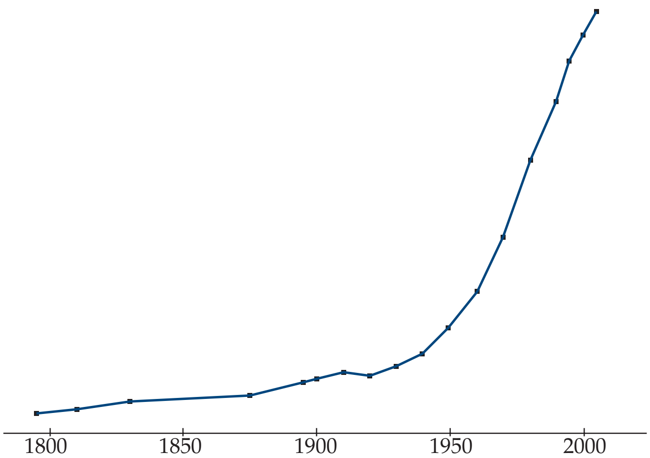
[1] Los datos de los censos oficiales se obtuvieron de la página web del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI).

Año	Número de habitantes
1795	5 200 000
1810	6 122 000
1830	7 996 000
1875	9 495 000
(Primer censo oficial) 1895	12 700 294
1900	13 607 259
1910	15 160 369
1920	14 334 780
1930	16 552 722
1940	19 653 552
1950	25 791 017
1960	34 923 129
1970	48 225 238
1980	66 846 833
1990	81 249 645
(Primer conteo de población y vivienda) 1995	91 158 290
2000	97 361 711
(Segundo conteo de población y vivienda) 2005	

decesos que se suscitaron durante la lucha armada de la Revolución Mexicana, ya fuera por la guerra o por las epidemias que acontecieron. A continuación se muestra la gráfica correspondiente a la tabla.



Esta tabla solo muestra el número de habitantes en años muy específicos, pero la población cambia día a día, de hecho lo hace minuto a minuto. A partir de la tabla y con la ayuda de algunos cálculos aritméticos simples podemos concluir, por ejemplo, que en la última década nació, en promedio, un mexicano cada 20 segundos; es decir, en el lapso de un minuto nacieron tres nuevos habitantes. Así que en estos momentos es muy probable que esté naciendo una niña o un niño en algún lugar del país. Pero, mantener los datos actualizados cada vez que nace un nuevo habitante es una tarea casi imposible, al menos hasta el día de hoy. Para saber el número *aproximado* de habitantes en fechas específicas o en momentos intermedios entre los años que aparecen en la tabla, podemos acudir a "completar la gráfica". Una manera es uniendo los puntos de la gráfica con segmentos de recta, este



proceso se llama interpolación. La ecuación de cada uno de estos segmentos de recta se puede obtener con facilidad, dado que se conocen dos puntos de cada segmento. Cuando construimos la poligonal con estos segmentos, podemos apreciar mejor el comportamiento de la población mexicana durante los últimos 200 años.

En la gráfica real, los intervalos de interpolación no necesariamente son segmentos de recta, de hecho casi es seguro que no lo sean, pero con estos segmentos rectilíneos tenemos un recurso para calcular *de manera aproximada* la población en cualquier momento o instante. Por ejemplo, de esta manera podemos calcular el número aproximado de habitantes que había en 1975, construyendo la ecuación de la recta que pasa por los puntos correspondientes a los años 1970 y 1980 y tomando como valor aproximado de la población para el año 1975, el dado por esta recta.



Con base en la gráfica en cuestión, responda las siguientes preguntas.

a) Si se hubiese mantenido la tendencia de crecimiento de la población de la década 1900-1910 entre los años 1910 y 1920, ¿cuál hubiese sido la población total del país en 1920?
b) ¿Aproximadamente cuántos mexicanos murieron en la década 1910-1920?
c) ¿Cuál fue la tasa de crecimiento en la década 1980-1990?, ¿y en la década 1990-2000?
d) En el siglo pasado, ¿cuál fue la década de mayor tasa de crecimiento?
e) En el siglo pasado (sin contar la década 1910-1920), ¿cuál fue la menor tasa de crecimiento?
f) ¿Aproximadamente en qué año nuestro país tenía 90 millones de habitantes?
g) ¿Suponiendo que los segmentos de recta son "confiables", ¿en qué mes aproximadamente hubo una población de 50 millones de habitantes?
h) Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos correspondientes a los años 1970 y 1980. Encuentre un valor aproximado de la población del año 1975, tomando el punto correspondiente a esta recta.

Carbono 14

47. Este elemento químico que se representa por ^{14}C es un radioisótopo del carbono de masa atómica 14.003241. Fue descubierto por Martin Kamen y Sam Ruben, el 27 de febrero de 1940. Su núcleo contiene 6 protones y 8 neutrones. Debido a la inestabilidad de este isótopo, una masa m decae a la mitad de su valor en un lapso de 5 730 años, a este tiempo se le llama *vida media* del isótopo. Dada su presencia en los materiales orgánicos, el carbono-14 se emplea en la datación de objetos cuyas edades son menores a 60 000 años. Está basado en la ley de decaimiento exponencial de los isótopos radiactivos, dada por una función de la forma

$$C(t) = Ae^{kt}$$

donde A y k son constantes.

Supongamos que se tienen 100 miligramos de ^{14}C. Responda las siguientes preguntas:

a) Determine el valor de la constante A.
b) Usando la vida media de ^{14}C, determine el valor de la constante k.
c) ¿Cuánto tiempo le lleva decaer a 25 miligramos?
d) Después de 50 000 años, ¿cuántos de los 100 miligramos quedan?

Cálculo de la gravedad

48. La fuerza que experimenta un cuerpo sobre la superficie de la Tierra y fuera de ella depende de la altura h sobre el nivel del mar a la que se encuentre el cuerpo. Esta fuerza que en la vida diaria identificamos como el peso del cuerpo, se debe a que este se encuentra en el campo gravitacional de la Tierra, y está dada por la función

$$P(h) = g(h)m$$

en donde

$$g(h) = \frac{9.8}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

En esta fórmula, m es la masa del cuerpo y $R = 6\,378\,000$ es el radio de la Tierra. La masa m está dada en kilogramos y el radio R y la altura h están dados en metros. La unidad de peso es el newton: Nt $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{seg}^2}$, así que a nivel del mar, un cuerpo de masa 1 kg pesa 9.8 nt. A $g(h)$ se le llama *constante de gravedad*, que en realidad no es una constante, pues varía con la altura h. Debido al orden de magnitud de R, el valor de $g(h)$ varía poco, en rangos de variación de h relativamente pequeños (por ejemplo, en un rango de 1 000 metros), por esta razón suele considerarse cons-tante para ese tipo de variaciones.

Responda las siguientes preguntas.

a) Con la ayuda de una calculadora o de un equipo de cómputo, elabore una tabla de valores para $g(h)$, correspondientes a alturas que varíen de 100 en 100 metros para $0 \leq h \leq 10\,000$.

b) ¿Cuál es la variación de la gravedad entre su valor a nivel del mar y su valor a una altura de 100 kilómetros?

c) ¿A qué altura la gravedad $g(h)$ se reduce a la mitad? A esa altura, el cuerpo pesa la mitad de lo que pesa a nivel del mar.

d) ¿A qué altura la gravedad $g(h)$ se reduce a su décima parte?

e) ¿Cuánto pesa un hombre de 70 kg a nivel del mar y cuánto en el pico del Everest, que se encuentra a una altura de 8 848 m sobre el nivel del mar? ¿En qué factor se reduce su peso del nivel del mar a la altura del Everest?



f) Se estima que la masa de la Luna es 7.35×10^{22} kg y que su distancia media a la Tierra es 380 000 km, ¿Cuánto pesa la Luna? ¿Cuánto pesaría la Luna en la superficie de la Tierra?

Cálculo de la gravedad lunar

49. El peso de un cuerpo de masa m, sobre la superficie de la Luna, y fuera de ella, depende de la altura h, medida desde la superficie lunar, a la que se encuentre el cuerpo. Este peso está dado por la fórmula

$$P = g_L(h)m$$

La función gravedad en la Luna $g_L(h)$ está dada por

$$g_L(h) = \frac{1.62}{\left(1 + \frac{h}{R_L}\right)^2}$$

donde $R_L = 1.738 \times 10^6$ es el radio de la Luna medido en metros.

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesa un hombre de 70 kg en la superficie lunar?

b) ¿Qué relación hay entre el peso de un hombre de 70 kg en la superficie de la Tierra y su peso en la superficie lunar?

c) ¿A qué altura desde la superficie de la Tierra, debe estar un hombre para que su peso sea igual al que tiene en la superficie lunar?

d) Un hombre levanta un bulto de cemento en la superficie lunar. ¿De cuántos kilogramos tendría que ser este bulto, para que equivaliera al peso de un bulto de 50 kg en la superficie de la Tierra?

e) En los Juegos Olímpicos de 2004, los cuales se llevaron a cabo en Atenas, Grecia, la pesista china Tang Gonghong, que participaba en la categoría de los 75 kg, levantó de tirón el peso récord de 182.5 kg. ¿Cuántos kilogramos podría levantar de tirón esta atleta en la superficie lunar?

f) Se estima que la masa de la Tierra es de 5.97×10^2 kg. ¿Cuánto pesa la Tierra en el campo gravitacional de la Luna?

g) Supongamos que la altura a la que puede saltar verticalmente un hombre, quien está de pie y lo hace solo con el impulso de sus piernas, es directamente proporcional a su fuerza corporal e inversamente a su peso. Si en la superficie terrestre salta 30 cm, ¿cuánto puede saltar en la Luna?

h) La gravedad $g_J(h)$ en Júpiter está dada por

$$g_J(h) = \frac{24.8}{\left(1 + \frac{h}{R_J}\right)^2}$$

donde $R_J = 7.1492 \times 10^7$ m es el radio ecuatorial de Júpiter. ¿Cuántos kilogramos podría levantar de tirón Tang Gonghong en la superficie de Júpiter?

Densidad del agua

50. En general, los cuerpos se expanden cuando aumenta su temperatura, lo cual implica que su densidad disminuye al crecer su temperatura. El agua presenta un fenómeno interesante, en determinado rango de temperaturas su volumen disminuye al aumentar su temperatura.

Entre 0º y 10º centígrados, la densidad del agua a la presión de una atmósfera está dada en $\frac{g}{\text{cm}^2}$, por la función cuadrática

$$d(T) = -0.0000075T^2 + 0.00006T + 0.99984$$

donde T es la temperatura en grados centígrados.

Responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la densidad del agua a 0º centígrados?
b) ¿Cuál es la densidad del agua a 10º centígrados?
c) ¿Cuál es la temperatura de mayor densidad del agua en el rango establecido?

CAPÍTULO 4

SUCESIO[...] DE REALES



4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos el concepto de sucesión, asi como el de limite y algunas de sus propiedades, que nos permitirán realizar cálculos sobre los mismos. También estudiaremos algunos resultados sobre límites, con los cuales justificaremos las definiciones de los famosos números e, π y γ. En un terreno más teórico, con la ayuda de las sucesiones y sus límites, definiremos con precisión los números reales.

Es importante desarrollar una acertada y completa teoría de límites de sucesiones, pues esta nos facilitará enormemente nuestro estudio sobre límites y continuidad de funciones; ¡vale la pena invertir este esfuerzo!

Comencemos con la definición de sucesión.

4.1.1 Concepto de sucesión

Definición 1

Una **sucesión** de números reales es toda lista o colección ordenada infinita de números, de los cuales algunos, o todos ellos, pueden coincidir entre sí.

Una diferencia que hay entre una sucesión y un conjunto es que en una sucesión hay un *orden*; se trata de una colección *ordenada*, de modo que hay un primer elemento, un segundo, etcétera. Otra diferencia es que la colección ordenada es *infinita como lista*, aunque no necesariamente como conjunto.

Una manera de escribir o describir una sucesión es mediante una tabla infinita, con lo cual queda explícito el orden.

1	**2**	**3**	**...**
a	b	c	...

El número del renglón superior indica la posición o el orden que ocupa el número correspondiente del renglón inferior. Este último es propiamente la sucesión. Los tres puntos suspensivos indican que se trata de una lista infinita. Dada la propiedad de infinitud de una sucesión, es interesante preguntarse: ¿qué significa que la sucesión esté completamente definida? Esto quiere decir que para toda posición que elijamos, debe ser posible determinar el elemento correspondiente.

En lugar de escribir dos renglones en casillas, como lo hicimos antes, ahora lo hacemos escribiendo únicamente el renglón inferior, conservando la posición o el orden de cada término. Para representar en forma general una sucesión, emplearemos cualquier letra con subíndices consecutivos, de esta manera indicamos el orden correspondiente, como se muestra en los ejemplos siguientes

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

Que una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ esté definida, significa que es posible determinar el valor de x_n para todo entero positivo n. A cada sucesión hay asociada una función, digamos:

$$x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x(n) = x_n.$$

Conocer la sucesión equivale a conocer la función asociada; de hecho, muchos autores definen como sucesión a la función misma $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se presume que con ello se define de manera rigurosa el concepto de sucesión. Si bien, el concepto de sucesión se precisa al entender esta como función, en la práctica resulta útil interpretarla como una lista o una colección ordenada infinita.

No pocos autores, refiriéndose a algunos ejemplos de sucesiones, proporcionan los primeros términos de ellas; así, por ejemplo, escriben:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

dando por supuesto que el lector entenderá de qué sucesión se trata. Consideran que los tres primeros términos son suficientes para comunicar al lector la ley o el patrón de formación de los términos restantes. En estos casos, los autores están acudiendo al sentido común del lector. Sin embargo, es obvio que unos cuantos términos no son suficientes para definir una sucesión, pues no obstante que en la mayoría de los ejemplos de los textos hay una "ley natural" de formación *sugerida* por esos primeros términos, dos estudiantes distintos podrían argumentar legítimamente dos correspondientes leyes de formación diferentes. Por ejemplo, si escribimos:

$$3, 5, 7, \ldots$$

algunos podrían opinar que el cuarto término es 9, mientras que sería válido que otros aseguraran que es el 11, argumentando que se trata de la sucesión de los primos impares.

Así, una sucesión no queda definida a partir de sus tres primeros términos, ni siquiera a partir de los primeros 1 000 o cualquier número finito, por grande que este sea. Por otra parte, hay casos donde la ley de formación no es tan "natural" y que, por tanto, podría dar lugar a ambigüedades, aun con la mejor de las voluntades de aceptar que con ello se tuviese definida la sucesión. Así pues, para tener definida una sucesión hemos de explicitar el valor de x_n para cada entero positivo n o bien proporcionar una regla o mecanismo para hallar x_n, para cada natural n. La manera de hacerlo puede ser mediante una fórmula matemática, una descripción verbal e incluso es aceptable un procedimiento para obtener x_n, que en teoría sea posible realizar (aun cuando en la práctica no lo sea).

No obstante que sea incorrecto considerar definida una sucesión exhibiendo unos cuantos términos, muchas veces nosotros así lo haremos, sobre todo cuando con ello planteemos problemas interesantes. Por ejemplo, resulta instructivo, y en ocasiones es todo un reto, tratar de hallar la ley de formación de los elementos de una sucesión, a partir de sus primeros términos. Para ser consistente con lo antes expuesto, refirámonos al problema de determinar una *posible ley de formación* de los términos de la sucesión o bien, lo que es mejor, determinar una ley de formación para ese número finito de términos. Al final de este capítulo aparecen algunos ejercicios y pro-blemas interesantes.

Ejemplo 1

Sea la sucesión

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

dada por $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. En general, $x_n = (-1)^{n+1}$. Se trata de la sucesión

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

Ejemplo 2

La sucesión

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

dada por

$$x_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

es la sucesión

$$1, 0, 1, 0 \ldots$$

Ejemplo 3

Las sucesiones

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

dadas por

$$a_n = n^5 + 85n^3 + 274n$$
$$b_n = 15n^4 + 225n^2 + 120$$

coinciden en sus primeros cinco elementos:

$$a_1 = b_1 = 360$$
$$a_2 = b_2 = 1\,260$$
$$a_3 = b_3 = 3\,360$$
$$a_4 = b_4 = 7\,560$$
$$a_5 = b_5 = 15\,120$$

pero se trata de sucesiones diferentes, ya que

$$a_6 = 27\,280$$
$$b_6 = 27\,660$$

Ejemplo 4

“Dada” la sucesión

$$1, 8, 27, \ \ldots$$

podríamos decir que “la ley de formación” está dada por

$$a_n = n^3.$$

Otra posible ley de formación también es

$$a_n = 6n^2 - 11n + 6$$

Con toda seguridad, la primera puede parecernos “más natural”.

La sucesión del siguiente ejemplo es una de las que describiremos verbalmente, ya que, cuando menos a primera vista, no parece que exista una "fórmula cerrada" para la ley de formación.

Ejemplo 5

Considérese la sucesión construida por bloques de términos:

Sea 1 el primer término y cero el segundo; estos dos elementos constituyen el primer bloque. El segundo estará formado por los siguientes cuatro elementos, siendo los dos primeros igual a 1 y los dos últimos igual a cero. El tercer bloque estará formado por $8 = 2^3$ elementos, siendo los cuatro primeros igual a 1 y los siguientes cuatro igual a cero. Teniendo definido el bloque $(n - 1)$, el bloque n estará constituido por los siguientes 2^n elementos, siendo los primeros 2^{n-1} igual a 1 y los otros tantos restantes igual a cero. Así, la sucesión tiene el siguiente aspecto

$$1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \ \ldots$$

Este es un ejemplo en donde la descripción precisa de la sucesión no es tan interesante como el problema que plantearemos a continuación.

El problema consiste en determinar el elemento de la sucesión correspondiente a una posición dada. Por ejemplo, determinemos el elemento de la sucesión que ocupa la posición 3 585 427. Para resolver este problema observemos que el primer bloque de términos de la sucesión tiene 2 elementos, el segundo 2^2 elementos, el tercero 2^3 elementos, y así sucesivamente; en general, el bloque n tiene 2^n elementos. Así que la totalidad de elementos hasta el n-ésimo bloque, incluyendo este último, es $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$. Utilizando las fórmulas para sumas geométricas

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$

obtenemos

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$$

Calculando las primeras potencias de 2 obtenemos $2^{21} = 2\,097\,152$ y $2^{22} = 4\,194\,304$.

Número de elementos hasta el bloque 20 = 2 097 150.

Número de elementos hasta el bloque 21 = 4 194 302.

Por tanto, el elemento que ocupa la posición 3 585 427 se encuentra en el bloque 21. Para determinar si se trata de un 0 o un 1 es suficiente observar que la primera mitad del bloque 21, que tiene $\dfrac{2^{21}}{2} = 2^{20} = 1\,048\,576$ términos, consta de unos, así que basta hacer una elemental suma aritmética para ver que el término que ocupa la posición 3 585 427 es un cero.

Notación

En la sección anterior vimos que una sucesión es una lista infinita, de números

$$x_1, x_2, x_3, \ \ldots$$

Los subíndices 1, 2, 3,..., reflejan el hecho de que se trata de una colección ordenada. Nosotros estamos usando el término colección ordenada como sinónimo de lista; sin embargo, lo que

debemos destacar es que hay un orden en los números que constituyen la sucesión. Con el propósito de enfatizar esta característica, recurriremos a los paréntesis para su representación:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Los paréntesis nos permiten distinguir la sucesión del conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, el cual puede ser finito, mientras que la sucesión es infinita. La notación es similar al caso de parejas ordenadas de números que se denotan por símbolos como (x_1, x_2). El caso general de n-ada ordenada, que se denota por $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, recurre a los paréntesis. Por esta razón, podemos interpretar la sucesión como generalización de n-ada ordenada, llevada al caso de una infinidad de coordenadas.

Existen algunas abreviaciones de la notación $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, por ejemplo:

$$(x_n)_{n=1}^{+\infty},\ (x_n)_1^{+\infty},\ (x_n)_{n\geq 1}$$

En este libro por lo común emplearemos la primera de ellas, es decir $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ aunque eventualmente utilizaremos una más simplificada, como $(x_n)_{n\geq 1}$, incluso cuando no dé lugar a alguna ambigüedad abusaremos de la notación y escribiremos simplemente (x_n). No pocos autores emplean llaves { } en lugar de paréntesis ( ) para representar las sucesiones; así, pueden representar una sucesión por $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ o simplemente por $\{x_n\}$. Nosotros preferimos los paréntesis, ya que recuerdan el orden y su parentesco con la n-ada ordenada $(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) = (x_k)_{k=1}^{n}$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, a x_n se le denomina **término general** de la sucesión. El término general de una sucesión puede estar dado, por ejemplo, mediante una fórmula en la variable n. Al elemento x_1 se le denomina **primer término** de la sucesión y se dice que la sucesión inicia en este término. En ocasiones es conveniente iniciar una sucesión con un índice diferente de 1, por ejemplo, se puede dar el caso de una sucesión cuyo primer término sea x_2:

$$(x_2, x_3, \cdots) = (x_n)_{n=2}^{+\infty}$$

En general, en la sucesión

$$(x_k, x_{k+1}, \cdots) = (x_n)_{n=k}^{+\infty}$$

donde k es un entero positivo fijo, tiene como primer término x_k.

Para los índices de una sucesión también se podrá usar cero o enteros negativos, por ejemplo

$$(x_0, x_1, \cdots) = (x_n)_{n=0}^{+\infty}$$

$$(x_{-1}, x_0, \cdots) = (x_n)_{n=-1}^{+\infty}$$

4.2 Operaciones con sucesiones

Dadas dos sucesiones $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$, definimos la **sucesión suma** $(a_n)_{n=1}^{+\infty} + (b_n)_{n=1}^{+\infty}$ como la sucesión $(c_n)_{n=1}^{+\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{+\infty}$. Así que la sucesión suma tiene por término general $c_n = a_n + b_n$. Para sumar dos sucesiones, simplemente lo hacemos término a término.

De manera similar, definimos el **producto** de dos sucesiones $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$, como la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}(b_n)_{n=1}^{+\infty} = (a_n b_n)_{n=1}^{+\infty}$. Como en el caso de la suma, para construir la sucesión producto de dos sucesiones dadas, simplemente las multiplicamos término a término. El término general de la sucesión producto de dos sucesiones $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ es por definición $c_n = a_n b_n$.

El **cociente** de dos sucesiones $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$, es la sucesión cuyos términos son los cocientes $\frac{a_n}{b_n}$. Para que la sucesión cociente esté definida, en principio se necesitaría que todos los elementos b_n fuesen diferentes de cero, sin embargo, para establecer la definición vamos a requerir un poco menos. Asumiremos que todos los elementos b_n son diferentes de cero, con excepción, quizá, para un número finito de índices. Con mayor presición, si $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ son dos sucesiones tales que $b_n \neq 0$ para n mayor o igual que algún entero positivo k, la **sucesión cociente** $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ entre $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ es la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_{n=k}^{+\infty}$. Para que esté bien definida suponemos que k es el menor entero positivo con la propiedad $b_n \neq 0$ para toda $n \geq k$. Dicho de otra manera, b_k es el "primer término" a partir del cual todos los que le siguen son diferentes de cero, antes de él todos son cero. El término general de la sucesión cociente $(a_n)_{n=k}^{+\infty}$ entre $(b_n)_{n=k}^{+\infty}$ es por definición $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Para finalizar con las definiciones de esta sección, a continuación establecemos la definición de multiplicación de una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ por un real λ, al real λ lo denominaremos **escalar**. La multiplicación de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ por el escalar λ es la sucesión $\lambda\,(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, cuyo término general es λa_n, es decir $\lambda\,(a_n)_{n=1}^{+\infty} = (\lambda a_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Las operaciones antes definidas nos permiten construir, a partir de sucesiones simples, otras más elaboradas como veremos a continuación.

Ejemplo 6

Dada la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ \ldots$$

construimos

$$a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ \ldots$$

El término general de esta sucesión está dado por

$$c_n = (-1)^{n+1} a_n$$

Ejemplo 7

Dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ \ldots$$

la sucesión que resulta de sustituir los términos de índice par, por cero

$$a_1, 0, a_3, 0, \ \ldots$$

tiene por término general

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{2} a_n$$

Observe que la sucesión del ejemplo 6 se obtiene de multiplicar las sucesiones

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ \dots$$

$$1, -1, 1, -1, \ \dots$$

De forma similar, la sucesión del ejemplo 7 se obtiene al multiplicar las sucesiones

$$a_1, \ \ a_1, \ \ a_1, \ \ a_1, \ \dots$$

y

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \ \dots$$

Ejemplo 8

La sucesión

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \ \dots$$

tiene por término general

$$a_n = \frac{1}{2}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$$

Podemos interpretar la sucesión del corchete como la suma de dos sucesiones.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ \dots$$

y

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ \dots$$

Ejemplo 9

Dada la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ \dots$$

construimos la sucesión que resulta de intercambiar los términos de índice par con los de índice impar precedente.

$$a_2, a_1, a_4, a_3, \ \dots$$

El término general de esta sucesión está dado por

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{2} a_{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2} a_{n-1}$$

Ejemplo 10

Dada la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

construimos la sucesión con aquellos que tienen índice impar

$$a_1, a_3, a_5, \ldots$$

El término general está dado por

$$c_n = a_{2n-1}.$$

4.3 Sucesiones monótonas

Dentro de la familia de todas las sucesiones de números reales, se distingue una clase muy importante: las **sucesiones monótonas**. Este término se debe al físico matemático alemán Karl G. Neumann (1832-1925) y se refiere a las sucesiones crecientes o decrecientes. Enseguida precisamos estos conceptos.

Definición 2

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ es **creciente** si cumple la desigualdad $x_n \leq x_{n+1}$ para todo entero positivo n. De igual modo, la sucesión es **decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo entero positivo n. Se dice que una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente. Cuando se desee especificar el tipo de monotonía de una sucesión usaremos los términos **monótona creciente** o **monótona decreciente**, según sea el caso.

En ocasiones, a las sucesiones monótonas crecientes también se les denomina **monótonas no decrecientes** o simplemente **no decrecientes**, debido al signo combinado de desigualdad $\leq$ que aparece en su definición, pues con eso se acepta la posibilidad de que se cumpla $x_n = x_{n+1}$ para algunas (o todas) n's. En este libro usaremos los diferentes términos de manera indistinta. Por otra parte, a las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ que satisfagan la desigualdad estricta $x_n < x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, las denominaremos **estrictamente crecientes**. Es claro que toda sucesión estrictamente creciente es creciente, pues si cumple la desigualdad $x_n < x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces también cumple la desigualdad $x_n \leq x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De manera similar, a las sucesiones decrecientes también se les denomina **no crecientes** y a una sucesión $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ que satisfaga la desigualdad $x_n > x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ se le denomina **estrictamente decreciente**. Observemos que toda sucesión estrictamente decreciente es decreciente.

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, cuyos términos sean iguales entre sí, o sea, que para algún número real c satisface $x_n = c$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se llama **sucesión constante**; esta se escribe:

$$c, c, c, \ldots$$

Notemos que toda sucesión constante es a la vez creciente y decreciente, pues si $x_n = x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces también es cierto que $x_n \leq x_{n+1}$ y $x_{n+1} \leq x_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para finalizar, diremos que hay sucesiones que no son monótonas (crecientes ni decrecientes), como se muestra en algunos de los ejemplos siguientes. Una sucesión de este tipo se dice que es **no monótona**.

Ejemplo 11

La sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

cuyo término general es $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente. Más aún, es una sucesión estrictamente decreciente.

Ejemplo 12

La sucesión

$$-1, -1, -2, -2, -3, -3, \ldots$$

cuyo término general es:

$$a_n = -\frac{1}{2}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$$

es decreciente pero no estrictamente decreciente.

Ejemplo 13

La sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$$

es estrictamente creciente. El término general es

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ejemplo 14

Las sucesiones

$$\left(\frac{n+1}{n}\right): \qquad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right): \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

son decrecientes, pero no es así la sucesión que resulta de intercalarlas

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$$

Ejemplo 15

La sucesión

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

como la del ejemplo anterior, no es creciente ni decreciente, es decir, es no monótona.

Ejemplo 16

La sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, es monótona creciente. Probaremos usando el principio de inducción matemática, que $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Verifiquemos que la desigualdad vale para el caso $n = 1$.

Puesto que $1 < \sqrt{2}$, se tiene $2 < 2\sqrt{2}$, luego $\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}$. Esto prueba que $a_1 < a_2$.

Supóngase, ahora, que para algún k, se tiene $a_k < a_{k+1}$. Entonces, $2a_k < 2a_{k+1}$, por tanto $\sqrt{2a_k} < \sqrt{2a_{k+1}}$. Pero esto significa que

$$a_{k+1} < a_{k+2}.$$

Con esto verificamos la segunda parte del principio de inducción, por lo cual podemos concluir que $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, hemos probado que la sucesión dada es monótona creciente.

4.4 Sucesiones acotadas

Otro tipo importante de sucesión es el de las **sucesiones acotadas**, este término parece deberse al matemático francés Camille Jordan (1838-1922).

Definición 3

Se dice que una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ está **acotada superiormente** si para algún real M se cumple

$$x_n \leq M$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. En este caso a M se le llama una **cota superior** de la sucesión. De forma similar, se dice que la sucesión está **acotada inferiormente** si para algún real m se cumple:

$$m \leq x_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Cualquier real m que satisfaga esta condición se denomina una **cota inferior** de la sucesión. Si la sucesión está acotada tanto superior como inferiormente, se dice que es o que está **acotada**.

Nota

Si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ está acotada, entonces por definición existen reales m y M que cumplen

$$m \leq x_n \leq M$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Es claro que cualquier real M^* mayor que M, es una cota superior de la sucesión, y que cualquier real m^* menor que m, es una cota inferior. En la práctica puede resultar conveniente escoger cotas m y M de la forma $M = \alpha$, $m = -\alpha$ con $\alpha > 0$. En este caso se tiene

$$-\alpha \leq x_n \leq \alpha$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Esta desigualdad también se puede escribir

$$|x_n| \leq \alpha$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, o bien $|x_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así pues, una manera equivalente de decir que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ está acotada es: existe $M > 0$, tal que

$$|x_n| \leq M$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. A M se le denomina **cota** de la sucesión.

Ejemplo 17

La sucesión

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots$$

cuyo término general es $a_n = \dfrac{2n-1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}$ está acotada, tanto superior como inferiormente, pues en este caso se tiene

$$1 \leq a_n < 2$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. También podemos escribir

$$|a_n| \leq 2$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual significa

$$-2 \leq a_n \leq 2$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 18

La sucesión

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$$

cuyo término general es

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$$

está acotada superior e inferiormente. Una cota es $M = 1$, pues se tiene

$$-1 \leq a_n \leq 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 19

La sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, está acotada superiormente y 2 es una cota superior.

Probaremos, procediendo por inducción, que 2 es una cota superior de la sucesión, de hecho probamos que se cumple $a_n < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, es claro que se cumple la desigualdad requerida, ya que $a_1 = \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} < 2$.

Supóngase ahora que $a_k < 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$; se tiene, entonces, $2 + a_k < 4$. Luego $\sqrt{2+a_k} < 2$, pero $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k}$; por tanto, $a_{k+1} < 2$. Con esto hemos verificado la segunda parte del principio de inducción y así hemos probado que $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ está acotada superiormente por 2.

4.5 Límite de una sucesión

Uno de los conceptos más importantes en el tema de sucesiones es el de límite. Las dificul-tades que se presentan para la comprensión del concepto de límite son de diferente naturaleza. Por una parte, se trata de nuevas ideas matemáticas y de técnicas que deben comprenderse y manejarse con destreza. Por otra, el tema demanda cierto rigor en el uso del lenguaje, al que se acude para expresar de forma adecuada y con precisión esas ideas matemáticas. Es importante destacar que hay dos aspectos importantes diferentes acerca del concepto de límite. El primero se refiere a la comprensión del concepto mismo y el otro es el lenguaje con el que se expresa el concepto. Este último quizá sea lo que lo haga parecer un concepto difícil.

Veamos cuáles son las fallas más frecuentes en las que incurre alguien que desconoce el tema e intenta describir este concepto. Consideremos la sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

cuyo término general está dado por $a_n = \frac{1}{n}$.

Es fácil aceptar que esta sucesión “tiende a” cero o que tiene por límite el cero, sin embargo cuando se intenta explicar lo que esto significa es común que su explicación la reduzcan a decir que “los términos se aproximan o acercan, cada vez más y más a cero sin nunca alcanzarlo”. Esto no solo es impreciso sino incorrecto, veamos por qué.

Primera reflexión

Supongamos que una persona se encuentra en el extremo sur del Eje Central, Lázaro Cárdenas, de la ciudad de México, y que camina con dirección hacia el norte, teniendo como punto de llegada el Eje 5 sur que se encuentra al sur del centro. En este caso vale decir que mientras se dirige a su destino, la persona se acerca o se aproxima al centro de la ciudad, no obstante que no

tenga la intención de llegar a dicho lugar, y que además siempre se encuentre a varios kilómetros del mismo. No podemos afirmar que el centro de la ciudad sea "el límite" de la caminata de la persona, a pesar de que se esté acercando a este continuamente. Así que el término "acercarse a" o "aproximarse a" es insuficiente para expresar la idea de "tendencia a un límite". El límite, en cierto sentido, es una meta, aun cuando no siempre se alcance, y hablando en sentido figurado, debe haber "la intención de alcanzar la meta", no obstante que no se llegue a esta.

Segunda reflexión

Ahora, consideremos la sucesión

$$1,\ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5},\ \ldots$$

(¿cuál es el término general?). Como antes, esta sucesión tiene por límite al cero, sin embargo, es falso que se acerque "cada vez más a cero", pues los términos de la sucesión no siempre decrecen. Por ejemplo, el término que le sigue a $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$, el cual es menor que $\frac{1}{2}$; en este caso, se acerca al cero, pero el siguiente a $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{3}$, aquí retrocede. Esta sucesión algunas veces "avanza" hacia cero pero luego en otras "retrocede", entonces es falso que se "acerque cada vez más a cero".

Tercera reflexión

También es falso que el límite de una sucesión sea un número al cual se aproxima la sucesión sin nunca alcanzarlo. Esta expresión se escucha con frecuencia entre los estudiantes que se inician en este tema. Por ejemplo, la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$$

tiene por límite el cero, el cual se alcanza una infinidad de veces. Más aún, vale decir también que la sucesión constante

$$1, 1, 1,\ \ldots$$

tiene por límite al 1, no obstante que la sucesión siempre "se encuentre" en el 1.

Es muy útil interpretar de forma geométrica las sucesiones e incluso dotarlas de una dinámica. Para ello considere los puntos correspondientes a los términos de la sucesión, sobre la recta real.



También podemos acudir a la gráfica en un sistema de ejes cartesianos a la que tiene derecho, por tratarse de una función de variable real con valores reales.

Para dotar a la sucesión de movimiento podemos suponer que n representa el tiempo en segundos y x_n el punto alcanzado en el instante $t = n$ segundos. De este modo, diremos que x_1 es el valor obtenido o el punto sobre la recta alcanzado en el instante $t = 1$, x_2 es el valor alcanzado en el instante $t = 2$, etcétera. Con frecuencia usaremos este lenguaje, que si bien no es propio, puede ayudar a comunicar algunas ideas.

Antes de definir con precisión el concepto de límite de una sucesión, lo explicaremos de diversas maneras, aunque algunas de estas sean un tanto imprecisas o incompletas.

Diremos que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ \ldots$$

tiene por límite un cierto número ℓ, si los valores a_n se aproximan a ℓ tanto como se desee, expliquemos esto último. Que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ se aproxime a ℓ tanto como se desee, significa que siempre que se elija un intervalo abierto con centro ℓ, es posible hallar un elemento a_N de la sucesión, de modo que a_N y todos los sucesivos a_n se encuentren en ese intervalo.



Dicho en términos menos propios, pero un tanto más sugestivos: todo intervalo abierto con centro ℓ debe "capturar" a todos los elementos de la sucesión a partir de uno de ellos.

$$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ \ldots$$

o bien, dado cualquier intervalo abierto con centro ℓ, a partir de cierto índice, todos los términos de la sucesión están confinados en ese intervalo.

Así pues, diremos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiende a un cierto número ℓ, si para cada intervalo abierto $(\ell - r, \ell + r)$ con centro ℓ, existe un elemento de la sucesión a_N tal que $a_n \in (\ell - r, \ell + r)$ para todo término a_n con índice $n \geq N$.

Es importante insistir que esta condición debe cumplirse para cada intervalo de la forma $(\ell - r, \ell + r)$ que sea dado previamente; el índice N dependerá de "qué tan grande o tan pequeño" sea este intervalo.

En otras palabras, diremos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiende a un cierto número ℓ si para cada $r > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $a_n \in (\ell - r, \ell + r)$ para todo índice $n \geq N$. La condición $a_n \in (\ell - r, \ell + r)$ expresada en el lenguaje de conjuntos, podemos escribirla en términos de desigualdades como

$$|a_n - \ell| < r.$$

Con esto, formulamos la versión definitiva de límite de una sucesión como sigue.

Definición 4

Decimos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiene por **límite** un cierto número ℓ, o que ℓ es límite de la sucesión cuando n tiende a infinito, si para cada $r > 0$ existe un entero positivo N, tal que

$$|a_n - \ell| < r$$

para todo entero $n \geq N$. Este hecho lo representamos por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

La simbolización anterior se lee "límite de a_n cuando n tiende a infinito es igual a ℓ" o en forma breve "límite de a_n es ℓ".

Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ también diremos que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ **converge** a ℓ y que la sucesión es **convergente**.

Cuando una sucesión no es convergente, diremos que **diverge** o que es **divergente**. Así que una sucesión es divergente cuando no tiene límite. Más adelante veremos algunos ejemplos que mostrarán diversas situaciones de este caso.

Antes de ilustrar cómo se aplica la definición anterior en casos específicos, veamos un teorema, si bien simple, indispensable para complementar la definición.

Teorema

Sea (a_n) una sucesión convergente. Sean $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, entonces $\ell_1, = \ell_2$.

Demostración

Para probar que $\ell_1 = \ell_2$ probaremos que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$. Para probar esto último, mostraremos que $0 \leq |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria. Por definición de $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, existe un natural N_1 tal que

$$n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por definición de $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, existe un natural N_2 tal que

$$n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si tomamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se cumplirá

$$n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |a_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto tenemos

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_N + a_N - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_N| + |a_N - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba el teorema.

En principio, para probar que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge a un cierto real ℓ, debe mostrarse que cumple con la definición. Sin embargo, en la práctica, la aplicación directa de la definición puede ofrecer cierta dificultad, por lo que serán especialmente útiles los criterios de convergencia, así como las propiedades algebraicas de los límites. Con eso daremos vuelta al problema de aplicar la definición para el caso particular que se tenga, obteniéndose pruebas mucho más simples.
Una situación interesante será cuando probemos que alguna sucesión es convergente sin conocer su límite. Esto es posible precisamente por la propiedad de continuidad de los reales, la cual estableceremos más adelante en forma más precisa que la expuesta en el capítulo 1.

Las pruebas de convergencia de sucesiones sin exhibir su límite ℓ, las podemos llamar pruebas teóricas de convergencia. Esto ocurre con muchas sucesiones importantes en la matemática, como veremos en una sección posterior.

Se recomienda al lector que estudie con cuidado el siguiente ejemplo. Durante el desarrollo de este se hace una reflexión sobre la forma en que se aplicaría la definición de límite en un caso específico, en especial sobre el aspecto lógico de las pruebas. Es un ejemplo muy instructivo, desde varios puntos de vista. Asimismo, constituye un ejemplo de prueba matemática donde se acude a un razonamiento que requiere la elección arbitraria de un número. Este sentido de arbitrariedad es una de las principales dificultades que subyacen en la comprensión del concepto de límite. También se aprovecha el ejemplo para explicar el significado de equivalencia de enunciados matemáticos. Se trata, pues, de un ejemplo con estrella.

Ejemplo 20

Probaremos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Por el momento, tomemos $r=\dfrac{1}{1000}$ y hallemos $N\in\mathbb{N}$ para la cual se cumpla

$$\left|\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{1\,000}$$

para toda $n\geq N$. Puesto que

$$\left|\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{4n+2}\right|=\frac{1}{4n+2},$$

la desigualdad

$$\left|\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{1\,000}$$

que deseamos que se cumpla, queda como

$$\frac{1}{4n+2}<\frac{1}{1\,000},$$

Esta desigualdad será válida siempre que

$$1\,000<4n+2,$$

o sea

$$\frac{499}{2}<n$$

Así que si elegimos un entero positivo $N>\dfrac{499}{2}$, por ejemplo $N=250$, entonces para toda $n\geq N$ se cumplirá.

$$\frac{499}{2}<n.$$

Por tanto, para esos valores de n, tendremos

$$499 < 2n$$
$$500 < 2n + 1$$
$$1\,000 < 4n + 2$$

o sea

$$\frac{1}{4n+2} < \frac{1}{1\,000}$$

Como se dijo antes, esta desigualdad equivale a

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{1\,000}.$$

Así pues, para $r = \frac{1}{1\,000}$ hemos hallado $N \in \mathbf{N}$, a saber $N = 250$, tal que

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{1\,000}$$

para toda $n \geq 250$

Esto, desde luego, no prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Hemos encontrado un valor de N para el caso particular $r = \frac{1}{1\,000}$. Sin embargo, nuestro procedi-miento sugiere cómo hallar un entero positivo N para cualquier valor que le asignemos previamente a r. Nos encontramos ante una situación crucial, ante un planteamiento de carácter lógico. Debemos probar que, independientemente del valor que le asignemos a r, es posible hallar un valor para N, de manera que podamos garantizar el cumplimiento de la desigualdad

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < r$$

para todos los naturales $n \geq N$. Este valor de N dependerá del valor de r; por ejemplo, para $r = \frac{1}{1\,000}$, elegimos $N = 250$. En este caso, un valor menor para N no cumple las condiciones requeridas.

Es importante aclarar que una prueba no se puede reducir a mostrar la existencia de tal N para algunos valores de r, es necesario hacer un razonamiento que contemple cualquier valor posible de $r > 0$. Dicho en otras palabras, el razonamiento debe hacerse considerando r arbitraria (positiva), es decir, sin darle un valor específico, con lo que se le da la oportunidad a r de que tenga cualquier valor.

Probemos pues, que independientemente del valor que se asigne a r, es posible hallar un valor para N tal que

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < r \quad \text{para todo natural } n \geq N.$$

Para proceder, iniciamos con la declaración: Sea $r > 0$ arbitraria. Mostramos que, sin importar cuál sea el valor de r, es posible hallar un entero positivo N, de manera que se cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < r$$

para toda $n \geq N$.

Procediendo de manera similar al caso particular $r = \frac{1}{1\,000}$, escribimos:

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4n+2},$$

La desigualdad deseada se verificará siempre que se cumpla

$$\frac{1}{4n+2} < r.$$

Usando las propiedades de las desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4n+2} &< r \\
\frac{1}{2n+1} &< 2r \\
\frac{1}{2r} &< 2n+1 \\
\frac{1}{2r} - 1 &< 2n \\
\frac{1-2r}{2r} &< 2n \\
\frac{1-2r}{4r} &< n
\end{aligned}$$

Es importante observar que partiendo de la desigualdad

$$\frac{1-2r}{4r} < n$$

podemos recuperar la desigualdad original

$$\frac{1}{4n+2} < r.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{1-2r}{4r} &< n \\
1 - 2r &< 4rn \\
1 &< 4rn + 2r \\
1 &< 2r(2n+1) \\
\frac{1}{4n+2} &< r
\end{aligned}$$

En términos matemáticos, decimos que ambas desigualdades son equivalentes. La equivalencia significa que partiendo de la desigualdad

$$\frac{1}{4n+2} < r$$

obtenemos

$$\frac{1-2r}{4r} < n$$

y partiendo de esta última obtenemos la primera. O más precisamente, la equivalencia significa que si n y r satisfacen la primera desigualdad entonces satisfacen la segunda y viceversa; si satisfacen la segunda entonces satisfacen la primera. Es mejor este enunciado para describir la equivalencia, ya que no acude a los procedimientos.

Ahora bien, si elegimos un entero N que cumpla

$$\frac{1-2r}{4r} < N$$

se garantizará

$$\frac{1}{4N+2} < r$$

Como para toda $n \geq N$ se tiene

$$\frac{1-2r}{4r} < N \leq n,$$

también r se tendrá

$$\frac{1}{4n+2} < r$$

para esos valores de n. Esto significa

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < r$$

para toda $n \geq N$, pues

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4n+2}.$$

Con esto hemos probado que efectivamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Observe que la elección de N que satisfaga la desigualdad

$$\frac{1-2r}{4r} < N,$$

podemos hacerla fácilmente si escribimos

$$\frac{1-2r}{4r} = \frac{1}{4r} - \frac{1}{2}.$$

Así que, para una r dada, bastará elegir un natural N que satisfaga

$$\frac{1}{4r} < N.$$

4.6 Teoremas importantes sobre límites

En esta sección presentamos algunos de los resultados básicos sobre límites de sucesiones, como son las propiedades algebraicas de los límites, el teorema de Weierstrass, el "teorema del sándwich" y el criterio de Cauchy. Las propiedades algebraicas de los límites y el "teorema del sándwich" serán de gran utilidad para el cálculo de límites de una gran variedad de sucesiones, mientras que el resto de los teoremas nos permitirán probar que algunas sucesiones especiales son convergentes, aun cuando no podamos exhibir su límite. Estas demostraciones son de las denominadas pruebas de existencia. En la presente sección nos dedicaremos a la demostración de estos resultados básicos, sus aplicaciones las reservaremos para una sección posterior. El lector que de momento no se interese por estas pruebas puede pasar de forma directa a la siguiente sección.

Tal vez, el primer teorema que probaremos no sea de gran importancia práctica, pero lo utilizaremos en las pruebas de los teoremas subsecuentes.

Teorema 1

Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración

Sea $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión convergente, supóngase $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Por definición, tenemos que para toda $r > 0$ existe un natural N, tal que se cumple $|a_n - a| < r$ para toda $n \geq N$. En particular, si tomamos $r = 1$, podemos elegir $N \in \mathbf{N}$, de modo que se cumpla

$$|a_n - a| < 1$$

para toda $n \geq N$. Pero

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a|,$$

así que para toda $n \geq N$ se cumple $|a_n| < 1 + |a|$.

Tomemos el máximo de los números $|a_1|, \ldots, |a_{n-1}|, 1 + |a|$:

$$M = \text{máx}\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$$

Entonces se cumplirá $|a_n| \leq M$ para todo natural n. Esto significa que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ está acotada y que M es una cota.

Teorema 2

Sean $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ dos sucesiones convergentes.

Supóngase

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Entonces

i) $(a_n)_{n=1}^{+\infty} + (b_n)_{n=1}^{+\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{+\infty}$ es convergente y además

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

ii) $(a_n)_{n=1}^{+\infty} + (b_n)_{n=1}^{+\infty} = (a_n b_n)_{n=1}^{+\infty}$ es convergente y además

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = ab$$

iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $b_n \neq 0$ para toda $n \geq N$. Además, la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=N}^{+\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = ab$$

Demostración

Prueba de i)
Sea $r > 0$ arbitraria; debemos probar que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < r$$

para toda $n \geq N$.
Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|a_n - a| < \frac{r}{2}$$

para toda $n \geq N_1$. Por otra parte, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} = b$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|b_n - b| < \frac{r}{2}$$

para toda $n \geq N_2$. Usando la desigualdad del triángulo, podemos escribir

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Si $n \geq N_1$, el primer sumando de

$$|a_n - a| + |b_n - b|$$

es menor que $\frac{r}{2}$.
Si $n \geq N_2$, el segundo sumando es el que resulta menor que $\frac{r}{2}$. Si tomamos n que cumpla simultáneamente $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, cada uno de los sumandos será menor que $\frac{r}{2}$. Esto se logra si tomamos

$$n \geq \text{máx}\,\{N_1, N_2\} = N.$$

Así pues, tenemos

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

para toda $n \ge N$. La N buscada es precisamente el máximo de los valores de N_1 y N_2. Esto prueba el inciso i).

Prueba de ii)
Sea $r > 0$ arbitraria; debemos probar que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \ge N$ se cumple

$$|(a_n b_n) - ab| < r.$$

En la prueba de i) se eligieron N_1 y N_2 enteros positivos, tales que

$$|a_n - a| < \frac{r}{2}, \text{ para toda } n \ge N_1, \text{ y}$$

$$|b_n - b| < \frac{r}{2}, \text{ para toda } n \ge N_2.$$

Ahora, en este caso elegiremos N_1 y N_2 de otra manera, aunque también de forma especial. Primero, trabajemos la expresión

$$|a_n b_n - ab|.$$

Como en el caso de la prueba de i), pondremos en juego los valores absolutos $|a_n - a|$ y $|b_n - b|$. En aquel caso, estos se involucraron automáticamente, después de una simple aplicación de la desigualdad del triángulo. Ahora la situación no es tan simple, pero también los pondremos en juego para usar las hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Con el propósito de hacer intervenir $|a_n - a|$, restamos y sumamos el término ab_n a lo que se encuentra dentro de las barras del valor absoluto $|a_n b_n - ab|$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \end{aligned}$$

Aplicando, ahora, la desigualdad del triángulo, obtenemos

$$|a_n b_n - ab| \le |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)|$$

Luego

$$|a_n b_n - ab| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

Con esto hemos logrado que entren en juego $|a_n - a|$ y $|b_n - b|$, desafortunadamente acompañados de coeficientes.

Puesto que la sucesión $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ es convergente, del teorema 1 se sigue que está acotada, es decir existe $M > 0$, tal que

$$|b_n| \le M$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|a_n b_n - ab| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

En este momento elijamos $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N_1$ se cumpla

$$|a_n - a| < \frac{r}{2M}.$$

Elijamos también $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$|b_n - b| < \frac{r}{2(|a| + 1)}$$

se cumpla para toda $n \geq N_2$. El denominador $|a| + 1$ no es sustituible por $|a|$, ya que podría tenerse $|a| = 0$.

Aquí tomemos el máximo de los valores de N_1 y N_2. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, tenemos entonces que para toda $n \geq N$ se cumple

$$M|a_n - a| < M\frac{r}{2M} = \frac{r}{2}$$

y

$$|a||b_n - b| \leq (|a| + 1)|b_n - b| < (|a| + 1)\frac{r}{2(|a| + 1)} = \frac{r}{2}.$$

Por tanto, se cumple

$$|a_n b_n - ab| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

para toda $n \geq N$. Esto prueba el inciso **ii)**.

Prueba de iii)
Antes de probar la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

es necesario probar que podemos construir la sucesión de cocientes $\frac{a_n}{b_n}$, al menos para los índices n, a partir de algún entero positivo N_1, lo cual quiere decir que debemos probar que b_n es diferente de cero para $n \geq N_1$. Probemos pues, la existencia de esta N_1.

Por hipótesis tenemos

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0.$$

Se tiene, entonces, que para cada $r > 0$, existe un entero positivo N_1, tal que

$$|b_n - b| < r$$

para toda $n \geq N_1$. En particular, eligiendo $r = \frac{|b|}{2}$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

para toda $n \geq N_1$.

Por otra parte, se tiene la desigualdad (véase la sección 1.13 del capítulo 1)

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b|.$$

Por tanto, para toda $n \geq N_1$ se debe tener

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Luego

$$|b| - \frac{|b|}{2} < |b_n|$$

para toda $n \geq N_1$. Es decir

$$0 < \frac{|b|}{2} < |b_n|$$

para $n \geq N_1$. Esto implica que $b_n \neq 0$ para toda $n \geq N_1$, que es lo que deseábamos probar.

De lo anterior se sigue que para la N_1 encontrada, está definida la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_{n=N_1}^{+\infty}$. Ahora, probemos la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Para eso, es suficiente probar el caso particular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, pues el resultado general se obtendrá aplicando el inciso **ii)** de este teorema, al producto $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Sea pues $r > 0$ arbitraria. Deseamos probar que existe $N^* \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < r$$

para toda $n \geq N^*$. Como en el caso de la prueba del inciso ii), primero trabajemos la expresión

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right|.$$

Sumando las fracciones con un común denominador y aplicando las propiedades del valor absoluto, obtenemos

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b\,b_n|}.$$

Nuestro propósito es probar que podemos hacer este cociente tan cercano a cero como deseemos. Por una parte observemos que es posible hacer que el numerador $|b_n - b|$ sea tan pequeño como se desee, sin embargo en principio el denominador $|bb_n|$, que varía con la n, también podría hacerse pequeño, haciendo incontrolable el cociente. Pero esto no ocurre, pues de la desigualdad previamente probada

$$\frac{|b|}{2} < |b_n|$$

la cual se cumple para toda $n \geq N_1$, se sigue

$$\frac{|b|^2}{2} < |b_n b|$$

para toda $n \geq N_1$. Por tanto

$$\frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{|b_n - b|}{\frac{b^2}{2}} = \frac{2}{b^2}|b_n - b|.$$

Para concluir la prueba, procedemos como en los otros casos. Dada $r > 0$ arbitraria, elegimos N natural, tal que

$$|b_n - b| < \frac{b^2 r}{2}$$

para toda $n \geq N$. Esto es posible pues

$$\lim_{n \to \infty} b_n = b \neq 0.$$

Por tanto, para todo natural $n \geq N$ se cumple

$$\frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{|b_n - b|}{\frac{b^2}{2}} = \frac{2}{b^2}|b_n - b| < r.$$

Con esto terminamos la demostración del teorema.

Un caso particular del inciso ii) del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario

Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ y λ es cualquier real, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \lambda\, a_n = \lambda a.$$

En el siguiente teorema rescatamos uno de los hechos que se probaron durante la demostración del inciso **iii)** del teorema anterior, pues es un resultado al que se acude con frecuencia.

Teorema

Si (b_n) es una sucesión convergente, cuyo límite b es diferente de cero, entonces existe un entero positivo N, tal que $b_n \neq 0$ para toda $n \geq N$. Más precisamente, existe un entero positivo N, tal que $|b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ para toda $n \geq N$.

Otro teorema que es muy útil es el siguiente.

Teorema

Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = |a|$. Esta conclusión también se puede escribir

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = \left|\lim_{n \to \infty} a_n\right|.$$

Demostración

Como en las pruebas anteriores, comenzamos dando $r > 0$ arbitraria. Como por hipótesis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existe un natural N, tal que

$$|a_n - a| < r$$

para todo natural $n \geq N$. Pero de la desigualdad

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|,$$

se sigue inmediatamente que se cumple

$$\big||a_n| - |a|\big| < r$$

para todo natural $n \geq N$. Esto prueba el teorema.

El siguiente teorema resulta especialmente útil para calcular límites de sucesiones cuando se pueden comparar, en los términos del teorema, con sucesiones convergentes, cuyos límites son conocidos. Es un teorema muy utilizado y le llamaremos "teorema del sándwich".

Teorema 4 (del sándwich)

Sean $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ tres sucesiones tales que satisfacen la desigualdad

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

para todo índice n mayor o igual que algún natural N. Si las sucesiones $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ convergen y tienen el mismo límite ℓ, entonces la sucesión $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ también converge y además

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell.$$

Demostración

Tenemos por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell.$$

Deseamos probar que bajo la condición $a_n \leq c_n \leq b_n$, válida para toda $n \geq N$, se tiene también $\lim_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Como en las otras pruebas sobre límites iniciamos tomando $r > 0$ arbitraria. Vamos a probar que existe un natural N^*, tal que

$$|c_n - \ell| < r$$

Para toda $n \geq N^*$.

Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, tomamos $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|a_n - \ell| < r$$

para toda $n \geq N_1$. Pero, la desigualdad $|a_n - \ell| < r$ también se escribe como

$$\ell - r < a_n < \ell + r$$

Así que para toda $n \geq N_1$ se cumple $\ell - r < a_n < \ell + r$.
De forma similar, de la condición $\lim_{n \to \infty} b_n = \ell$ se sigue que podemos tomar $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\ell - r < b_n < \ell + r$$

para toda $n \geq N_2$. Si hacemos $N_3 = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, obtenemos que para toda $n \geq N_3$ se cumplen simultáneamente las desigualdades

$$\ell - r < a_n < \ell + r$$

y

$$\ell - r < b_n < \ell + r$$

Combinando estas con la desigualdad

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

la cual vale para toda $n \geq N$, podemos concluir que se cumple

$$\ell - r < a_n \leq c_n \leq b_n < \ell + r$$

para toda $n \geq \text{máx}\{N_3, N\}$. Esto implica

$$|c_n - \ell| < r$$

para toda $n \geq \text{máx}\{N_3, N\} = N^*$, que es lo que deseábamos probar. Esto prueba el teorema.
Un caso particular del teorema anterior, es el siguiente corolario.

Corolario

Sean $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ dos sucesiones tales que

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

para todo natural mayor o igual que algún $N \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Ejemplo 21

Las siguientes igualdades

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

se prueban con facilidad usando la definición de límite. En efecto, si $r > 0$ es arbitraria, elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{r}$. Por tanto, si $n \geq N$ se tiene $n > \frac{1}{r}$ o sea $\frac{1}{n} < r$. Es decir $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < r$. Esto prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. La prueba de $\lim\limits_{n\to=\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ se deja como ejercicio.

Ejemplo 22

Puesto que $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ se sigue inmediatamente del inciso **ii)** del segundo teorema, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Usando inducción matemática, podemos probar que en general se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

para todo entero positivo k.

Ejemplo 23

Puesto que

$$\frac{n^2 + 1}{3n^2 - n + 2} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 - n + 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 24

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 4n + 5}{n^3 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejemplo 25

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Ejemplo 26

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 \cdot 2^n}{3 + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n} + 3}{\frac{3}{2^n} + 1} = \frac{0 + 3}{0 + 1} = 3$$

En este caso usamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Esto se justificará más adelante, de hecho se probará que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

cuando $|a| < 1$.

4.7 Criterios de convergencia intrínsecos. Propiedad de continuidad de los reales

Vamos a iniciar esta sección con una obviedad pero vamos a finalizarla con lo que quizá es lo más profundo de este capítulo.

Que una sucesión sea convergente significa que tiene límite. Cuando uno estudia la convergencia de una sucesión (a_n) mediante la definición de convergencia, requerimos del conocimiento previo de su límite ℓ. Porque si no, ¿de qué manera aplicamos la definición que hace referencia explícita a este límite? Recordemos la definición de convergencia de una sucesión para que hagamos más conciencia sobre esta situación.

Una sucesión (a_n) tiene por **límite** $\ell \in \mathbb{R}$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \text{ para todo natural } n \geq N.$$

Cuando esto se cumpla diremos que la sucesión (a_n) es **convergente** y que CONVERGE a ℓ. En este caso también escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Podemos decir que de alguna manera cuando aplicamos esta definición en el estudio de la convergencia de una sucesión en realidad lo que hacemos es **verificar** que un número conocido ℓ es el límite. El conocimiento previo de este número ℓ es inevitable cuando procedemos a aplicar la definición. Por cierto, antes de llevar a cabo la prueba aplicando la definición de límite, ℓ es un candidato a ser el límite, del que por supuesto estamos convencidos de que va a cumplir la definición. Después de haber realizado la prueba afirmamos que es el límite. Pero antes de la prueba ℓ no tiene ese estatus. Los recursos que empleamos para conocer o descubrir este candidato son muy diversos, van desde la intuición desarrollada con la experiencia que tengamos con otras sucesiones hasta los cálculos empíricos que realizamos con ellas. Incluso en algunos casos podría ocurrir que estamos tan convencidos empíricamente de que un cierto número es el límite de una sucesión que para fines prácticos no sintamos la necesidad de hacer una prueba usando en la definición. Por supuesto, eso lleva consigo un riesgo, uno aprende en matemáticas que la intuición puede traicionarnos y que esto ocurre con alguna frecuencia.

Sin embargo, aun cuando estemos dispuestos a emplear la definición de convergencia no siempre tenemos la fortuna de descubrir el candidato a límite. De hecho, pudiera presentarse el caso en el que sea imposible hallarlo, estamos hablando de una imposibilidad matemática, imposible en el sentido estricto, y no por falta de capacidad personal. Por ejemplo, la sucesión definida como

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

es convergente pero es imposible hacer explícito el límite, nadie ha podido ni podrá hacerlo. Algo se sabe de este límite, por ejemplo, se sabe que no es racional, es decir, es irracional. Más aún, dentro de los números irracionales hay de dos categorías, los algebraicos y los trascendentes, y se sabe que este límite es trascendente. Esta sucesión la estudiaremos en la subsección 4.8.4.

Otro ejemplo es la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Esta sucesión, que estudiaremos en la subsección 4.8.6, también es convergente pero no solo su límite no puede hacerse explícito, sino que, a diferencia del caso anterior, ni siquiera se sabe si es racional o irracional. Quien logre descubrir la naturaleza de este límite seguramente ocupará un lugar en la historia de la matemática. Pero si no se conocen sus límites, entonces es natural que ahora nos preguntemos, ¿cómo probamos la convergencia de estas sucesiones? Obviamente para ello requerimos de condiciones que garanticen su convergencia sin acudir al límite mismo. En este sentido las condiciones deben acudir a propiedades intrínsecas de la sucesión. Estas propiedades intrínsecas están relacionadas con la propiedad de los números reales que los distingue de los racionales, con la propiedad más profunda de nuestro sistema numérico, es la que se llama continuidad de los números reales o axioma de continuidad.

Hay diversas maneras de enunciar la continuidad de los números reales; no obstante que el concepto es profundo, la idea geométrica es muy simple. Quizá por esta razón, durante varios siglos del desarrollo del análisis matemático y del cálculo, los matemáticos no caían en cuenta de su importancia. La historia de la matemática tuvo que esperar las reflexiones de una mente brillante y profunda como la del matemático alemán Richard Dedekind para crear conciencia sobre esta importantísima propiedad de los números reales y establecerla, allá por el último tercio del siglo XIX, en un lenguaje matemáticamente aceptable que le diera sustento al trabajo de cálculo y análisis hecho hasta ese momento.

4.7.1 Acerca de la continuidad de los reales

La continuidad de los números reales la percibimos geométricamente cuando los representamos en la recta. La recta con los reales “puestos en ella” es la que llamamos la recta real. La recta real es una figura geométrica en donde ubicamos todos los números reales, es una recta ideal, no existe físicamente. Cada número real es representado o interpretado (como usted quiera decirlo) como un punto físico, también ideal, sobre la recta, es decir a cada punto de la recta le es asignado un número real y viceversa, a cada real le es asignado un punto. La asignación es en dos direcciones, de los números a la recta y de la recta a los números. Matemáticamente esto lo expresamos diciendo que los números reales están en correspondencia uno a uno o en correspondencia biunívoca con los puntos de la recta geométrica. En palabras simples, decimos que hay una identificación plena entre los números reales y los puntos de la recta. Entonces, dado que la recta física ideal es un continuo, le trasladamos esta propiedad a los números reales diciendo que los reales son un continuo. Dicho de esta manera, la continuidad de los números reales la estamos concibiendo a través de su representación geométrica, pero no tenemos de ella una descripción puramente aritmética, valga decir una descripción en el contexto o lenguaje puramente numérico.

Como lo expresamos antes, la idea geométrica de la continuidad de los reales es muy simple, la gran dificultad surge cuando tratamos de expresarla en lenguaje puramente aritmético. Por esta razón es un tema, una propiedad, que se tiene que comprender y asimilar gradualmente con

el apoyo de reflexiones y con su uso. La idea de continuidad de los números reales, Dedekind la expresó con lo que hoy se conoce como cortaduras de Dedekind. Nosotros no seguiremos este acercamiento sino que primero expondremos otras versiones, una de ellas muy popular en la actualidad en el estudio del cálculo, por supuesto, mostraremos que todas son equivalentes y después adoptaremos la que seguramente será más clara e intuitiva y también más fácil de aceptar y aplicar. Mientras tanto nuestra discusión servirá para que el lector madure este importante concepto de continuidad, entienda el papel que juega en la fundamentación del cálculo y comprenda que se puede adoptar cualquiera de sus formas equivalentes para su estudio.

4.7.2 Conjuntos acotados. Supremo e ínfimo. Axioma del supremo

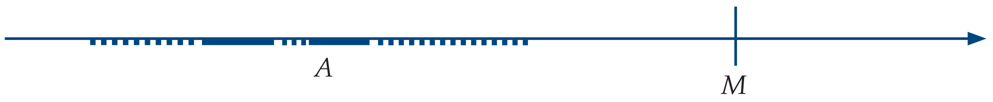
Iniciemos con la que consideramos goza de mucha popularidad. Esta primera versión acude al concepto de conjunto acotado y un concepto que causa alguna dificultad que es el de supremo de un conjunto. Comencemos pues con algunas definiciones.

Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que A está **acotado superiormente** si existe un real M tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. En este caso diremos que M es una **cota superior** de A. Decimos que A está **acotado inferiormente** si existe un real m tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. En este caso diremos que m es una **cota inferior** de A. El conjunto A está **acotado** si lo está superior e inferiormente.

Un hecho evidente es que si un real M es una cota superior de un conjunto M entonces todo real mayor que M también es cota superior. Asimismo, todo real que sea menor que una cota inferior de un conjunto también es cota inferior del mismo.

Geométricamente, que un conjunto A esté acotado superiormente por un real M significa que todos los elementos de A se encuentran a la izquierda de M.



De manera similar tenemos que un conjunto A esté acotado inferiormente por un real m significa geométricamente que todos los elementos de A se encuentran a la derecha de m.

Ejemplo 27

Casos triviales de conjuntos acotados superior o inferiormente son todos los tipos de intervalos diferentes de $\mathbb{R}$, por ejemplo, si $a < b$, los intervalos

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

son conjuntos acotados (superior e inferiormente). Los intervalos

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | ax \leq b\}$$

son conjuntos acotados, el primero inferiormente y el segundo superiormente. Una cota inferior de $(a, +\infty)$ es a y también lo es todo real menor que a. Para el intervalo $(-\infty, b]$, todo real mayor o igual que b es cota superior.

Ejemplo 28

El conjunto A de reales no negativos cuyos cuadrados son menores que 15, es decir

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \, 0 \leq x \text{ y } x^2 < 15 \right\}$$

está acotado superiormente. Una cota superior es 4, pues si $x \geq 0$ es tal que $x^2 < 15$, entonces también es cierto que $x^2 < 16$, luego al extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la desigualdad obtenemos $\sqrt{x^2} < \sqrt{16}$, es decir $|x| < 4$. Pero como $x \geq 0$ tenemos $|x| = x$, por tanto tenemos $0 \leq x < 4$.

Ahora establezcamos los conceptos de supremo e ínfimo de un conjunto.

Definición versión 1

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, decimos que M es **supremo** de A si es una cota superior mínima, es decir, si es cota superior y es menor o igual que toda cota superior de A.

Que M sea supremo de A significa entonces que tiene las siguientes dos propiedades:

1) M es cota superior de A, es decir $a \leq M$ para toda $a \in A$
2) Si M^* es cota superior de A entonces $M \leq M^*$, es decir, si M^* es tal que $a \leq M^*$ para toda $a \in A$, entonces $M \leq M^*$.

La propiedad 2 expresa que M es menor que cualquier cota superior.

En la práctica matemática conviene disponer de diversas maneras de expresar exactamente lo mismo, pues dependiendo de la situación algunas veces resulta más útil una versión que otra. A continuación formulamos algunos enunciados alternativos para esta definición. Todos estos enunciados son equivalentes. Observe que la diferencia entre una versión y otra es el enunciado de la propiedad 2.

Definición versión 2

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, decimos que M es **supremo** de A si

1) M es una cota superior de A.
2) Si $S < M$ entonces S no es cota superior, es decir existe $a \in A$ tal que $S < a \leq M$.

Definición versión 3

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, decimos que M es **supremo** de A si

1) M es una cota superior de A.
2) Para toda $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $M - \varepsilon < a \leq M$.

Definición versión 4

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, decimos que M es **supremo** de A si

1) M es una cota superior de A.
2) Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ tal que $M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$.

Se deja como ejercicio para el lector establecer las versiones correspondientes para el ínfimo.

En palabras simples el supremo de un conjunto es el mínimo del conjunto de todas las cotas superiores. Por supuesto, cuando este mínimo existe. Para obtener el supremo de un conjunto

debemos mirar el conjunto de todas las cotas superiores y determinar el elemento mínimo de este conjunto. Un hecho obvio es el siguiente.

Teorema

Si un conjunto A acotado superiormente tiene supremo, entonces tiene solo uno. En otras palabras, todo conjunto acotado superiormente tiene a lo más un supremo.

Demostración

Supóngase M_1 y M_2 supremos de un conjunto acotado superiormente A. Entonces por definición de supremo, ambas son cotas superiores y cumplen $M_1 \leq M_2$ por ser M_1 supremo y $M_2 \leq M_1$ por ser M_2 supremo. De estas dos desigualdades se sigue la igualdad $M_1 = M_2$. Esto prueba el teorema.

Notación

Dado que si un conjunto A acotado superiormente tiene supremo entonces tiene solo uno, para representarlo escribiremos sup A.

Ejemplo 29

a) $\sup\,(-1, 2) = 2$
b) $\sup\,(-\infty, -3] = -3$
c) $\sup\,\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 15\} = \sqrt{15}$

Observe que el supremo de un conjunto, que ciertamente es una cota superior, puede ser elemento del conjunto y puede no serlo.

Ahora estamos en posibilidades de enunciar la primera versión de la propiedad de continuidad de los números reales.

Axioma del supremo

Todo subconjunto A del conjunto de los reales, acotado superiormente tiene supremo.

Esta es una propiedad que se le concede a los números reales, no requiere demostración. Asumimos que los números reales son de tal naturaleza que la poseen sin cuestionamientos. ¿Es un dogma?, en algún sentido lo es, es una propiedad que postulamos, es un axioma que utilizamos para trabajar con lo números reales. Es una importantísima propiedad que nos permite hacer nuestro estudio de límites en cálculo. Tiene el carácter de axioma debido a la forma en que concebimos los reales en nuestro trabajo con ellos. La existencia del supremo sería un teorema si procedieramos a construir las reales.

Si reflexionamos un poco, realmente desconocemos lo que son los números reales, digamos que apenas conocemos algunos, por ejemplo los racionales y algunos irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y los famosos números π y e. En general, lo que sabemos de los números reales es a través de sus propiedades, mismas que aceptamos y trabajamos con familiaridad y confianza. Sus propiedades son las algebraicas, las de orden y la propiedad de continuidad en cualquiera de sus versiones.

Ahora veamos algunos criterios de convergencia que nos permitirán establecer algunos enunciados alternativos del principio de continuidad.

4.7.3 Teorema de convergencia de Weierstrass

Este teorema proporciona un criterio para determinar la convergencia de una clase especial de sucesiones. Se trata de un criterio que garantiza la convergencia de una sucesión basado en sus propiedades intrínsecas, por lo que no requiere del límite en forma explícita.

Teorema (de Weierstrass)

Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.

Demostración

Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada superiormente. Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

está acotado superiormente. Sea L el supremo de este conjunto. Probemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, existe $a_N \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que $L - \varepsilon < a_N \leq L$. Como (a_n) es creciente $a_N < a_n$ para todo natural $n \geq N$, luego $L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L$. Esto prueba que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Tenemos como corolario el siguiente:

Teorema (de Weierstrass)

Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Demostración

Si (a_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, para probar su convergencia basta aplicar el teorema justamente probado a la sucesión creciente $(-a_n)$. Los detalles de la prueba son muy simples y se dejan como ejercicio al lector.

> **Karl Weierstrass (1815-1897)**
>
> 
>
> Nació en Ostenfelde, Westfalia (actualmente Alemania). Se dedicó a las matemáticas a partir de 1838, pero no llegó a terminar sus estudios de doctorado. Se considera un pionero de la fundamentación de las matemáticas y, en particular, de su análisis. Los trabajos de Weierstrass sobre la aritmetización del análisis completaron los de Bolzano, Abel y Cauchy, los cuales se conocieron a partir de 1859 por los cursos que ofrecían en la Universidad de Berlín. Weierstrass resaltó el concepto aritmético e interpretó una variable como "una letra que representa cualquier valor de un conjunto dado", con lo cual se trató de prescindir de la idea de movimiento, implícita en la expresión "una variable se aproxima a un límite", que es común en las definiciones de Cauchy y Bolzano.
>
> La primera definición de límite de una función en términos de ε y δ, propuesta por Weierstrass, puede encontrarse, según parece, en su curso de cálculo diferencial impartido en 1861. Weierstrass se planteó la cuestión de la construcción de una función continua que es no derivable en todo punto. La célebre función de Weierstrass fue comunicada en una carta que el matemático escribió a Du Bois-Reymond en 1874. Esta función continua, pero no derivable en todo punto, precipitó la crisis que llevó a la construcción del sistema de los números reales.

4.7.4 Postulado de continuidad

Para probar el teorema de Weierstrass hemos utilizado el axioma del supremo, es decir, hemos utilizado la hipótesis de que existe el supremo de cualquier conjunto, en nuestro caso la existencia de $L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ahora probemos que si suponemos cierto el teorema de Weierstrass (y su corolario para sucesiones decrecientes) entonces es cierta la existencia del supremo, es decir, vamos a deducir el axioma del supremo a partir del teorema de Weierstrass.

Teorema

Una consecuencia del teorema de Weierstrass es el axioma del supremo.

Este teorema también lo podemos formular como sigue.

Teorema

Si toda sucesión creciente y acotada converge, entonces todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.

La demostración de este teorema la presentamos a continuación, pero puede omitirse en una primera lectura o en un curso para estudiantes de ingenierías.

Demostración

Supongamos que toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente y también que toda sucesión decreciente y acotada inferiormente converge. Mostremos que todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo. Sea A un conjunto no vacío, acotado superiormente y sea

$$S = \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ es cota superior de } A\}.$$

Probemos que S tiene un elemento mínimo. Elijamos $M_0 \in S$, es decir, M es una cota superior de A, así que $x \leq M_0$ para toda $x \in A$. Elijamos también $a_0 \in A$. Tenemos entonces $a_0 \leq M_0$. Si $a_0 = M_0$, entonces M_0 es el elemento mínimo de S pues ningún real menor que M_0 puede ser cota superior de A, ya que todo real menor que M_0 sería menor que a_0. Si $a_0 < M_0$, consideremos el punto medio entre a_0 y M_0, es decir $\frac{a_0+M_0}{2}$, se tiene entonces $a_0 < \frac{a_0+M_0}{2} < M_0$. Hay dos posibilidades: 1) que $\frac{a_0+M_0}{2}$ sea cota superior de A y 2) que $\frac{a_0+M_0}{2}$ no sea cota superior de A. Si $\frac{a_0+M_0}{2}$ es cota superior de A, hagamos $M_1 = \frac{a_0+M_0}{2}$ y tomemos $a_1 = a_0$. Tenemos en este caso

$$a_0 \leq a_1 < M_1 < M_0.$$

Si $\frac{a_0+M_0}{2}$ no es cota superior de A, elijamos $a_1 \in A$ tal que $\frac{a_0+M_0}{2} < a_1 \leq M_0$. En este caso hagamos $M_1 = M_0$ y tenemos entonces

$$a_0 < a_1 \leq M_1 \leq M_0.$$

Cualquiera de los dos casos que se cumpla, podemos afirmar que se cumple

$$a_0 \leq a_1 \leq M_1 \leq M_0.$$

Además se tiene

$$0 \leq M_1 - a_1 \leq \frac{M_0 - a_0}{2}.$$

Aplicando el mismo razonamiento a los elementos $a_1 \in A$ y $M_1 \in S$, tenemos que o bien $M_1 = \sup A$ o bien podemos elegir $a_2 \in A$ y $M_2 \in S$ tales que

$$a_1 \leq a_2 \leq M_2 \leq M_1.$$

y cumplen

$$0 \leq M_2 - a_2 \leq \frac{M_1 - a_1}{2} \leq \frac{M_0 - a_0}{2^2}.$$

Si continuamos con este proceso, tendremos que o bien para algún natural n_0, $M_{n_0} = \sup A$ o tenemos dos sucesiones (a_n) creciente y (M_n) decreciente tales que

$$a_0 \leq a_{n-1} \leq a_n \leq M_n \leq M_{n-1} \leq M_0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Además

$$0 \leq M_n - a_n \leq \frac{M_0 - a_0}{2^n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Por el teorema de Weierstrass las sucesiones (a_n) y (M_n) deben converger. Por la desigualdad anterior convergen al mismo límite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n.$$

Como M_n es cota superior de A para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos $x \leq M_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in A$. Por tanto, $x \leq \lim_{n\to\infty} M_n$, es decir L es cota superior de A. Por otra parte, como $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y (a_n) es creciente, para toda $\varepsilon > 0$ existe un elemento a_N de la sucesión tal que $L - \varepsilon < a_N \leq L$, esto significa que L es el supremo de A. Hemos probado el teorema.

En resumen tenemos el siguiente:

Teorema

Se cumple el axioma del supremo si y solo si es cierto el teorema de Weierstrass.

El teorema anterior nos posibilita para elegir como postulado de continuidad de los reales cualquiera de los dos enunciados

- (**Axioma del supremo**) Todo conjunto no vacío, acotado superiormente tiene supremo.
- (**Teorema de Weierstrass**) Toda sucesión creciente y acotada superiormente converge.

Nosotros preferimos utilizar el teorema de Weierstrass como postulado de continuidad de los números reales ya que su enunciado es más comprensibles y es más natural e intuitiva su validez para quien inicia sus estudios en los fundamentos del cálculo: ¿cómo no va a ser convergente una sucesión que crece permanentemente y se encuentra confinada en un intervalo?

Antes de enunciar otro criterio sobre convergencia basado en propiedades intrínsecas de las sucesiones veamos algunos resultados sobre sucesiones que requeriremos.

4.7.5 Subsucesiones y teorema de Bolzano-Weierstrass sobre subsucesiones convergentes

Definición 6

Sea (a_n) una sucesión de reales. Una **subsucesión** de (a_n) es toda sucesión de la forma (a_{n_k}) donde (n_k)es una sucesión estrictamente creciente de naturales.

Dicho en palabras simples, una subsucesión de una sucesión es cualquier sucesión que se obtiene al eliminar un número finito o infinito de términos de la sucesión.

Sucesión: $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, \ldots, a_{n_2}, \ldots\ a_{n_3}, \ldots$

Subsucesión: $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$

Es evidente que toda subsucesión (a_{m_k}) de una subsucesión (a_{n_k}) de (a_n), es una subsucesión de la sucesión original (a_n).

Ejemplo 30

Si $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$, entonces $(a_{2n}) = \left(\dfrac{1}{2n}\right)$ y $(a_{2n-1}) = \left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$ son subsucesiones:

Sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

Subsucesión: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots$

Subsución: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$

También es una subsucesión $\left(\frac{1}{n!}\right)$:

$$1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$$

Ejemplo 31

Para la sucesión $\left((-1)^n\right)$, las siguientes son subsucesiones constantes

$\left((-1)^{2n}\right) = (1): \quad 1, 1, 1, \ldots$

$\left((-1)^{2n-1}\right) = (-1): \quad -1, -1, -1, \ldots$

El siguiente teorema es fácil de probar y se deja como ejercicio para el lector.

Teorema

Toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y converge al mismo límite, es decir, si (a_n) es convergente y $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, entonces $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k}$ para toda subsucesión (a_{n_k}) de (a_n).

Como corolario de este teorema tenemos un criterio muy útil para probar la divergencia de sucesiones.

Teorema

Si una sucesión (a_n) tiene dos subsucesiones convergentes a diferentes límites, entonces la sucesión no converge.

Antes de probar el anunciado teorema de Bolzano-Weierstrass, veamos un teorema que nos servirá para su prueba.

Teorema

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión monótona.

Demostración

Supóngase (a_n) acotada. Un índice N lo llamaremos *cumbre* si a_N es mayor que todos sus sucesores, es decir, si $a_N > a_n$ para todo natural $n > N$. Entonces un índice N no es cumbre si para algún natural $n > N$, se tiene $a_N \leq a_n$. Hay dos posibilidades, que (a_n) tenga un número finito de índices cumbre o que tenga un número infinito. Si solamente tiene un número finito, digamos $N_1, N_2, \ldots, N_m$, entonces ningún entero $n > N_m$ es cumbre, por lo tanto, si elegimos $n_1 > N_m$, existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. También existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Continuando con este proceso construimos una sucesión (a_n) creciente. Por otra parte, si existe una infinidad de índices cumbre, digamos (N_k), tenemos entonces $a_{N_1} > a_{N_2} > a_{N_3} \ldots$, así que obtenemos una sucesión (a_{N_k}) estrictamente decreciente. En cualquiera de los casos tenemos una subsucesión de (a_n) monótona. Esto prueba el teorema.

Como consecuencia de este teorema y del teorema de Weierstrass obtenemos el siguiente.

Teorema (de Bolzano-Weierstrass)

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Ahora estamos en posibilidades de estudiar el criterio de convergencia prometido.

4.7.6 Criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones

El criterio de convergencia que ahora estudiaremos también remite a propiedades intrínsecas de las sucesiones.

Teorema (Criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones)

Una sucesión (a_n) de reales es convergente si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que para cualesquiera $n, m \geq N$ se cumple

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Esta condición la llamaremos **condición de Cauchy.**

Demostración

Supongamos que la sucesión (a_n) es convergente y sea $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe un natural N tal que $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo natural $n \geq N$. Por lo tanto si $n, m \geq N$ tenemos

$$a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que se cumple la condición de Cauchy y, por tanto, la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que la sucesión (a_n) cumple la condición de Cauchy. Probemos primero que la sucesión es acotada. De la condición de Cauchy tenemos que en particular para $\varepsilon = 1$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_{N_1}| < 1 \text{ para toda } n \geq N_1.$$

Por tanto, para toda $n \geq N_1$ tenemos

$$|a_n| = |a_n - a_{N_1} + a_{N_1}| \leq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| \leq 1 + |a_{N_1}| \text{ para toda } n \geq N_1.$$

Entonces, si hacemos $M = \text{máx}\, \{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{N_1}|, 1 + |a_{N_1}|\}$, tenemos

$$|a_n| \leq M \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Esto significa que la sucesión (a_n) es acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass (a_n) tiene una subsucesión (a_{n_k}) convergente. Sea ℓ su límite. Probemos que al cumplir (a_n) la condición de Cauchy y tener una subsucesión convergente, la sucesión misma converge a ℓ.

Sea $\varepsilon > 0$. Como (a_n) cumple la condición de Cauchy existe un natural N_1 tal que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para cualesquiera } n, m \geq N_2.$$

Como l es el límite de la sucesión (a_{n_k}), existe un natural N_2 tal que

$$|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n_k \geq N_2.$$

Por lo tanto, si $N = \text{máx}\, \{N_1, N_2\}$ se cumple

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para cualesquiera } n, m \geq N \text{ y } |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n_k \geq N.$$

Entonces si fijamos $n_k \geq N$, tenemos

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que (a_n) converge a l y por lo tanto queda probado el teorema.

Como en el caso del teorema de Weierstrass, el criterio de Cauchy nos permitirá probar que ciertas sucesiones son convergentes sin necesidad de exhibir su límite, nos permite hacer pruebas teóricas de existencia de límites. Ahora será posible establecer con rigor algunas definiciones de ciertos números muy importantes de la matemática, por ejemplo, el número e y la constante γ (gamma), ambos de Euler. El teorema de Weierstrass es aplicable solo a sucesiones monótonas, pero el Criterio de Cauchy podemos aplicarlo a toda sucesión.

4.8 Algunas sucesiones especiales

En esta sección aplicaremos los resultados de la sección anterior a varias sucesiones importantes.

4.8.1 La sucesión $\sqrt[n]{a}$

Probemos que la sucesión

$$2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ \ldots$$

converge a 1. Nuestro procedimiento también será aplicable a la sucesión

$$0.32, \sqrt{0.32}, \sqrt[3]{0.32}, \sqrt[4]{0.32}, \ldots$$

la cual converge a 1. Probaremos que, en general, para toda $a > 0$, la sucesión

$$a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ \ldots$$

converge a 1. El término general de esta sucesión es $a_n = \sqrt[n]{a}$. Para nuestra demostración vamos a emplear la conocida desigualdad de Bernoulli

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh,$$

válida para toda $n \in \mathbb{N}$ y $h > -1$. Esta desigualdad se puede probar por inducción, pero el caso especial $h \geq 0$ se obtiene inmediatamente del desarrollo binomial

$$(1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \cdots + h^n$$

pues todos los sumandos del miembro derecho son no negativos, así que la suma de la totalidad de ellos es mayor o igual que la suma de los primeros dos. Nosotros precisamente la usaremos para $h \geq 0$.

Deseamos probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Dividimos la prueba en tres casos

i) $a > 1$,
ii) $a = 1$,
iii) $0 < a < 1$

Probemos el caso i)
Sea $a > 1$ y $a_n = \sqrt[n]{a}$. Es claro que $a_n > 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$h_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0.$$

Se tiene, entonces,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$$

donde $h_n > 0$. Tenemos una sucesión $(h_n)_{n=1}^{+\infty}$ de números positivos. Para probar que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

basta demostrar que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Esto es lo que probaremos a continuación.

Puesto que $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, se tiene, entonces,

$$a = (1 + h_n)^n$$

Luego, por la desigualdad de Bernoulli tenemos

$$a \geq 1 + nh_n$$

De donde

$$0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, se sigue del teorema del sándwich que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, que es lo que deseábamos probar.

Probemos el caso ii)
El caso **ii)** es obvio, pues si $a = 1$, entonces $a_n = \sqrt[n]{1} = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Probemos el caso iii)
Sea pues $0 < a < 1$, definamos

$$\alpha = \frac{1}{a}.$$

Entonces, tenemos $\alpha > 1$, así que por el caso **i)**, ya probado, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1,$$

Pero

$$\sqrt[n]{\alpha} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

luego

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}.$$

Por tanto, existe $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a}$ y tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha}} = 1 .$$

Hemos probado que en todos los casos

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 .$$

4.8.2 La sucesión α^n

Sea $-1 < \alpha < 1$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^n = 0$$

Probemos esta igualdad considerando primero el caso $0 < \alpha < 1$.
Según esta condición, podemos escribir α en la forma

$$\alpha = \frac{1}{1 + h}$$

donde $h > 0$. Por tanto

$$\alpha^n = \frac{1}{(1 + h)^n}$$

Usando la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

obtenemos

$$0 \leq \alpha^n \leq \frac{1}{1 + nh}.$$

Además, puesto que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + nh} = 0,$$

se sigue del teorema del sándwich que $\lim_{n \to \infty} \alpha^n = 0$. El caso $\alpha = 0$ es obvio.

Ahora consideremos $-1 < \alpha < 0$. En este caso, $0 < |\alpha| < 1$, así que $\lim_{n \to \infty} |\alpha|^n = 0$; por tanto, $\lim_{n \to \infty} |\alpha^n| = 0$. Esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\alpha^n| < \varepsilon$$

para toda $n \geq N$. Sin embargo, esto también quiere decir

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0.$$

Con esto probamos que en todos los casos se cumple $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

4.8.3 La sucesión $n\alpha^n$

Sea $-1 < \alpha < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0.$$

Como en la subsección anterior, consideremos primero el caso $0 < \alpha < 1$. Ahora en vez de utilizar la desigualdad de Bernoulli, utilizaremos una variante:

$$(1 + h)^n \geq 1 + n(n - 1)h^2 \text{ para todo } h > 0 \text{ y todo } n \in N.$$

Esta desigualdad se obtiene fácilmente del desarrollo binomial

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \cdots + nh^{n-1} + h^n.$$

El miembro izquierdo $(1 + h)^n$ es mayor o igual que la suma de cualquier número finito de sumandos del miembro derecho, pues cada sumando es positivo cuando $h > 0$.

Sea h definida por $\alpha = \dfrac{1}{1+h}$ o sea $h = \dfrac{1}{\alpha} - 1$. Entonces $h > 0$ y tenemos

$$\alpha^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+n(n-1)h^2}$$

Luego

$$0 \leq n\alpha^n \leq \frac{n}{1+n(n-1)h^2} \leq \frac{1}{(n-1)h^2} \text{ para } n \geq 2.$$

Por tanto, por el teorema del sándwich

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0.$$

Esto prueba la afirmación para $0 < \alpha < 1$. El caso $\alpha = 0$ es trivial y el caso $-1 < \alpha < 0$ se sigue del hecho de que $\lim_{n\to\infty} \left|n\alpha^n\right| = \lim_{n\to\infty} n|\alpha|^n = 0$.

4.8.4 La sucesión $\sqrt[n]{n}$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para toda $a > 0$, ahora probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Para probarlo, usaremos nuevamente la desigualdad

$$(1 + h)^n \geq 1 + \frac{n(n - 1)}{2}h^2$$

válida para toda $h \geq 0$. Esta desigualdad, como en el caso de Bernoulli para $h \geq 0$, se obtiene de forma automática del desarrollo binomial.

Probemos pues, que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Para toda $n > 1$ se tiene $\sqrt[n]{n} > 1$. Sea h_n definida por

$$h_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

Entonces, tenemos $h_n > 0$ y además

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$$

Por tanto

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 .$$

Despejando h_n, obtenemos

$$0 \leq h_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = 0$ se sigue nuevamente del teorema del sándwich que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0.$$

4.8.5 Número e de Euler

De este número ya hemos hablado antes; le dedicamos una sección en el capítulo 1. Ahora, podemos definirlo con todo rigor como el siguiente límite

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

el cual probaremos que efectivamente existe, aun cuando sea imposible determinarlo con precisión. Por cierto, Euler calculó 23 decimales correctos de este número

$$e = 2.71828182845904523536028\ldots$$

Probemos pues, que la sucesión que tiene por término general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es convergente. Para ello mostraremos que la sucesión es creciente y que está acotada superiormente por 3.

Usaremos el desarrollo binomial

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + $$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-2))}{(n-1)!}ab^{n-1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}b^n$$

De este desarrollo podemos escribir

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \\ + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-2))}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}$$

Por tanto, tenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) \\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Primero, probemos que la sucesión está acotada superiormente, para lo cual también usaremos la siguiente desigualdad para la suma geométrica

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r} < \frac{1}{1-r}$$

que se cumple para $0 < r < 1$.

Del desarrollo que obtuvimos para $(1+\frac{1}{n})^n$ y de la desigualdad anterior obtenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

(hemos utilizado el hecho de que $\frac{1}{m!} < \frac{1}{2^{m-1}}$). Así que tenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Esto prueba que la sucesión está acotada.

Enseguida probemos que la sucesión es creciente. Esto se sigue al comparar los desarrollos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right) + \cdots + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Observe que el desarrollo de $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ tiene un sumando más que el de $(1+\frac{1}{n})^n$. Por otra parte, cada sumando del primer desarrollo de la forma

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

es menor que el correspondiente del segundo desarrollo

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Esto prueba que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

lo cual significa que la sucesión es estrictamente creciente, que es lo que deseábamos probar.

Del teorema de Weierstrass se sigue que existe

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Este límite es denotado por e y es llamado el número e de Euler.

Ejemplo 32

Considérese la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, dada por

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Esta sucesión es similar a la que usamos para definir el número e. Como ejercicio para el lector, se pide que pruebe que esta sucesión también converge al número e.

Ahora, probemos que se trata de una sucesión decreciente, para lo cual mostremos que se cumple

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} > 1$$

para todo entero $n > 1$. Primero, transformemos el cociente $\frac{a_{n-1}}{a_n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Así pues, tenemos

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Por otra parte, de la desigualdad de Bernoulli obtenemos

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1},$$

por tanto

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2 - 1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \quad .$$

Hemos probado que la sucesión (a_n) es decreciente.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos la siguiente desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

La sucesión del extremo izquierdo es creciente y la del extremo derecho decreciente; ambas sucesiones convergen al número e.

4.8.6 El número π

En el capítulo 1 establecimos la definición analítica de π, dada por el siguiente límite

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}$$

pero no teníamos una definición matemáticamente aceptable de límite que precisara la expresión anterior.

Ahora ya estamos en posibilidades de probar que efectivamente existe tal límite, para lo cual demostraremos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dada por

$$x_n = 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}$$

es creciente y está acotada.

Antes de iniciar la prueba, analicemos la expresión anterior. Esta consiste de n raíces, de las cuales las $n - 1$ raíces interiores podemos definirlas recursivamente como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \sqrt{2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} \, . \end{aligned}$$

En el ejemplo 19 probamos que esta sucesión está acotada superirormente por 2.

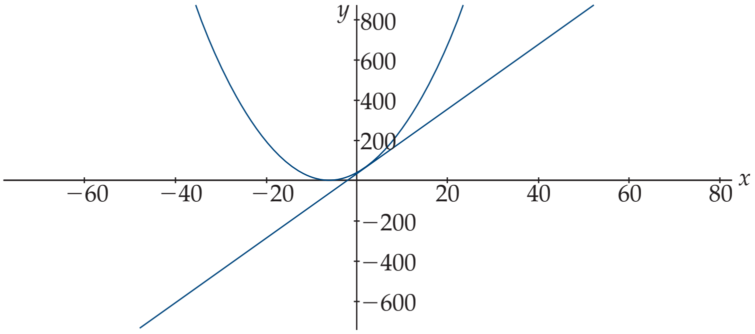
En la lista de ejercicios al final de este capítulo, se le pedirá que demuestre que esta sucesión es creciente y está acotada, y que de hecho converge a 2. Entonces, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ puede escribirse como

$$x_n = 2^n \sqrt{2 - a_{n-1}}\ .$$

Para probar que esta sucesión es creciente, usaremos la desigualdad

$$16(x + 2) \leq (6 + x)^2.$$

Válida para todo real x. Es posible probar esta desigualdad de diversas maneras, una de ellas, muy elegante, es observando que la recta $y = 16x + 32$ es tangente a la parábola $y = (6 + x)^2$ en el punto (2, 64).



Dado que la parábola se encuentra totalmente por arriba de la recta tangente, podemos afirmar que se cumple la desigualdad $16(x + 2) \leq (6 + x)^2$ para todo real x.

Probemos, pues, que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente. De la desigualdad anterior tenemos que

$$16(2 + a_{n-1}) \leq (6 + a_{n-1})^2$$

para todo entero positivo n. Por tanto

$$\begin{aligned}
4\sqrt{2 + a_{n-1}} &\leq 6 + a_{n-1}\\
4a_n &\leq 6 + a_{n-1}\\
-a_{n-1} &\leq 6 - 4a_n\\
2 - a_{n-1} &\leq 8 - 4a_n\\
2 - a_{n-1} &\leq 4(2 - a_n)
\end{aligned}$$

Extrayendo la raíz cuadrada obtenemos

$$\sqrt{2 - a_{n-1}} \leq 2\sqrt{2 - a_n}$$

De donde

$$2^n\sqrt{2 - a_{n-1}} \leq 2^{n+1}\sqrt{2 - a_n}$$

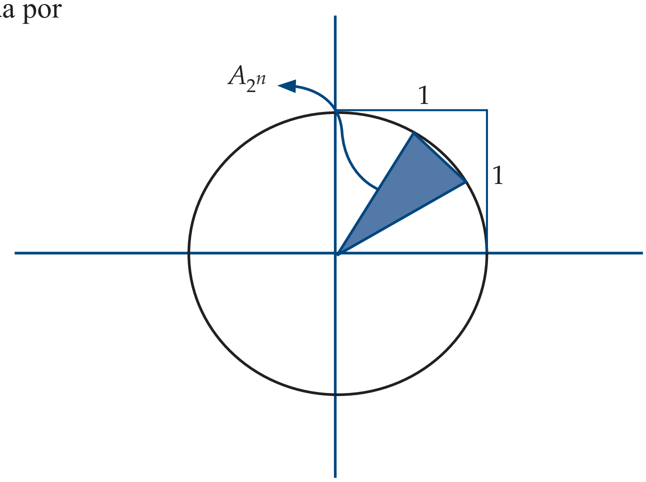
Esto prueba que

$$x_n \leq x_{n+1}$$

para todo entero positivo n.

Ahora probemos que la sucesión (x_n) es acotada. Recordemos que la longitud del lado del polígono de 2^n lados, inscrito en el círculo de radio 1 está dada por

$$l_{2^n} = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2\ \text{raíces encajadas}}}.$$



El área de cada triángulo con base uno de los lados del polígono es igual a

$$A_{2^n} = \frac{1}{2} l_{2^n} h_{2^n},$$

donde h_{2^n} es la altura del triángulo. Dado que en el primer cuadrante se ubican la cuarta parte de la totalidad de los triángulos, es decir $\frac{1}{4}\cdot 2^n = 2^{n-2}$, la suma de las áreas de estos triángulos es igual a $2^{n-2}A_{2^n} = 2^{n-2}\cdot\frac{1}{2}l_{2^n}h_{2^n} = 2^{n-3}l_{2^n}h_{2^n}$. Esta suma es menor que el área del cuadrado de lado 1, es decir $2^{n-3}l_{2^n}h_{2^n} < 1$ o sea $2^n l_{2^n}h_{2^n} < 2^3$. De aquí obtenemos una desigualdad para el perímetro del polígono $2^n l_{2^n} < \dfrac{8}{h_2 n}$. La sucesión de alturas $(h_2 n)$ es creciente y converge al radio cuyo valor es 1. El menor valor de los elementos de la sucesión (h_{2^n}) es $h_{2^2} = h_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces $2^n l_{2^n} < \frac{8}{h_{2^n}} \leq 8\sqrt{2}\,\dfrac{8}{h_2 n}$. Hemos mostrado que

$$2^n l_{2^n} = 2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2\ \text{raíces encajadas}}} < 8\sqrt{2}\ \text{ para todo natural } n \geq 2.$$

Lo cual también podemos escribir

$$2^{n-1} l_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2\ \text{raíces encajadas}}} < 4\sqrt{2}\ \text{ para todo natural } n \geq 2.$$

O bien

$$2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1\ \text{raíces encajadas}}} < 4\sqrt{2}\ \text{ para todo natural } n \geq 1.$$

Es decir, (x_n) es acotada. Del teorema de Weierstrass se sigue que la sucesión es convergente, su límite es precisamente

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}\,.$$

4.8.7 Constante γ de Euler

Considérese la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, dada por

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Mostraremos que esta sucesión es estrictamente decreciente y que está acotada inferiormente. Escribamos

$$\begin{aligned} \log n &= \log n - \log(n-1) + \log(n-1) - \log(n-2) + \cdots + \log 3 - \log 2 + \log 2 - \log 1 \\ &= \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n}{n-1}\right) \\ &= \left(1 - \log\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \log\frac{n}{n-1}\right) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Primero, mostremos que cada término entre paréntesis $\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}$ es positivo. De la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

que obtuvimos en el ejemplo anterior y que vale para todo natural m, al tomar logaritmo natural, obtenemos

$$m\log\left(1 + \frac{1}{m}\right) < 1 < (m+1)\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$m\log\left(\frac{m+1}{m}\right) < 1 < (m+1)\log\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

Por tanto

$$\frac{1}{m+1} < \log\left(\frac{m+1}{m}\right) < \frac{1}{m}$$

así que

$$\frac{1}{m+1} - \log\left(\frac{m+1}{m}\right) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{m} - \log\left(\frac{m+1}{m}\right) > 0$$

para todo natural m. La segunda desigualdad es precisamente lo que deseábamos probar. Así mostramos que cada $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ es positivo, lo que significa que el cero es una cota inferior para la sucesión.

Ahora, probemos que la sucesión es decreciente. Para tal efecto, escribamos la expresión correspondiente para a_{n+1}

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \log(n+1) \\ &= \left(1 - \log\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \log(n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right] \\ &= \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Por lo probado antes, concluimos que esta expresión es negativa, así que

$$a_{n+1} < a_n$$

Esto prueba que $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ es decreciente. Del teorema de Weierstrass se sigue que esta sucesión converge, su límite se denota por la letra griega γ y se le denomina constante γ de Euler:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

A continuación escribimos los primeros 24 decimales

$$\gamma = 0.577215664901532860606512\ldots$$

Hoy en día no se sabe si γ es racional o irracional. Quien halle la respuesta, con toda seguridad se ganará un lugar en la historia de la matemática.

4.9 Nuevamente sumatorias infinitas

Las operaciones suma y multiplicación entre números reales son “operaciones binarias”, esto significa que son operaciones que se realizan entre pares de números. Después de todo, al cursar la educación primaria nos enseñaron las tablas de sumar y las tablas de multiplicar para pares de números. Por fortuna, no hubo necesidad de que aprendiésemos tablas para ternas de números, pues además de las tremendas dificultades que hubiésemos tenido para memorizarlas, hubiera sido inútil y absurdo el simple hecho de intentar trabajar con estas. Sin embargo, en aritmética sumamos o multiplicamos tres o más cantidades, esto lo hacemos de dos en dos y es aquí donde resultan importantes las propiedades asociativas de las operaciones suma y multiplicación, respectivamente; la tarea se facilita con los algoritmos para sumar y multiplicar cantidades de más de un dígito. Baste, pues, con tener definidas las operaciones

suma (+) y multiplicación (×), entre pares de números reales, para hablar de la suma y la multiplicación de cualquier cantidad *finita* de reales.

Consideremos el caso particular de la operación suma. Según el diccionario de Manuel Porrúa:

> **SUMA**, *f. arit*. Resultado de la adición de dos o más números. Agregado de muchas cosas. Acción de sumar.

Hablando con propiedad, a la operación de sumar debiéramos llamarla **adición** y al resultado después de realizar esta operación: **suma**; sin embargo, a menos que cause alguna confusión seguiremos con la costumbre de llamarle suma tanto al resultado como a la operación misma.

Ya hemos dicho antes que aun cuando la suma es una operación binaria, podemos hablar de la suma de cualquier número finito de reales $a_1, \ldots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

No obstante que el número de sumandos puede ser tan grande como deseemos, en el contexto de la aritmética estamos limitados a una cantidad **finita**. Sin embargo, en el contexto del análisis matemático se aspira a sumar una cantidad infinita de reales.

En el capítulo1, sección 1.3, establecimos con argumentos geométricos la igualdad

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n} \text{ para todo natural } n.$$

De esta relación concluimos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\approx 1 \text{ si “}n\text{ es grande”.}$$

Ahora podemos precisar esta idea en términos de límites de sucesiones. Dado que , obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

Esto lo escribimos simplemente

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

Los tres puntos que aparecen al final del miembro izquierdo representan la infinidad de términos restantes, entendiéndose por lo tanto que se trata de una suma con una infinidad de sumandos. Pero el miembro izquierdo de esta expresión no es otra cosa que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Otra manera equivalente de escribir la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=1$$

es

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

En esta expresión hay un nuevo símbolo, pero no hay ninguna idea nueva. En todas ellas la sumatoria es entendida como un paso al límite. Esta expresión representa el límite de la sucesión

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} \\
s_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\
s_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\
&\vdots \\
s_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

El límite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=1$$

es fácilmente calculable de la igualdad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ para todo natural n.

Esta identidad es un caso particular de la fórmula para la suma geométrica

$$r+r^2+\cdots+r^n=r\,\frac{1-r^n}{1-r}\quad (r\neq 1).$$

Más adelante vamos a requerir la fórmula que inicia con $1 = r^0$:

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=r\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\quad (r\neq 1).$$

Establezcamos esta última y enseguida la que inicia con r. Hagamos

$$S = 1 + r + \ldots + r^n$$

Tenemos entonces

$$rS = r + r^2 + \ldots + r^{n+1}$$

por tanto

$$S - rS = 1 - r^{n+1}.$$

Es decir,

$$(1 - r)S = 1 - r^{n+1}.$$

De aquí despejamos S para obtener

$$S=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\ \text{para } r\neq 1.$$

O sea

$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (r \neq 1).$$

De esta identidad obtenemos

$$r + \cdots + r^n = r\left(1 + r + \cdots + r^{n-1}\right) = r\,\frac{1-r^n}{1-r} \quad \left(r \neq 1\right).$$

Si $|r| < 1$ sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0.$$

Entonces para $|r| < 1$ tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

es decir

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + r + \cdots + r^n\right) = \frac{1}{1-r}.$$

En este caso también escribiremos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ si } |r| < 1$$

La sumatoria infinita inicia desde $n = 0$, pues las sumas finitas $1 + r + \ldots + r^n$ comienzan en $r^0 = 1$. Si iniciamos la sumatoria con r tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(r + \cdots + r^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(r\,\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{r}{1-r} \quad \left(|r| < 1\right)$$

o sea

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \quad \left(|r| < 1\right).$$

Antes de continuar nuestro estudio sobre sumas infinitas veamos algunas propiedades de la notación sigma.

4.9.1 Notación Σ para suma

En la sección anterior utilizamos la expresión

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

como una abreviación de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

El símbolo Σ es la decimoctava letra mayúscula del alfabeto griego, llamada sigma (cuya minúscula es σ), equivalente a la letra S (mayúscula) de nuestro alfabeto, primera letra de la palabra suma.

El uso que ahora le estamos dando a la letra sigma Σ es la generalización de la notación sigma para la suma de una cantidad finita de reales, como lo veremos a continuación.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son n números reales, la suma de estos, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, se abrevia como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

La letra k es un índice conocido como *"índice mudo"*, esto se debe a que cualquiera de los siguientes símbolos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \sum_{v=1}^{n} a_v,\ \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu$$

se puede usar para representar la misma sumatoria $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; en general, cualquier letra podría emplearse en lugar de k, la única que no podemos usar es n (ya que dicha letra se está utilizando para representar un entero positivo particular). Así, por ejemplo, tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} x^i = x^1 + x^2 + \cdots + x^m$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Existen diversas variantes obvias de la notación sigma, por ejemplo

$$\sum_{i=3}^{n} b_i$$

Que denota la suma $b_3 + b_4 + \cdots + b_n$. La expresión $\sum_{i=2}^{100} a_i$ denota la sumatoria

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{100}$$

El índice mudo que aparece en la parte inferior de Σ puede omitirse, ya que podría ser suficiente escribir $\sum_{2}^{100} a_i$, en lugar de $\sum_{i=2}^{100} a_i$, sin embargo, en algunos casos resulta necesario explicitarlo. Por ejemplo, las expresiones

$$\sum_{i=1}^{n} i^j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} i^j$$

representan sumatorias distintas:

$$\sum_{i=1}^{n} i^j = 1^j + 2^j + \cdots + n^j, \quad \sum_{j=1}^{n} i^j = i + i^2 + \cdots + i^n$$

Por otra parte, sería más propio llamarle "variable muda" que "índice mudo", ya que, por ejemplo, en la expresión

$$\sum_{i=2}^{5} ia_i b^i$$

la i denota un subíndice para a_i, mientras que para b^i denota un exponente, pero i además aparece como factor de $a_i b^i$.

Ejemplo 33

Las siguientes igualdades son casos típicos donde se usa la notación sigma para la suma.

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 1+3+5+\cdots+(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)x^i = \sum_{i=1}^{n+1} ix^{i-1} = 1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} ia_i = \sum_{i=1}^{n} ia_i$$

Ejemplo 34

Un caso singular, que en ocasiones causa algunas dificultades, es la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} a = na\ .$$

En la expresión $\sum_{i=1}^{n} a$ se debe entender que cada sumando es igual a a. Dos casos particulares que debemos tener claros son

$$\sum_{i=1}^{n} j = nj$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

La notación sigma para la sumatoria resulta especialmente útil cuando se hallan dos o más símbolos Σ.

Ejemplo 35

La expresión

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

indica que debemos realizar primero la "suma sobre j", manteniendo la i fija, de modo que para cada i obtenemos una suma:

$$b_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im}.$$

Enseguida debemos realizar la "suma sobre i", es decir,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im}).$$

Así que el símbolo

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

representa la suma

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im})$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m}) + \cdots + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm})$$

Ejemplo 36

Una sumatoria doble, diferente a la del ejemplo anterior, es

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_1 + \cdots + a_k\right)$$

$$= a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

En este caso, el número de sumandos de la sumatoria interior es variable.

Ejemplo 37

Observe la diferencia de las dos siguientes sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b^k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_1 b^k + \cdots + a_m b^k\right)$$

$$= (a_1 b^1 + \cdots + a_m b^1) + (a_1 b^2 + \cdots + a_m b^2) + \cdots + (a_1 b^n + \cdots + a_m b^n)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_i b^k\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(a_i b^1 + \cdots + a_i b^n\right)$$

$$= (a_1 b^1 + \cdots + a_1 b^n) + (a_2 b^1 + \cdots + a_2 b^n) + \cdots + (a_m b^1 + \cdots + a_m b^n)$$

Son expresiones diferentes con el mismo resultado. Este es un caso particular de una de las propiedades más utilizadas de la notación sigma.

4.9.1.1 Propiedades de la notación Σ

La primera propiedad de las sumatorias dobles la llamaremos **propiedad conmutativa**:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ .$$

Probemos esta igualdad. El miembro izquierdo significa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im})\\ &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m}) + \cdots + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm})\end{aligned}$$

Si sumamos los primeros términos de cada paréntesis obtenemos

$$a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}.$$

Si sumamos los segundos términos, tenemos

$$a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}.$$

Continuando con este proceso, obtenemos sumas de la forma

$$a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}.$$

La suma de todas estas expresiones es

$$\sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}).$$

la cual se escribe

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Hemos probado la igualdad.

La igualdad $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ tiene la siguiente interpretación. Consideremos el arreglo de los sumandos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La doble sumatoria $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ significa que la suma se obtiene sumando primero los términos de cada renglón, es decir, para cada i fija se suman los términos del i-ésimo renglón y después se suman los resultados parciales para obtener la suma de todos los términos del arreglo. Por otra parte, la doble sumatoria $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, significa que primero se suman los términos de cada columna y después se suman los resultados parciales. Obviamente, ambos procedimientos conducirán al mismo resultado.

Un caso particular de una sumatoria $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ es

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)$$

Otra propiedad, que llamaremos la propiedad **distributiva**, es

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i .$$

Esta identidad es fácil de verificar. Se sugiere al lector que expanda ambos miembros de la igualdad para que comprenda su significado.

4.10 Series infinitas

4.10.1 Serie y sumas parciales

En la sección anterior vimos el caso específico de una suma con una infinidad de sumandos, a saber la suma geométrica, ahora veremos este concepto para el caso general.

Supongamos que tenemos una sucesión de números reales

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

la cual escribimos $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$. Deseamos hablar de la sumatoria infinita (cuando sea posible)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

para lo cual, y siguiendo las ideas del ejemplo particular antes mencionado, recurriremos a las sumas con un número finito de términos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si estas se aproximan a algún real s, a medida que crece el número de sumandos, diremos que existe la suma infinita.

Definición

Sea $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de reales. A la sucesión

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

la llamaremos **serie** y a cada elemento s_n le llamaremos una **suma parcial** de la serie. Así que la serie será la sucesión de sumas parciales (s_n). Por su parte, cada elemento a_n se llamará **término general** de la serie. La serie (s_n) también estará denotada por $\sum_{n\geq 1} a_n$. La serie $\sum_{n\geq 1} a_n$, será **convergente** si la sucesión de sumas parciales converge. A su límite

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + \cdots + a_n)$$

lo llamaremos la **suma de la serie** y lo denotaremos por

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Si la sucesión de sumas parciales no converge, diremos que la serie es **divergente**.

Nota

Observemos que hemos prescindido del símbolo $+\infty$ en la notación para la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$, pero conservamos el límite inferior $n \geq 1$ para indicar desde dónde inicia la sumatoria. En caso de que exista el límite de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$, hemos co nvenido denotarlo por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Esto indica que se trata de una suma infinita; es decir, una sumatoria con una infinidad de sumandos. Para el caso de una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$, la cual es divergente, no podemos hablar de su límite, por lo que el símbolo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ no tiene sentido. Por otra parte, a menos que sea absolutamente necesario, omitiremos el límite inferior $n \geq 1$ que aparece en la notación para una serie; así, a la serie cuyo término general sea a_n la denotaremos simplemente como $\sum a_n$. En ocasiones también escribiremos $\sum_{n\geq 1} a_n$ para indicar que la suma inicia con a_k.

Ejemplo 38

Para $r \in \mathbb{R}$, consideremos la serie $\sum_{n\geq 0} r^n$. Tenemos, entonces:

a) Si $|r| < 1$ la serie converge y su límite es $\frac{1}{1-r}$, es decir, $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.
b) Si $|r| \geq 1$ la serie diverge.

La serie $\sum_{n\geq 0} r^n$ es conocida como **serie geométrica** de razón r.

Ejemplo 39

La serie $\sum_{k\geq 1} k$ es divergente, pues la sucesión de sumas parciales dada por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

es una sucesión divergente.

Ejemplo 40

Probemos que la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente. Para ello observemos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

Es decir, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ están dadas por

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Luego, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, y su límite es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1.$$

4.10.2 Propiedades básicas de las series

Puesto que una serie es una sucesión (de sumas parciales), podemos aplicarle todas las propiedades y los resultados acerca de sucesiones, con lo cual obtendremos las versiones correspondientes para series. No obstante que las series son sucesiones de forma muy particular, esto no significa que el concepto de sucesión sea más amplio, debido a que, como aparece en uno de los ejercicios al final de esta lección, toda sucesión $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ puede interpretarse como una serie (asociada a alguna sucesión convenientemente construida). Así pues, podemos estudiar series traduciendo todos los resultados acerca de sucesiones y viceversa.
Las primeras propiedades sobre sucesiones que traduciremos a series serán las propiedades de linealidad.

Teorema

Si $\sum a_k$ y $\sum b_k$ son series convergentes, entonces

a) $\sum (a_k + b_k)$ es convergente y además

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

b) La serie $\sum \lambda a_n$ es convergente, donde λ es un real fijo. Además,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

La demostración del teorema anterior se basa en los siguientes hechos:

- La n-ésima suma parcial de la serie $\sum (a_k + b_k)$ es igual a la suma de las n-ésimas sumas parciales de las series $\sum a_k$ y $\sum b_k$, o sea

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- La n-ésima suma parcial de la serie $\sum \lambda a_n$ es λ veces la n-ésima suma parcial de la serie $\sum a_k$, es decir

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

y de las correspondientes propiedades para límites de sucesiones.

Con base en este teorema, podemos concluir un criterio de divergencia útil.

Teorema

Si $\sum a_k$ es una serie convergente y $\sum b_n$ es una serie divergente, entonces la serie $\sum (a_k + b_k)$ es divergente.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplo 41

La serie $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ es convergente, ¿cuál es su límite?

Lo anterior es cierto debido a que las series $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ y $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ son convergentes.

Ejemplo 42

La serie $\sum\left[\frac{1}{2^n}+(-1)^n\right]$ es divergente, ¿por qué?

4.11 Criterios de convergencia

4.11.1 Condiciones necesarias y condiciones suficientes para convergencia

Las propiedades de las series que se expusieron en la sección precedente, hasta ahora han resultado de poca utilidad, debido a que en esencia solo conocemos dos series convergentes: la serie geométrica $\sum r^n$, para $|r| < 1$, y cuyo límite es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Y la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ cuyo límite es $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

Para que podamos aprovechar tales propiedades necesitamos disponer de otras series convergentes, o mejor aún, convendría conocer condiciones bajo las cuales se pueda garantizar la convergencia de ciertas series, y de esta manera tener más casos de series convergentes.

Teóricamente, la convergencia o la divergencia de una serie puede establecerse analizando el comportamiento de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$. Pero, si esto es suficiente, entonces, ¿por qué la necesidad de tener criterios de convergencia formulados especialmente para series? La respuesta es muy sencilla: para analizar en la práctica la sucesión de sumas parciales, requerimos de una expresión para las sumas parciales más manejable que la definición

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

Con excepción de algunos casos simples, es difícil tener expresiones para las sumas parciales mediante las cuales podamos decidir su convergencia o divergencia. Por ejemplo, es automático deducir la convergencia de las series

$$\sum r^n \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

a partir de las respectivas fórmulas para las sumas parciales:

$$\sum_{n=0}^{m} r^n = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}, \quad |r| < 1$$

y

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Sin embargo, no es obvia la convergencia de las series

$$\sum_{k\geq 3} \frac{1}{k(\log k)(\log\log k)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1}$$

Así como tampoco es evidente la divergencia de

$$\sum \frac{1}{(\log k)^2} \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Veamos, en términos generales, los diferentes tipos de criterios que nos permiten determinar la convergencia de una serie. Si sospechamos que una serie es convergente, entonces los criterios más útiles serán aquellos que dan *condiciones suficientes* para la convergencia. Una condición suficiente es aquélla sobre el término general que permite garantizar la convergencia de la serie $\sum a_n$. Un criterio de este tipo tiene el siguiente aspecto

"Si a_n cumple… entonces $\sum a_n$ converge."

Otro tipo de criterio es aquel que proporciona *condiciones necesarias* para la convergencia. Una condición necesaria es aquella que se debe cumplir cuando la serie es convergente. Las condiciones necesarias son consecuencias del hecho de que la serie es convergente.

Un criterio de este tipo tiene el aspecto

" Si $\sum a_n$ converge entonces se cumple X"

donde X es una condición sobre la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ que podrá afirmarse cuando se haya garantizado previamente la convergencia. Si lo que pretendemos es concluir la convergencia de una cierta serie $\sum a_n$, un criterio de este tipo no nos ayuda.

Un tercer tipo de criterio de convergencia es el que se establece en términos de *condiciones necesarias y suficientes*. Un criterio de este tipo es más completo que cualquiera de los dos anteriores, pues posee las virtudes de ambos.

4.11.2 Una condición necesaria

Como ya lo habrá notado, en los dos ejemplos de series convergentes

a) $\sum r^n$ con $|r| \leq 1$

b) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

el término general de cada una de las convergencias se hace cada vez más pequeño a medida que crece n. Es muy natural que esto ocurra, pues si bien ha de existir la

"suma infinita", es decir, la suma con una infinidad de sumandos, cabe esperar que los sumandos de-ban hacerse cada vez más pequeños, ya que es la única manera de evitar que la suma crezca de forma ilimitada. De hecho, si tenemos una serie $\sum a_n$ que converge, entonces necesariamente el término general a_n tenderá a cero cuando n tienda a infinito. Este resultado lo establecemos en el siguiente teorema.

Teorema

Si $\sum a_n$ es una serie convergente entonces $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Demostración

Sea $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ la sucesión de sumas parciales,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Tenemos por hipótesis la existencia del límite $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Obviamente, también tenemos

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(s_{n+1} - s_n\right) = 0 .$$

Pero,

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1},$$

por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, que es lo que deseábamos probar.

El teorema anterior es un criterio que resulta especialmente útil para probar la divergencia de series.

La condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria, pero dista mucho de ser suficiente. El hecho de que el término general de una serie $\sum a_n$ tienda a cero, no garantiza que exista la suma infinita. Por ejemplo, no obstante que $\frac{1}{n} \to 0$, la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

es divergente, es decir, no existe la suma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

aun cuando pudiera parecer convergente a primera vista, como lo fue la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$$

cuyo límite es 2,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

más adelante probaremos que la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge pero que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Ejemplo 43

La serie $\sum \frac{n}{n+1}$ es divergente, pues si $a_n = \frac{n}{n+1}$, entonces tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Por tanto, a_n no tiende a cero y la serie es divergente.

Por su parte, la serie $\sum \frac{2^n}{n}$ es divergente, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$. Pruebe esta afirmación.

4.11.3 Criterio por comparación

De los criterios más útiles en la práctica para averiguar la convergencia o la divergencia de una serie son los que recurren a la comparación con otras series conocidas, de las cuales se conoce su convergencia o divergencia. Antes de establecer algunos de ellos, veamos un lema que por sí mismo puede considerarse un criterio de convergencia, y aun cuando no dudamos de que resulte útil en algunos casos específicos, nuestro interés en él se debe a que nos permitirá establecer otros criterios de convergencia.

4.11.4 Lema (criterio por acotamiento)

Una serie $\sum a_n$ de términos no negativos (es decir, $a_n \geq 0$ para toda $n \geq 1$) es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.

Demostración

El lema anterior no es otra cosa que la versión del teorema para sucesiones:

> "Una sucesión creciente, converge si y solo si está acotada superiormente"

En efecto, sea

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

Puesto que $a_n \geq 0$, se sigue que la sucesión $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ es creciente; por tanto, esta sucesión es convergente si y solo si está acotada superiormente, es decir, la serie $\sum a_n$ es convergente si y solo si $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ está acotada superiormente.

Con base en el lema anterior, probaremos nuestro primer criterio de convergencia por comparación.

4.11.5 Teorema (criterio por comparación)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series, tales que

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{para toda } n \geq 1.$$

Si la serie $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

Demostración

Sean $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_1 + \cdots + b_n$ para toda $n \geq 1$.

Puesto que $0 \leq a_n \leq b_n$ para toda $n \geq 1$, se sigue

$$0 \leq s_n \leq t_n$$

para toda $n \geq 1$. Que la serie $\sum b_n$ sea convergente significa que la sucesión $(t_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge y luego debe ser acotada. La desigualdad anterior implica que la sucesión $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ también es acotada, por tanto por el lema anterior debe converger. Esto prueba el teorema.

Un corolario de este teorema es el siguiente.

Corolario

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos no negativos tales que

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Si $\sum a_n$ diverge, entonces también diverge $\sum b_n$.

Una versión ligeramente modificada del teorema anterior es la siguiente.

Teorema

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos no negativos. Supongamos que existe $\lambda > 0$, tal que

$$0 \leq a_n \leq \lambda b_n$$

para toda $n \geq 1$. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

La utilidad que nos pueden brindar los dos teoremas anteriores para averiguar la convergencia o la divergencia de una serie $\sum a_n$, depende de lo afortunados que seamos para hallar una serie $\sum b_n$ convergente con la cual podamos compararla. Es, por tanto, muy importante que vayamos incrementando nuestro inventario de series convergentes y de series divergentes.

Ejemplo 44

La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$ es convergente, pues para cada $n \geq 1$ se tiene

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

como la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces $\sum \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$ es convergente

Ejemplo 45

La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ es convergente, pues para toda $n \geq 1$ se cumple la desigualdad

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

y, como en el caso anterior, la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n-1}}$ es convergente.

La desigualdad anterior se sigue del hecho

$$2^{n-1} \leq 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$$

lo cual vale para todo natural n.

Ejemplo 46

Probemos que la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ es convergente, para ello comparemos la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ con la serie $\sum \frac{1}{n\left(n+1\right)}$ que sabemos es convergente.

Escribamos $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ en la forma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

y comparemos cada uno de sus términos con los correspondienes de la suma $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$, con lo que obtenemos

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4}$$

En general, tenemos

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Así pues, la serie $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$, converge; por tanto, la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

que es la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ también debe hacerlo.

Nota

Una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ convege si y solo si la serie $\sum_{n\geq k+1} a_n$ converge, donde k es cualquier entero positivo fijo. La serie $\sum_{n\geq k+1} a_n$ se obtiene de la original, omitiendo los primeros k términos; a esta serie se le denomina el k-ésimo residuo de la serie original y su límite $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots$ es igual al de la serie original menos la suma de los primeros k términos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n=k} a_n = a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots$$

4.11.6 Criterio de Cauchy para convergencia de series

Si aplicamos el criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones obtenemos de manera inmediata su versión para series.

Teorema (criterio de Cauchy)

Una serie $\sum a_n$ es convergente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que para cualquier $n \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

A esta última propiedad le llamaremos **condición de Cauchy.**

Demostración

Supongamos que la serie $\sum a_n$ sea convergente. Esto significa que la sucesión de sumas parciales

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

es convergente. Por tanto, por el criterio de Cauchy, dada $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que $|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$ para todo natural $n \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Pero $|s_{n+k} - s_n| = |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}|$. Entonces se cumple $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ todo natural $n \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que para cualquier $n \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión de sumas parciales (s_n) satisface la condición de Cauchy para convergencia de sucesiones, entonces converge. Esto prueba el teorema.

4.12 Divergencia a infinito

Recordemos que una sucesión es divergente si no tiene límite, pero hay varias razones por las que una sucesión puede no tener límite. Una de ellas, es que la sucesión tienda a infinito, esto lo precisamos a continuación.

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ **diverge a** $+\infty$ y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

si para cada real M existe un índice $N \in \mathbb{N}$, tal que $M \leq a_n$ para todo entero $n \geq N$. De igual modo, la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ **diverge a** $-\infty$ y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

si para cada real M existe un índice $N \in \mathbb{N}$, tal que $a_n \leq M$ para todo entero $n \geq N$.

Una manera de parafrasear la definición de divergencia a $+\infty$ es: "una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$ si los términos de la sucesión son arbitrariamente grandes para índices suficientemente grandes".

Es claro que en la definición anterior de $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ podemos limitarnos a valores positivos de M, es decir, $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$ si para cada $M > 0$ existe un índice $N \in \mathbb{N}$, tal que $M \leq a_n$ para todo entero $n \geq N$. De igual modo, decimos que $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $-\infty$ si para cada $M < 0$ existe un índice $N \in \mathbb{N}$, tal que $a_n \leq M$ para todo entero $n \geq N$.

Una sucesión que diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ se dice que tiene **límite impropio** o que **converge impropiamente**.

Ejemplo 47

Se sigue inmediatamente de la definición que $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Ejemplo 48

La sucesión $((-1)^n n)_{n=1}^{\infty}$:

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$$

es divergente, pero no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

Ejemplo 49

Una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ puede divergir a $+\infty$, sin ser creciente, este es el caso de la sucesión

$$2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots$$

que tiene por término general

$$a_n = n + (-1)^{n+1}$$

La sucesión anterior es la suma de las sucesiones

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

y

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Como ejercicio para el lector, se pide que muestre con un ejemplo que se puede tener $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ sin que $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ sea una sucesión decreciente.

A continuación establecemos algunos resultados sobre sucesiones divergentes a $+\infty$ o $-\infty$.

a) Si $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

En efecto, como $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ no está acotada superiormente, para cada real M existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $M \leq a_N$. Como $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ es creciente se tiene $a_N \leq a_n$ para toda $n > N$; por tanto, para toda $n \geq N$ se cumple

$$M \leq a_N \leq a_n$$

Pero, por definición, esto significa que $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$.

b) Si $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión decreciente y no acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

La prueba es totalmente análoga a la del inciso anterior.

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

En efecto, supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Probemos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Como $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $M < a_n$ para toda $n \geq N$. Esto implica

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

para toda $n \geq N$. Pero esto prueba, precisamente, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

La prueba del segundo caso es análoga, por lo que se deja como ejercicio para el lector.

d) Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, entonces no necesariamente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ o $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$. Por ejemplo, si $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, pero $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

Veamos algunos teoremas que son fáciles de probar.

e) Si $a_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = 0$ entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$. La prueba se deja como ejercicio.

Teorema

La suma y multiplicación de dos sucesiones divergentes a $+\infty$ diverge a $+\infty$.

Demostración

Supongamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Probemos primero que

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

Sea M cualquier real. Como $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{M}{2} < a_n$ para toda $n \geq N_1$. También tenemos que $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$, por tanto, existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{M}{2} < b_n$ para toda $n \geq N_2$. Luego, si tomamos $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$, se cumplen al mismo tiempo $\frac{M}{2} < a_n$ y $\frac{M}{2} < b_n$ para toda $n \geq N$. De donde, sumando miembro a miembro, obtenemos

$$M < a_n + b_n$$

para toda $n \geq N$. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

Ahora, probemos que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = +\infty$$

Mostremos que para toda $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $M < a_n b_n$ para toda $n \geq N$. Sea $M > 0$. Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{M} < a_n$ para toda $n \geq N_1$. También tenemos que $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverge a $+\infty$, por tanto, existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{M} < b_n$ para toda $n \geq N_2$. Luego, si tomamos $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$, se cumplen al mismo tiempo $\sqrt{M} < a_n$ y $\sqrt{M} < b_n$ para toda $n \geq N$. De donde, multiplicando miembro a miembro, obtenemos

$$M < a_n b_n$$

para toda $n \geq N$.

Esto prueba el teorema.

Corolario

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ entonces para todo entero positivo k se tiene $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^k = +\infty$.

Las pruebas de los siguientes dos teoremas se dejan como ejercicio para el lector.

Teorema

Supongamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Si $c > 0$ entonces $\lim_{n\to+\infty} ca_n = +\infty$. De forma similar, si $c < 0$ entonces $\lim_{n\to+\infty} ca_n = -\infty$, en particular $\lim_{n\to+\infty} (-a_n) = -\infty$.

Teorema

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y c es cualquier real, entonces $\lim_{n\to+\infty} (a_n + c) = \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Teorema

Si (c_n) es una sucesión convergente y $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ entonces $\lim_{n\to+\infty} (a_n + c_n) = +\infty$.

Demostración

Mostremos que para todo $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M < a_n + c_n$ para todo natural $n \geq N$. Sea pues $M > 0$. Como (c_n) es convergente entonces es acotada, es decir, existe $M^* > 0$ tal que $-M^* \leq c_n \leq M^*$. Por otra parte, como $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, para todo real K existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K < a_n$ para todo natural $n \geq N$. Entonces se tendrá $-M^* + K < c_n + a_n$ para todo $n \geq N$. Si elegimos $K = M + M^*$, tenemos $M < c_n + a_n$ para todo $n \geq N$. Esto prueba el teorema.

Ejemplo 50

Supongamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Sean $m > k$ dos enteros positivos. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} [(a_n)^m - (a_n)^k] = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} [(a_n)^k - (a_n)^m] = -\infty$$

En efecto, como

$$(a_n)^m - (a_n)^k = (a_n)^k\,[(a_n)^{m-k} - 1]$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^k = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} [(a_n)^{m-k} - 1] = +\infty$$

tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} [(a_n)^m - (a_n)^k] = \lim_{n\to+\infty} ((a_n)^k[(a_n)^{m-k} - 1]) = +\infty$$

Además,

$$\lim_{n\to+\infty} [(a_n)^k - (a_n)^m] = \lim_{n\to+\infty} [-((a_n)^m - (a_n)^k)] = -\infty$$

4.13 La serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ y la serie alternante $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$

En esta sección mostraremos que la serie $\sum \frac{1}{n}$, conocida como serie armónica, diverge a $+\infty$ y que la serie pariente $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, conocida como serie alternante, converge. Para probar la divergencia de la serie armónica mostraremos que la sucesión de sumas parciales es no acotada.

Agrupemos sus términos de la siguiente manera

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots$$

En general, después de los dos primeros términos $1 + \frac{1}{2}$, cada grupo consta de los sumandos

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^k + 2^k} = \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

para $k = 1, 2, \ldots$. Como podemos observar el k-ésimo grupo consta de 2^k sumandos.

La suma de los términos de cada grupo es mayor que $\frac{1}{2}$, por ejemplo, para el grupo

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

Se tienen cuatro sumandos, de los cuales $\frac{1}{8}$ es el menor, de manera que la suma es mayor que $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. El segundo grupo a la derecha consta de ocho sumandos de los cuales el menor es $\frac{1}{16}$, por tanto, su suma es mayor que $8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$, etcétera. Se tiene entonces

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2.\frac{1}{2}$$

$$s_8 > \frac{3}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$s_{16} > \frac{3}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

En general, se tendrá $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Esto prueba que la sucesión de sumas parciales es no acotada y en consecuencia también prueba la divergencia de la serie armónica.

Ahora probemos que la serie alternante es convergente. Consideremos la sucesión de sumas parciales (s_n) dada por

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}.$$

Probemos que la subsucesión de sumas parciales de índice par (s_{2n}) es convergente. Asimismo probemos que la subsucesión de sumas parciales de índice impar (s_{2n-1}) converge y que ambas sucesiones convergen al mismo límite. Esto probará que la sucesión es convergente.

De la agrupación

$$s_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

se sigue que $s_{2n} > 0$ para todo índice par $2n$. De esta misma agrupación se sigue que la sucesión de índice par es creciente, pues

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+2}\right) > s_{2n}.$$

Además de la agrupación

$$s_{2n} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}$$

se sigue que $s_{2n} < 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir la sucesión (s_{2n}) está acotada superiormente por 1. Del teorema de Weierstrass ncluimos que (s_{2n}) converge.

Por otra parte, para índices impares agrupamos los términos como sigue

$$s_{2n+1} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

De esta agrupación se sigue que la subsucesión de sumas parciales con índice impar es decreciente, de hecho

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - \left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right) < s_{2n-1}.$$

De la agrupación

$$s_{2n+1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}$$

se sigue que $1-\frac{1}{2} < s_{2n+1}$ o sea $\frac{1}{2} < s_{2n+1}$. Esto significa que la sucesión de sumas parciales de índice impar está acotada inferiormente por $\frac{1}{2}$. Por el teorema de Weierstrass la sucesión (s_{2n-1}) es convergente.

Sean

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \;\text{ y }\; s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Como $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(s_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Es decir $s = s'$. Esto prueba que la sucesión (s_n) converge, dicho de otra manera existe

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

De hecho se puede probar que[1]

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \log 2.$$

Nota

Con frecuencia acudiremos a estas series para determinar la convergencia o divergencia de otras, mediante el criterio por comparación. En algunas ocasiones utilizaremos la serie iniciándose desde algún $k > 1: \sum_{n\geq k}\frac{1}{n}$.

Ejemplo 51

La serie $\sum_{m\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, pues para toda $n \geq 1$ se cumple

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ejemplo 52

La serie $\sum_{n\geq l}\frac{n^2+n+1}{n(n^2+1)}$ es divergente. En efecto, puesto que

$$\frac{n^2+n+1}{n(n^2+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+1}$$

se sigue que

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{n^2+n+1}{n(n^2+1)}$$

Luego la serie $\sum_{n\geq l}\frac{n^2+n+1}{n(n^2+1)}$ diverge.

[1] En el texto de Rivera/*Cáculo integral. Fundamentos, aplicaciones y notas históricas*. Vol. II, Ed. Patria puede consultarse una demostración.

4.14 Convergencia absoluta y convergencia condicional

En la sección anterior se probó que la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge. Asimismo, se probó la divergencia de la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

El valor absoluto del término general de la primera es igual al término general de la segunda. Lo cual demuestra que, en general, si se tiene una serie $\sum a_n$ convergente, entonces la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ no necesariamente converge.

Sin embargo, si se tiene una serie $\sum a_n$ para la cual, la de valores absolutos $\sum |a_n|$ converge, entonces necesariamente la serie $\sum a_n$ es convergente. Este resultado se presenta en el siguiente teorema.

Teorema

Sea $\sum a_n$ una serie cualquiera de números reales. Supongamos que la serie $\sum |a_n|$ converge. Entonces $\sum a_n$ también converge y además

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| .$$

Demostración

Para probar la convergencia de la serie mostremos que la serie $\sum a_n$ satisface la condición de Cauchy que estudiamos en la sección anterior. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria. Como la serie $\sum |a_n|$ es convergente satisface la condición de Cauchy, es decir, existe un natural N tal que para cualquier $n \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| \right| < \varepsilon.$$

Pero $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$.

Por tanto $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que la serie $\sum a_n$ es convergente. Otra prueba de la convergencia de $\sum a_n$ que prescinde del uso de la condición de Cauchy es la siguiente.

Definamos para toda $n \geq N$

$$b_n = a_n + |a_n|.$$

Entonces, se tiene

$$b_n = \begin{cases} 2a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$0 \leq b_n \leq 2\,|a_n|$$

para toda $n \geq 1$. Del criterio por comparación, de la convergencia de la serie $\sum |a_n|$ y de la desigualdad anterior se sigue que la serie $\sum b_n$ converge. Ahora que sabemos que la serie $\sum b_n$ converge, será fácil probar que $\sum a_n$ converge. En efecto, puesto que

$$a_n = b_n - |a_n|$$

para toda $n \geq 1$ y dado que las series $\sum b_n$ y $\sum |a_n|$ convergen, se sigue inmediatamente la convergencia de la serie $\sum a_n$.

Ahora, probemos la desigualdad

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Puesto que para toda $m \geq 1$, se tiene

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n| \text{ (desigualdad del triángulo)}$$

tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{m} |a_n|.$$

Pero, además

$$\lim_{m \to \infty} \left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right| = \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{m} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right|$$

Por tanto,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Con esto queda probado el teorema.

Las series $\sum a_n$, para las cuales la correspondiente serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ converge, son particularmente importantes dentro de la matemática, pues poseen algunas propiedades interesantes, estas reciben un nombre especial como aparece en la siguiente definición.

Definición

Sea $\sum a_n$ una serie cualquiera de números reales.

i) si $\sum |a_n|$ converge, se dice que $\sum a_n$ **converge absolutamente** o que es una serie **absolutamente convergente**.

ii) Si $\sum a_n$ converge, pero $\sum |a_n|$ diverge, se dice entonces que $\sum a_n$ **converge condicionalmente** o que es una serie **condicionalmente convergente**.

4.15 Criterio de la razón de D'Alembert

Como ya vimos en una sección anterior, una condición necesaria para que una serie $\sum a_n$ sea convergente, es $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Sin embargo, esta condición no es suficiente, así lo muestra la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$, la cual es divergente. La convergencia de una serie $\sum a_n$ depende de la rapidez con la cual el término general tienda a cero. Por ejemplo, el término general de la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ (convergente) tiende más rápido a cero que el de la serie $\sum \frac{1}{n}$ (divergente). En este último caso, la velocidad con la cual el término general tiende a cero es insuficiente para lograr la convergencia. El criterio por comparación basado en una desigualdad de la forma $0 \leq a_n \leq b_n$, nos permite concluir la convergencia de la serie $\sum a_n$, cuando sabemos que $\sum b_n$ converge, debido a que la desigualdad garantiza la convergencia suficientemente rápida a cero de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$.

El siguiente teorema nos proporciona otro criterio para convergencia.

4.15.1 Teorema (criterio de la razón de D'Alembert)

Sea $\sum a_n$ una serie de números reales tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

Entonces, tenemos

i) Si $0 \leq L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ diverge.

Si $L = 1$, no se puede hacer afirmación alguna respecto a la convergencia, pues existen casos tanto de convergencia como de divergencia que satisfacen esta condición.

Demostración

Prueba de i)
Supongamos que se cumple la condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$$

Sea $\varepsilon_o > 0$ tal que $0 \leq L < L + \varepsilon_o < 1$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$

existe (por definición de límite) un natural N, tal que $L - \varepsilon_o < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \varepsilon_o$ para todo natural $n \geq N$.

Sea $r = L + \varepsilon_o < 1$, entonces

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$$

para toda $n \geq N$. De esta forma,

$$\frac{|a_{n+1}|}{r} < a_n$$

para toda $n \geq N$. Por tanto,

$$\frac{|a_{n+1}|}{r^{n+1}} < \frac{|a_n|}{r^n}$$

para toda $n \geq N$. Hemos obtenido, entonces, que la sucesión $\left(\frac{|a_n|}{r^n}\right)_{n=N}^{+\infty}$ es decreciente. En particular tenemos

$$\frac{|a_n|}{r^n} \leq \frac{|a_N|}{r^N} = k$$

para toda $n \geq N$. Por tanto,

$$0 \leq a_n \leq kr^n$$

para toda $n \geq N$.

Puesto que la serie $\sum_{n\geq N} kr^n = k\sum_{n\geq N} r^n$ es convergente, se sigue entonces que la serie $\sum_{n\geq N} |a_n|$ converge y consecuentemente la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$. Esto prueba el inciso **i)**.

Prueba de ii)
Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L > 1$$

existe un natural N, tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

para toda $n \geq N$. Entonces, se tiene

$$|a_{n+1}| > |a_n|$$

para toda $n \geq N$. Esto significa que $\left(|a_n|\right)_{n=N}^{+\infty}$ es una sucesión creciente de números positivos y, por tanto, no puede converger a cero; consecuentemente la serie $\sum a_n$ diverge.

Para mostrar que la condición $L = 1$ no garantiza ni convergencia ni divergencia, basta considerar las series

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{n}$$

Es fácil verificar que en ambos casos se cumple la condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 .$$

Pero, la primera de las series converge, mientras que la segunda diverge. Con esto queda probado el teorema.

Ejemplo 53

Probemos, usando el criterio de esta sección, que la serie

$$\sum \frac{1}{n!}$$

es convergente.

Si $a_n = \frac{1}{n!}$, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Por tanto,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Tenemos, entonces, $0 = L < 1$ luego $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

Ejemplo 54

Determinemos para cuáles valores de r, la serie

$$\sum \frac{r^n}{n!}$$

converge.

Sea $a_n = \left|\frac{r^n}{n!}\right| = \frac{|r|^n}{n!}$. Si $r \neq 0$ tenemos entonces $a_n > 0$ para toda $n \in N$ y

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|r|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|r|^n}{n!}} = \frac{n!\,|r|^{n+1}}{(n+1)!\,|r|^n} = \frac{|r|}{n+1}$$

Así que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|r|}{n+1} = 0$$

para toda r. Luego, la serie $\sum \frac{|r|^n}{n!}$ converge para todo real r diferente de cero. Pero, es obvio que la serie también converge para $r = 0$, así que la serie original converge absolutamente para toda r.

Ejemplo 55

La serie $\sum nr^n$ converge para toda r, tal que $|r| < 1$. En efecto, si $r \neq 0$ sea

$$a_n = n\,|r|^n$$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)|r|^{n+1}}{n|r|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)|r|$$

Por tanto,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)|r| = |r|$$

De donde se sigue que si $L = |r| < 1$, la serie $\sum n|r|^n$ converge. La convergencia para el caso $r = 0$ es obvia.

Ejemplo 56

La serie $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge. En efecto, sea $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} \\ &= \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

O sea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}$$

Luego

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Por tanto, la serie $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

En la siguiente sección veremos otro de los criterios clásicos sobre convergencia de series.

4.16 Criterio de la raíz de Cauchy

El criterio de la razón, presentado en la sección anterior, está basado en el criterio por comparación y en el hecho conocido de que la serie geométrica $\sum r^n$ converge si $|r| < 1$. Dicha serie geométrica desempeñó un papel muy importante en la demostración del teorema anterior y constituye, además, la parte esencial en el teorema que presentaremos en este momento. La idea general es más directa en este caso, pues no es más que una mera traducción de la condición $0 \le a_n \le r^n$.

4.16.1 Teorema (criterio de la raíz de Cauchy)

Sea $\sum a_n$ una serie tal que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Entonces, tenemos:

i) Si $0 \leq L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ diverge.

Si $L = 1$, no se puede hacer conclusión alguna, pues existen casos tanto de convergencia como divergencia que cumplen esta condición.

Demostración

Prueba de i)
Supongamos $0 \leq L < 1$. Como en el teorema de la sección anterior, elegimos $L < r < 1$ y un natural N, tal que

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < r$$

para toda $n \geq N$. Es decir

$$0 \leq a_n < r^n$$

para toda $n \geq N$. Luego, del criterio por comparación y de la convergencia de la serie $\sum_{n\geq N} r^n$, se sigue que la serie $\sum_{n\geq N} a^n$ debe converger. Esto implica la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Prueba de ii)
Puesto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, se sigue que $\sqrt[n]{a_n} > 1$ para n mayor o igual que algún entero positivo N. Luego, $a_n > 1$ para $n \geq N$, consecuentemente no se cumple la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la cual es necesaria para la convergencia de la serie $\sum a_n$, esto implica que $\sum a_n$ diverge.

Para el caso $L = 1$, basta tomar las series $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n}$, como en la demostración del teorema anterior, pues se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

Esto prueba el teorema.

Ejemplo 57

La serie $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En efecto, si

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

tenemos

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 58

La serie $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ converge. En efecto, si

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

tenemos

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1$$

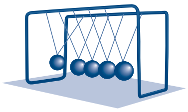
Luego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$$

Esto prueba que la serie $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ converge.

4.17 Problemas y ejercicios



Sucesiones límites de sucesiones

I. Responda las siguientes cuestiones.

1. Escriba los cuatro primeros términos de las sucesiones (a_n) y (b_n), donde

$$a_n = n^4, \text{ y } b_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$$

para toda $N \in \mathbb{N}$.

2. Determine un posible término general para las sucesiones

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

b) $1, 0, 1, 0, \ldots$

c) $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

d) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$

e) $1, 4, 1, 16, 1, 36, \ldots$

f) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots$

g) $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots$

h) $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$

3. En la siguiente sucesión, diga cuál es el elemento que aparece en el lugar 3 145 862. 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0,...

4. Pruebe que la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

es convergente, mostrando que es creciente y acotada. Halle su límite. Esta sucesión se define recursivamente como

$a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

5. Pruebe que la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

es convergente, mostrando que es creciente y acotada. Halle su límite. La definición recursiva es $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

6. Pruebe que la sucesión

$$\sqrt{6}, \sqrt{3+\sqrt{6}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{6}}},$$
$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{6}}}}, \ldots$$

cuya definición recursiva es $a_1 = \sqrt{6}$ y $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es convergente. Muestre que es creciente y acotada superiormente. Halle su límite.

7. Pruebe que la sucesión

$$\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$$

converge. Asimismo, muestre que es creciente y acotada superiormente. Halle su límite.

8. Defina recursivamente la sucesión

$$1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots$$

y pruebe que es convergente. Halle su límite.

9. Determine el término general de la sucesión

$$1.01, 1.0101, 1.010101, \ldots$$

y pruebe que es convergente. Halle su límite.

10. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n+n^2} = 1.$$

11. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e.$$

12. En este capítulo hemos probado que la sucesión de término general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es monótona decreciente. Ahora pruebe que converge a e.

13. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 0$$

14. Sea

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Sugerencia:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

15. La sucesión de Fibonacci (u_n) es definida recursivamente por

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

a) Halle los primeros diez términos de esta sucesión.

b) Pruebe, usando inducción matemática, que u_n está dada por

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$$

Donde $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Sugerencia: a y b satisfacen la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$, o sea

$$r^2 = r + 1$$

16. Para cada entero positivo n definimos

$$a_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Pruebe que existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y que además $\dfrac{1}{2} \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 1$.

17. Pruebe que la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

es monótona decreciente.

18. Sea $u_1 = 1$ y $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Pruebe que existe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Halle tal límite.

19. Pruebe que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

20. Muestre que si en el ejercicio anterior $a = 0$, la afirmación no es necesariamente cierta.

II. Calcule los siguientes límites.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n}{1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^n}$ $(|\alpha| < 1, |\beta| < 1)$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right]$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3} - \dfrac{2^2}{n^3} + \dfrac{3}{n} + \cdots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 1000n + 10^{100}}{3n^3 + n^2 - 1}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}\right]$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha^n$ donde $|\alpha| < 1$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}\right]$

III. Resuelva las siguientes cuestiones.

29. Sean $a, b > 0$, pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \text{máx}\{a, b\}$$

30. Sean $0 < a_1 < b_1$, definimos recursivamente

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ (media geométrica de } a_n \text{ y } b_n\text{)}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ (media aritmética de } a_n \text{ y } b_n\text{)}$$

a) Pruebe que las sucesiones (a_n) y (b_n) convergen.

b) Pruebe que ambas sucesiones tienen el mismo límite. Interprete geométricamente en la recta real.

31. Hallar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2 + 1}$$

32. Hallar

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$$

33. Hallar

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n + \frac{1}{2}}$$

34. Aplicando el hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

cuando este último existe, hallar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)} .$$

Notación sigma

I. Resuelva las siguientes cuestiones.

35. Escriba la sumatoria $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}$ en la forma

$$\sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k$$

36. Escriba

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - 1x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k + 1x^{k-1}$$

utilizando solo un símbolo Σ.

37. Interprete las sumatorias $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ y $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ de acuerdo con el arreglo de los términos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

38. Pruebe la siguiente identidad

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} .$$

39. Pruebe la identidad

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right).$$

40. Interprete la relación anterior respecto al arreglo

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_m \end{bmatrix}$$

Sumas infinitas

I. Realice lo que se pide.

41. Usando la fórmula para una suma geométrica, calcule la suma infinita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

42. Obtenga una fórmula para

$$\sum_{k=m}^{k=n} r^k$$

43. Calcule la suma infinita

$$\sum_{k=m}^{+\infty} r^k \text{ donde } |r| < 1.$$

44. Halle una fórmula para la suma

$$\sum_{k=1}^{n} (k + k^2) .$$

45. Halle una fórmula para la suma

$$s_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$$

46. Halle una fórmula para la suma

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 1)$$

47. Halle una fórmula para la suma

$$s_n = 2.4 + 3.5 + 4.6 + \cdots + (n-1)(n+1)$$

48. Halle una fórmula para la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Sugerencia: desarrolle en fracciones parciales el cociente $\frac{1}{k(k+1)}$

49. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, halle la suma

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$$

A esta expresión se llama **suma telescópica**.

50. Usando el ejercicio anterior, halle una fórmula para la suma

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Sugerencia: calcule la diferencia $k^2-(k-1)^2$.

51. Halle una fórmula para la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}$$

II. Para las siguientes series de problemas:

a) Halle una fórmula para la sucesión de sumas parciales.
b) Pruebe que es convergente y halle su límite.

52. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

53. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+a)(n+b)}$ (a y b enteros positivos)

54. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

55. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

56. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)(n+k+2)}$ $(k\geq 0)$

57. $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

58. $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$

59. $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+k)^2}\right)$ entero positivo

60. $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)(n+1)-n(2n+3)}{n(n+1)}$

61. $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!}$

62. $\sum_{n\geq 2}\frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\right]}{(\log n^n)\left[\log(n+1)^{n+1}\right]}$

63. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots$

64. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+$

65. $\sum_{n\geq 1}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2n(n+1)}\operatorname{sen}\frac{1}{2n(n+1)}$

66. Muestre que toda sucesión $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ puede interpretarse como una serie; es decir, existe una serie $\sum a_n$ para la cual $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ es la sucesión de sumas parciales.

67. Pruebe que la serie $\sum\frac{3^n-2^n}{6^n}$ es convergente y halle su límite.

68. Diga si la serie

$$\sum\frac{4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+2\cdot 4\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}}{8^n}$$

es convergente, en caso afirmativo halle su límite.

69. Diga para qué valores de a, la serie

$\sum_{n\geq 1}\frac{(1-a)^{n-1}}{2^n}$ es convergente.

Criterios por comparación

I. Pruebe la convergencia de las siguientes series.

70. $\sum\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

71. $\sum\frac{1}{(3n-2)(3n+2)}$

72. $\sum\frac{1}{n(n+2)}$

73. $\sum\frac{1}{(n-1)(n+2)}$

74. $\sum\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

75. $\sum\frac{5^n+4^n}{20^n}$

76. $\sum\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

77. $\sum\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

78. Pruebe la convergencia de la serie

$$\sum\arctan\frac{1}{2n^2}$$

Sugerencia: Use la inducción y la relación

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

79. Pruebe que la serie

$$\sum\frac{1}{\log n}$$

es divergente.

II. Para cada una de las siguientes series, diga si es convergente o divergente. Argumente su respuesta.

80. $\sum \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$

81. $\sum \frac{n^3}{n^4 + 1}$

82. $\sum \frac{n^2}{n^2 + 1}$

83. $\sum \frac{n}{n + 1}$

84. $\sum \frac{n!}{(n + 2)!}$

85. $\sum \frac{n^2}{e^n}$

86. $\sum \frac{n^n}{e^{n^2}}$

87. $\sum \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n}$

88. $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

89. $\sum \frac{\log n}{n^{\frac{5}{2}}}$

90. $\sum \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$

91. $\sum \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

92. $\sum \frac{1}{10^{10} n}$

Convergencia absoluta y convergencia condicional

I. De las siguientes series, indique cuál:

a) es absolutamente convergente.
b) es condicionalmente convergente.
c) no es ni absoluta ni condicionalmente convergente.

Argumente su respuesta.

93. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

94. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$

95. $1.1 - 1.02 + 1.003 - 1.004 + \cdots$

96. $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \cdots$

97. $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n \frac{\log n}{n}}$

98. $\sum \frac{(-1)^n}{n(n + 1)}$

99. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$

100. $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$

101.

$$\operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{3^2} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n^2} + \cdots$$

102. $\sum_{n \geq 1} (\cos n\pi) \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

103. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{\log(1 + n)}$

104. $\sum \frac{(-1)^n}{n - \log n}$

105. Pruebe que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series absolutamente convergentes, entonces la serie $\sum (a_n + b_n)$ es absolutamente convergente.

106. Pruebe que si $\sum |a_n|$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge. Dé un contraejemplo que muestre que la convergencia de $\sum a_n^2$ no necesariamente implica la convergencia de $\sum |a_n|$.

107. Pruebe que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum \frac{a_n^2}{1 + a_n^2}$ converge absolutamente.

108. Pruebe que si $\sum a_n$ converge absolutamente y $a_n \neq -1$ para $n \geq 1$, entonces

$$\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$$

converge absolutamente.

109. Pruebe que si $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ son series convergentes, entonces $\sum a_n b_n$ es una serie absolutamente convergente.
Sugerencia. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq$$
$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

110. Pruebe que si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{a_n}{n}$ converge absolutamente (compare con el problema 107 de este capítulo).

Miscelánea de problemas y ejercicios

I. Indique cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen.

111. $\sum \frac{n^2}{n!}$

112. $\sum \frac{1}{(\log n)^k}$, ($k$ entero positivo)

113. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

114. $\sum \frac{1}{n(\log n)^2}$

115. $\sum \frac{1}{n^2(\log n)}$

116. $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

117. $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$

120. $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

121. $\sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^k}$

122. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

123. $\sum \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

124. $\sum \frac{n!}{3^n}$

125. $\sum \frac{n!}{2^{2n}}$

126. $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{e^{n^2}}\right)$

127. $\sum \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

CAPÍTULO 5

LÍMITE Y CONTINUIDAD



5.1 Límite de una función en un punto

Este capítulo está dedicado a los conceptos de límite y continuidad de funciones, dos de los conceptos fundamentales del cálculo. El de límite lo requerimos para establecer a su vez el de derivada, el más importante del cálculo diferencial, mismo que estudiaremos en el capítulo 6. Por su parte, la continuidad de las funciones desempeña un papel muy importante en el análisis matemático general. Iniciemos nuestro estudio sobre límites con algunas ideas intuitivas que presentaremos con algunos ejemplos.

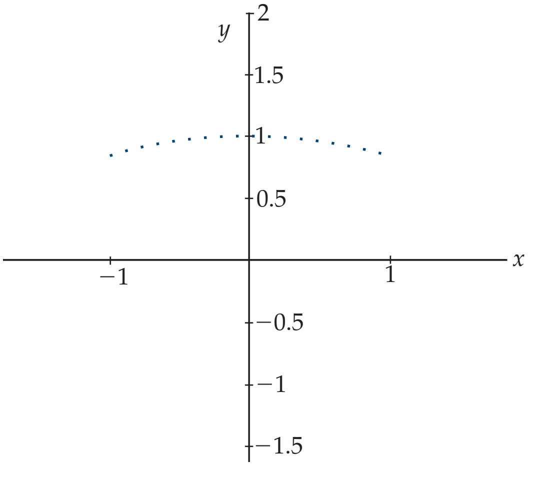
Ejemplo 1

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Esta función está definida en todos los reales diferentes de cero, por lo que no tiene sentido valuarla en $x = 0$. Sin embargo, con una calculadora científica es posible construir la siguiente tabla de valores para puntos próximos al cero y con base en ella dibujar la gráfica de los puntos correspondientes, que se muestra enseguida.

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
−1.0	0.8414709848
−0.9	0.8703632329
−0.8	0.8966951136
−0.7	0.9203109817
−0.6	0.9410707889
−0.5	0.9588510772
−0.4	0.9735458557
−0.3	0.9850673555
−0.2	0.9933466539
−0.1	0.9983341664
0.1	0.9983341664
0.2	0.9933466539
0.3	0.9850673555
0.4	0.9735458557
0.5	0.9588510772
0.6	0.9410707889
0.7	0.9203109817
0.8	0.8966951136
0.9	0.8703632329
1.0	0.8414709848

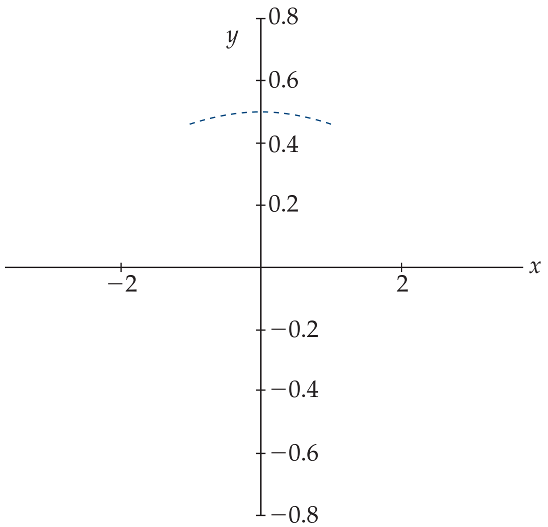


En este caso, la tabla sugiere que los valores de $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$ están próximos a 1 cuando x está cercano a cero. Esto se expresa diciendo que 1 es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a cero. Sin embargo, no podemos estar seguros que en realidad el 1 sea el límite, pues, por ejemplo, podría ocurrir que el límite fuese 0.9999999 y no 1. Se requieren recursos matemáticos que nos permitan asegurar que 1 es el límite. Pero antes de cualquier intento de demostración es necesario precisar lo que significa límite, lo cual haremos más adelante. Después de ello demostraremos que efectivamente la función tiene por límite al 1; en tanto, veamos otros ejemplos.

Ejemplo 2

Sea $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Como en el caso anterior, con una calculadora graficadora podemos construir la siguiente tabla y con esta dibujar la gráfica que la acompaña.

x	$\frac{1-\cos x}{x^2}$
−1.0	0.4596976941
−0.9	0.4671481873
−0.8	0.4738957666
−0.7	0.4799139035
−0.6	0.4851788474
−0.5	0.4896697524
−0.4	0.4933687874
−0.3	0.4962612319
−0.2	0.4983355539
−0.1	0.4995834722
0.1	0.4995834722
0.2	0.4983355539
0.3	0.4962612319
0.4	0.4933687874
0.5	0.4896697524
0.6	0.4851788474
0.7	0.4799139035
0.8	0.4738957666
0.9	0.4671481873
1.0	0.4596976941

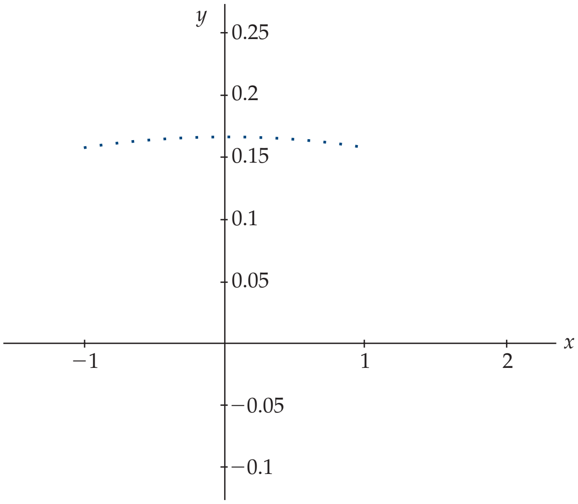


En este ejemplo, la tabla de valores de nuevo nos sugiere que la función $g(x)$ se acerca a 0.5 cuando los valores de x están próximos a cero. Sin embargo, no podemos inferirlo con contundencia a partir de los datos numéricos, pues también podría ser que se aproximara a 0.4999999999, aunque si este fuese el caso, la tabla de valores no lo revelaría. Más adelante mostraremos que efectivamente 0.5 es el límite de la función cuando x tiende a cero.

Ejemplo 3

Sea $h(x) = \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. La tabla de abajo muestra los valores de $h(x)$ para puntos cercanos a cero. ¿Puede intuir a cuál valor se aproxima $h(x)$ cuando x está cercano a cero?

x	$\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$
−1.0	0.1585290151
−0.9	0.1600453914
−0.8	0.1614138849
−0.7	0.1626306494
−0.6	0.1636922528
−0.5	0.1645956911
−0.4	0.1653384014
−0.3	0.1659182718
−0.2	0.1663336506
−0.1	0.1665833535
0.1	0.1665833535
0.2	0.1663336506
0.3	0.1659182718
0.4	0.1653384014
0.5	0.1645956911
0.6	0.1636922528
0.7	0.1626306494
0.8	0.1614138849
0.9	0.1600453914
1.0	0.1585290151



¿Podemos afirmar que la función se aproxima a $\dfrac{1}{6} = 0.166\ldots$ cuando x se acerca a cero? La respuesta es afirmativa, pero no es evidente que así sea. Como en los ejemplos anteriores, más adelante demostraremos que $\dfrac{1}{6}$ es efectivamente el límite. Antes de definir el concepto de límite, analicemos otro ejemplo, con el cual mostraremos que a partir de una tabla de valores difícilmente podemos descubrir lo que podría ser un límite.

Ejemplo 4

Sea la función $f(x) = \dfrac{\cos \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 - 1}{x^4}$.

A continuación mostramos una tabla de valores para puntos cercanos al cero.

x	$\dfrac{\cos\frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 - 1}{x^4}$
−1.0	0.0005125018702
−0.9	0.0005128625602
−0.8	0.000513185513
−0.7	0.0005134706486
−0.6	0.0005137179014
−0.5	0.0005139272133
−0.4	0.0005140985386
−0.3	0.0005142318293
−0.2	0.0005143270955
−0.1	0.00051438424058
0.1	0.00051438424058
0.2	0.0005143270955
0.3	0.0005142318293
0.4	0.0005140985386
0.5	0.0005139272133
0.6	0.0005137179014
0.7	0.0005134706486
0.8	0.000513185513
0.9	0.0005128625602
1.0	0.0005125018702

Con base en la tabla de valores, ¿podría determinar algún número que fuese límite de los valores $f(x)$ cuando le asignamos a x valores que tienden a cero? En su momento revelaremos cuál es este número que por el momento llamaremos ℓ, porque ciertamente hay un límite.

Expresado en términos un tanto imprecisos, que ℓ sea límite significa que es un número al cual podemos aproximar los valores $f(x)$ *tanto como queramos*. Una manera de medir la proximidad de $f(x)$ y ℓ es mediante el valor absoluto de su diferencia: $|f(x) - \ell|$, que geométricamente representa la distancia entre los puntos en la recta real correspondientes a los reales $f(x)$ y ℓ, respectivamente. A este número $|f(x) - \ell|$ también lo hemos llamado distancia entre los reales $f(x)$ y ℓ, así que el límite será un número ℓ tal que la distancia $|f(x) - \ell|$ entre $f(x)$ y ese número ℓ, podemos hacerla tan pequeña como queramos, con tal que elijamos x suficientemente cerca de a. Enseguida establecemos la definición precisa de límite.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Nació en París, el 21 de agosto de 1789, pocas semanas después de la toma de la Bastilla. Cuando tenía 24 años atrajo la atención de los matemáticos experimentados de Francia. De esta forma, Cauchy conoció a Laplace y Lagrange, destacados matemáticos franceses de la época. En alguna ocasión Lagrange, refiriéndose a Cauchy, manifestó con admiración: "nos va a reemplazar a todos como matemático".

En 1811, Cauchy presentó su primera memoria consagrada a la teoría de los poliedros, a través de la cual demostró que no existen más poliedros regulares que los que tienen 4, 6, 8, 12 o 20 caras; ahí mismo, demostró la célebre fórmula de Euler que relaciona las aristas, las caras y los vértices de un poliedro.

Siguiendo la tradición establecida en la Escuela Politécnica de París, Cauchy fue estimulado a escribir los apuntes de sus cursos; de esta forma aparecieron sucesivamente: *Los cursos de análisis de la Escuela Politécnica, Compendio de las lecciones sobre cálculo infinitesimal* y *Lecciones sobre el cálculo diferencial*. Pero fue hasta 1823 cuando publicó por primera vez, en sus lecciones sobre cálculo infinitesimal, su desarrollo del cálculo diferencial e integral con un gran rigor, cuya base principal es el concepto de límite.

Definición

Sean f una función y a un número real. Suponemos que f está definida en al menos una vecindad abierta que contiene al punto a, excepto quizá en el punto a; es decir, f no está necesariamente definida en a. Decimos que la función f **tiende a un número** ℓ cuando x tiende al punto a o que ℓ es **límite** de f en el punto a, si para cualquier $\varepsilon > 0$. Por pequeña que esta sea, existe un intervalo alrededor de a, digamos de la forma $(a - r, a + r)$, tal que $|f(x) - \ell|$ es menor que ε, para todos los puntos $x \in (a - r, a + r)$ diferentes de a. Cuando esto ocurra escribiremos

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

Es importante notar que en la definición anterior es *irrelevante* que f esté o no definida en a. Más aún, en el caso en el que f esté definida en a, al estudiar el comportamiento de f en relación a su posible límite en a, debemos evitar el punto $x = a$ cuando consideremos los valores $f(x)$.

Con el valor absoluto $|f(x) - \ell|$ medimos la proximidad entre $f(x)$ y ℓ. Con la $\varepsilon > 0$ establecemos la máxima tolerancia que permitiremos que los valores $f(x)$ estén alejados de ℓ. No esperamos que $f(x)$ sea igual a ℓ, pero tampoco negamos esta posibilidad. Para cada ε dada, se desea hallar una situación en donde una vez que se obtiene una proximidad menor que ε, ya no se pierda. Por ejemplo, si $\varepsilon = \frac{1}{1\,000}$ deseamos que se cumpla la proximidad $|f(x) - \ell| < \frac{1}{1\,000}$ no solo para algún punto x cercano o no al punto a, sino que esta proximidad se conserve para todos los puntos x en alguna vecindad de a, con excepción de a mismo. Para que ℓ sea límite, siempre debe ser posible hallar tal vecindad de a, sin importar qué tan pequeño sea el valor de ε. También decimos que $f(x)$ y ℓ deben estar más próximos que la cantidad ε, sin importar el valor de ε, siempre que los puntos x se tomen en una vecindad adecuada del punto a, con excepción de a mismo.

La simbología $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$ no tiene un significado intrínseco; por sí misma significa nada. Es la definición la que le da sentido. Esta observación es pertinente porque algunos estudiantes piensan que con la simbología misma $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$ se expresa lo que significa límite de una función en un punto, o bien, que esta simbolización solo formaliza la idea intuitiva que tiene de límite. La definición establece una relación entre el número ℓ y la función f; esa relación es precisamente el concepto de límite. Su comprensión requiere de un proceso de maduración, que se va adquiriendo gradualmente estudiando casos específicos y demostraciones de teoremas donde se aplica la definición. El lector debe tener paciencia y leer con detenimiento la teoría desarrollada en este capítulo, para que comprenda poco a poco el concepto el cual demanda un razonamiento matemático apoyado en una lógica que también debe aprender paulatinamente. Por ejemplo, notemos que si una función f tiene límite en un punto a de acuerdo con la definición dada, no puede afirmarse, basados solo en

la definición, que f no pueda tener más de un límite en un punto a. Observe que en la definición se habla de que ℓ sea límite y no el límite de f en a. Que no haya más de un límite no está explícito en la definición, y no podemos darlo por hecho, requiere una demostración. Esto es lo que haremos en el siguiente teorema.

Teorema

Sean ℓ_1 y ℓ_2, tales que

$$\ell_1 = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{y} \quad \ell_2 = \lim_{x\to a} f(x).$$

Entonces

$$\ell_1 = \ell_2 .$$

Demostración

Para probar esta igualdad, primero mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene $|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$. Esto solo será posible si $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, es decir, si $\ell_1 = \ell_2$. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria.

Como $\ell_1 = \lim_{x\to a} f(x)$, para la ε dada, existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$|f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $0 < |x - a| < \delta_1$.

Por otra parte, como $\ell_2 = \lim_{x\to a} f(x)$, para la ε dada, existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$|f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $0 < |x - a| < \delta_2$.

Si tomamos la menor de las dos deltas, $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$, entonces las dos desigualdades se cumplirán al mismo tiempo

$$|f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda x que cumpla $0 < |x - a| < \delta$, pues esta última desigualdad garantiza las dos desigualdades

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Por tanto, si $0 < |x - a| < \delta$ se tiene

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que $|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$, por consiguiente $\ell_1 = \ell_2$.

5.2 Límites laterales

En la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$, el punto a no necesariamente pertenece al dominio de la función, sin embargo requerimos que haya una vecindad del punto a constituida por puntos del dominio, con excepción del punto mismo; es decir, la función debe estar definida en al menos un intervalo abierto de la forma $(a - \delta, a + \delta)$, aunque no esté necesariamente definida en el punto a. Ahora, extendemos la definición de límite, en la cual consideraremos los valores de la función solo en intervalos de las formas $(a - \delta, a)$ o $(a, a + \delta)$.

5.2.1 Definición (límites laterales)

Sea f , definida al menos en un intervalo $(a - \delta, a)$. Decimos que ℓ es **límite lateral izquierdo** o que f **tiende por la izquierda** a ℓ si para toda $\varepsilon > 0$ existe un intervalo de la forma $(a - r,\ a)$, tal que $|f(x) - \ell|$ es menor que ε, para todos los puntos $x \in (a - r, a)$. Cuando esto ocurra escribiremos

$$\ell = \lim_{x \to a-} f(x),$$

o bien

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

De manera análoga, si f está definida en al menos un intervalo $(a, a + \delta)$, decimos que ℓ es **límite lateral derecho** o que f **tiende por la derecha** a ℓ, si para toda $\varepsilon > 0$ existe un intervalo de la forma $(a, a + r)$, tal que $|f(x) - \ell|$ es menor que ε, para todos los puntos $x \in (a, a + r)$. En este caso escribiremos

$$\ell = \lim_{x \to a+} f(x),$$

o bien

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

Como en el caso de límites, los límites laterales también están determinados unívocamente por su definición, es decir, tenemos el siguiente teorema.

Teorema

Sean ℓ_1 y ℓ_2 tales que

$$\ell_1 = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{y} \quad \ell_2 = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Entonces $\ell_1 = \ell_2$. De igual modo, si

$$\ell_1 = \lim_{x \to a-} f(x) \quad \text{y} \quad \ell_2 = \lim_{x \to a-} f(x).$$

Se tiene, $\ell_1 = \ell_2$.

Los límites laterales se presentan, por ejemplo, cuando tenemos una función definida únicamente en un intervalo cerrado $[a, b]$ o en un intervalo abierto (a, b) y deseamos hablar de los límites en los puntos a y b. En este caso, solo podemos referirnos a

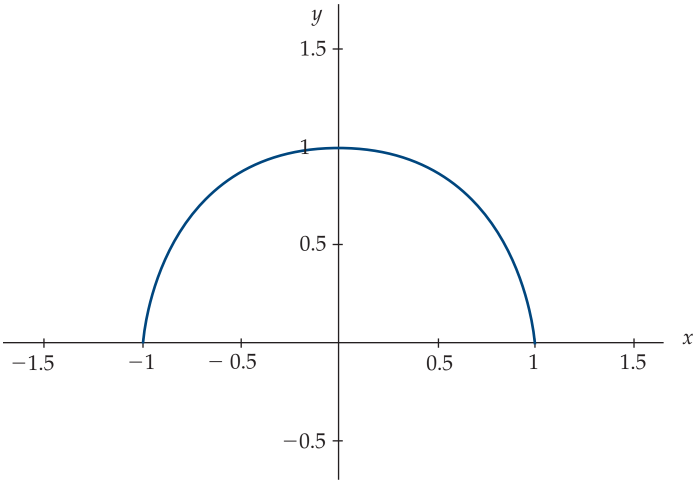
$$\lim_{x\to a+} f(x) \text{ y } \lim_{x\to b-} f(x).$$

Los límites laterales también son de interés cuando, aun tratándose de un punto interior x_0, no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Pueden existir los límites $\lim_{x\to a+} f(x)$ y $\lim_{x\to a-} f(x)$ sin existir $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejemplo 5

La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está definida en el intervalo $[-1, 1]$ y se tiene

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \sqrt{1-x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \sqrt{1-x^2} = 0$$



Ejemplo 6

La función

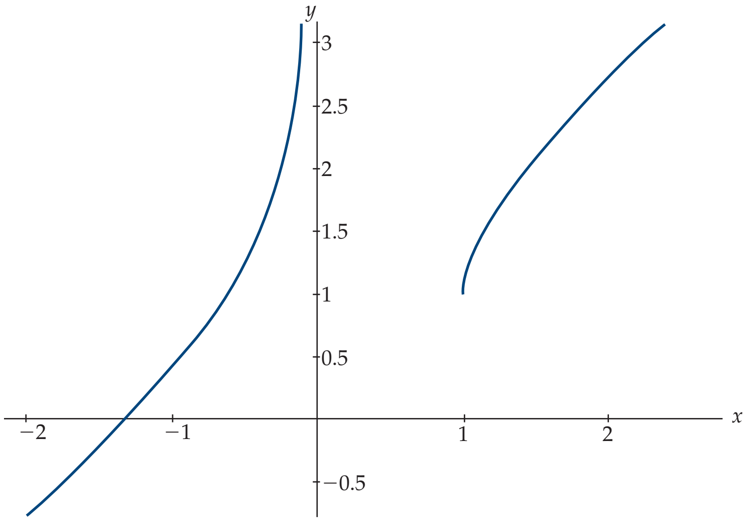
$$f(x) = x + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

está definida en la unión de intervalos $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. Existe $\lim_{x\to 1+} f(x)$, pero no existe $\lim_{x\to 1-} f(x)$, debido a que f no está definida en un intervalo de la forma $(1 - \delta, 1)$. En este caso, se tiene

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 1.$$

Por otra parte, tampoco existen los límites laterales

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0-} f(x)$$



Sin embargo, en el caso del límite lateral izquierdo en 0, podemos escribir

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty.$$

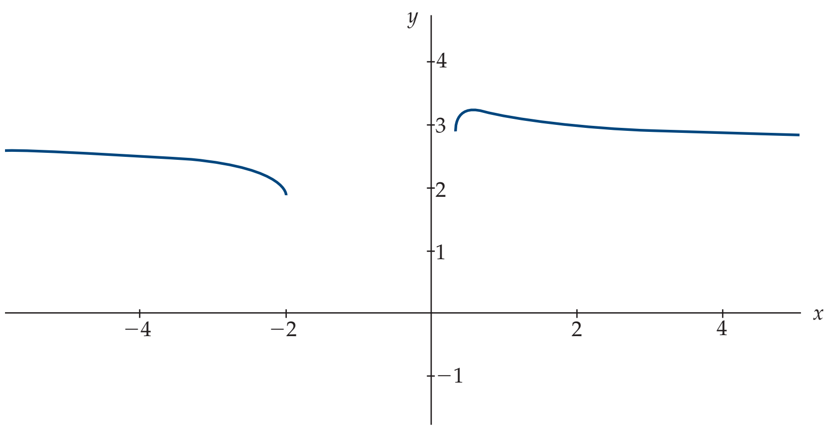
Ejemplo 7

La función

$$f(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$$

está definida en la unión de intervalos $(-\infty,-2] \cup [\frac{1}{3},+\infty)$. En los extremos -2 y $\frac{1}{3}$ existen los límites laterales

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \frac{1}{3}+} f(x) = \sqrt{7}$$



Ejemplo 8

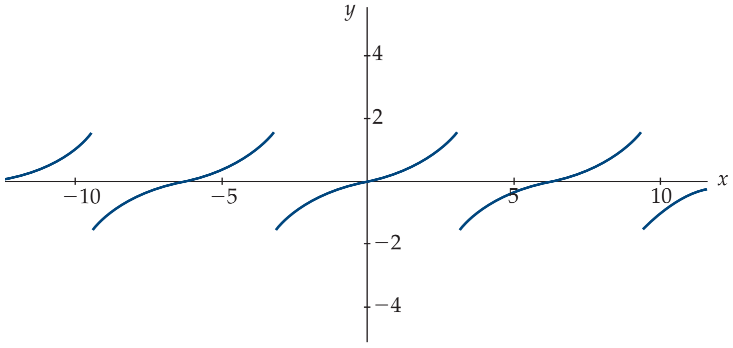
La función

$$f(x) = \arctan(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})$$

está definida en todos los reales, excepto en los de la forma $(2n+1)\pi$, donde n es un entero, por ejemplo

$$(-5\pi, -3\pi), (-3\pi, -\pi), (-\pi, \pi), (\pi, 3\pi), (3\pi, 5\pi)$$

El dominio de f consiste en la unión de los intervalos de la forma $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$.



En cada uno de los puntos $x_n = (2n+1)\pi$ existen los límites laterales, izquierdo y derecho, aunque son diferentes. De hecho, para cada entero n se tiene

$$\lim_{x\to(2n+1)\pi+} f(x) = \lim_{x\to(2n+1)\pi+} \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

y

$$\lim_{x\to(2n+1)\pi-} f(x) = \lim_{x\to(2n+1)\pi-} \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

El siguiente teorema resulta útil para probar la existencia de límites de funciones y también para probar su no existencia. La demostración es fácil y se deja como ejercicio para el lector.

Teorema

Sea f definida al menos en una vecindad abierta de un punto x_0 excepto posiblemente en x_0. Si existen los límites laterales

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

y son iguales, entonces existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Además, se tiene

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

Recíprocamente, si existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$, entonces existen los límites laterales $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, y ambos son iguales a $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

5.3 Desigualdades importantes para funciones trigonométricas

Una desigualdad fundamental que relaciona las funciones seno y tangente es la que se desarrolla en el siguiente teorema. Dicha desigualdad la utilizaremos en el capítulo 6.

Teorema

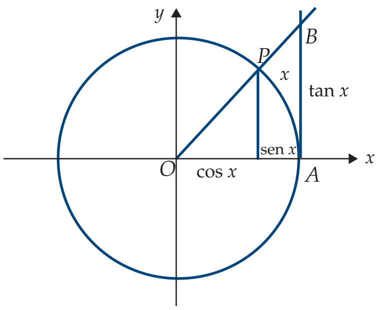
Para todo ángulo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se cumple

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x.$$

Demostración

Dado que nuestra definición de funciones trigonométricas se basa en el círculo unitario, la prueba la haremos en el mismo tenor.

En la siguiente figura, el ángulo $\measuredangle\, AOP$ es medido con el arco $x = \widehat{PA}$. Por definición, la abscisa del punto P es igual a $\cos x$ y la ordenada es igual a $\operatorname{sen} x$. En la figura, el segmento $\overline{AB}$ es tangente al círculo en el punto A.



Como se puede observar, la longitud x del arco $\widehat{PA}$ es mayor que la longitud del segmento $\overline{AP}$. La longitud del segmento $\overline{AP}$, a su vez, es mayor que la longitud del segmento $\overline{PQ}$, el cual por definición es igual a $\operatorname{sen} x$. Tenemos, entonces, $\operatorname{sen} x < x$.

Por otra parte, para probar la desigualdad $x < \tan x$ observemos que, dado que el círculo es de radio 1, el segmento $\overline{AB}$ tiene longitud igual a $\tan x$, así que mostraremos que el arco $x = \widehat{PA}$ es menor que el segmento $\overline{AB} = \tan x$. En la figura no es evidente tal desigualdad, sin embargo comparemos el área del sector circular AOP con el área del triángulo rectángulo ΔAOB. El área del triángulo ΔAOB que es igual a

$$\frac{1}{2}\,(\overline{OA})\,(\overline{AB}) = \frac{1}{2}\tan x$$

es mayor que el área del sector circular, la cual es igual a $\frac{1}{2}(\widehat{PA}) = \frac{1}{2}x$. Por tanto, tenemos

$$\frac{1}{2}\,x < \frac{1}{2}\tan x$$

o sea

$$x < \tan x.$$

Esto prueba el teorema.

De la desigualdad

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x,$$

que también se escribe

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

obtenemos otras desigualdades. Por ejemplo, consideremos la desigualdad simple

$$\operatorname{sen} x < x.$$

Si tomamos $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ y tenemos

$$\operatorname{sen}(-x) < -x$$
$$-\operatorname{sen} x < -x.$$

Aquí utilizamos el hecho $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Entonces para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ se tiene

$$-\operatorname{sen} x < -x$$

que también escribimos

$$x < \operatorname{sen} x.$$

Combinando esta desigualdad con $\operatorname{sen} x < x$, que es válida para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, obtenemos

$$|\operatorname{sen} x| < |x|$$

para toda $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Esta es la primera desigualdad que ocuparemos más adelante.

Ahora, retornemos a nuestra desigualdad original: $\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, válida para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Si dividimos entre x todos los miembros de la doble desigualdad, el orden no se altera, ya que $x > 0$, con lo que obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

La primera desigualdad establece

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Consideremos la segunda desigualdad

$$1 < \frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

En este intervalo, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, se tiene $0 < \cos x$, por lo que podemos multiplicar los dos miembros por $\cos x$, sin que se altere su orden:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Al combinar los resultados obtenidos, tenemos

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

para toda $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dado que $\cos(-x) = \cos x$ y $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, tenemos que la desigualdad anterior también es válida para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. En resumen, tenemos el siguiente teorema.

Teorema

Para toda $x \in \mathbb{R}$ que cumple $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

De esta desigualdad concluimos que la distancia entre $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y 1 es menor que la distancia entre $\cos x$ y 1 para las x que cumplan $0 < | x | < \frac{\pi}{2}$, es decir

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < |1 - \cos x| = 1 - \cos x.$$

Por una de las identidades trigonométricas tenemos

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2},$$

así que

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < |1 - \cos x| = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}.$$

Además, de la desigualdad $|\operatorname{sen} x| < |x|$, que vale para toda $x \neq 0$, obtenemos $|\operatorname{sen} x|^2 < |x|^2$.

Por tanto, tenemos

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < |1 - \cos x| = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

cuando $0 < | x | < \frac{\pi}{2}$. De lo anterior, finalmente obtenemos

Teorema

Si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ se cumple

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < |1 - \cos x| < \frac{x^2}{2}.$$

Ejemplo 9

De las desigualdades precedentes obtenemos

a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ *b*) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

El inciso *a*) se sigue inmediatamente de la desigualdad $|\text{sen}\, x| < |x|$, válida para todo real x, mientras que el inciso *b*) se sigue de la desigualdad

$$|1 - \cos x| = 2\,\text{sen}^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{|x|}{2}$$

que vale para toda $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Ejemplo 10

Del ejemplo anterior y de las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\text{sen}\, x - \text{sen}\, a &= 2\,\text{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\\ \cos x - \cos a &= -2\,\text{sen}\frac{x-a}{2}\,\text{sen}\frac{x+a}{2}\end{aligned}$$

obtenemos para $x \neq a$:

$$\begin{aligned}|\text{sen}\, x - \text{sen}\, a| &= \left|2\,\text{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\\ &= 2\left|\text{sen}\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\\ &\leq 2\left|\text{sen}\frac{x-a}{2}\right|\\ &< 2\frac{|\,x-a\,|}{2}\end{aligned}$$

O sea

$$|\text{sen}\, x - \text{sen}\, a| < |x - a|$$

De igual modo, podemos obtener

$$|\cos x - \cos a| = 2\left|\text{sen}\frac{x-a}{2}\,\text{sen}\frac{x+a}{2}\right| < |x-a|$$

De estas desigualdades obtenemos

a) $\lim\limits_{x\to a}\text{sen}\, x = \text{sen}\, a$ *b*) $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$

5.3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

En este momento estamos en posibilidades de probar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$. De la desigualdad justamente obtenida, tenemos que para toda x en $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ se cumple la desigualdad

$$\left|1 - \frac{\text{sen}\, x}{x}\right| < \frac{x^2}{2}.$$

Si, además, suponemos $0 < |\,x\,| < 1$ podemos escribir

$$\left|1 - \frac{\text{sen}\, x}{x}\right| < \frac{x^2}{2} < \frac{|\,x\,|}{2}$$

pues, para estos puntos $x^2 < |\, x \,|$. Así que dada $\varepsilon > 0$, basta tomar x que cumpla $0 < \frac{|x|}{2} < \varepsilon$ y $|\, x \,| < 1$ para tener

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \frac{|x|}{2} < \varepsilon\,.$$

Es decir, la r buscada puede ser cualquier número positivo que cumpla $r < 2\varepsilon$ y $r < 1$. En resumen, hemos probado que para toda $\varepsilon > 0$ dada, si elegimos $0 < r < \min\,\{2\varepsilon, 1\}$, entonces se cumple

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \varepsilon$$

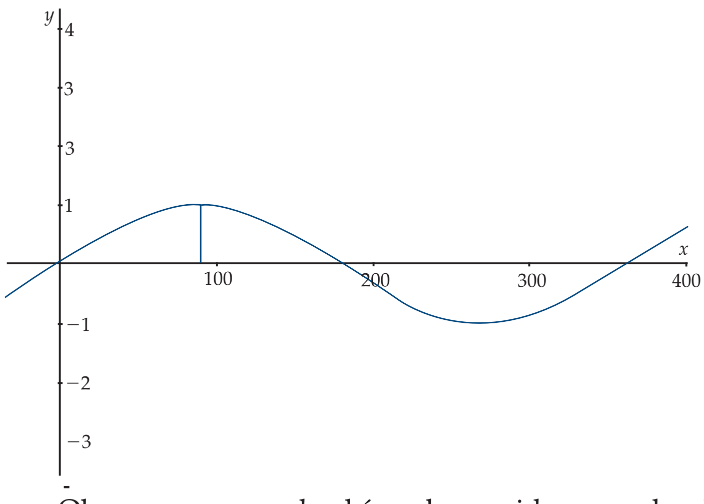
para toda x que satisfaga $0 <|\, x \,|< r$. Esto prueba que $\lim_{x\to o}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$

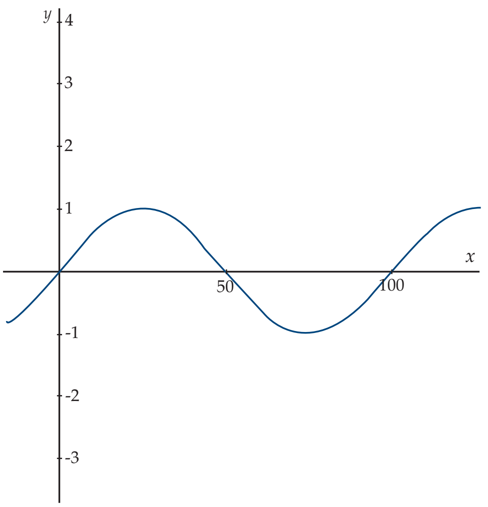
5.3.2 Una reflexión sobre la relevancia del radián

En la sección 3.1.8.1 comentamos que en cálculo es más conveniente medir los ángulos en radianes que en grados. En ese momento la única razón que se expuso fue que al medir los ángulos en radianes, es decir, mediante la longitud del arco subtendido por el ángulo, podíamos comparar geométricamente en el círculo trigonométrico los valores de sen x, cos x y la misma medida x del ángulo. Los tres valores sen x, cos x y x corresponden a las longitudes de elementos geométricos (dos segmentos y un arco), mismos que se visualizan en el círculo trigonométrico. Las relaciones entre estas magnitudes son precisamente las que hemos establecido en los dos teoremas anteriores. La veracidad de las desigualdades es consecuencia de la unidad que elegimos para medir los ángulos. Si los ángulos los midiésemos en grados sería falsa la igualdad

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Veamos por qué, pero antes es importante aclarar que la expresión sen α significa "seno del ángulo cuya medida es α". En la figura de abajo se muestran las gráficas de la función seno cuando el ángulo se mide en grados y en centígrados, respectivamente.





Observe que cuando el ángulo se mide en grados, la función seno toma el valor 1 en el ángulo cuya medida es 90°. Cuando el ángulo se mide en "centígrados" la función seno toma el valor 1 en el ángulo cuya medida es 25 "centígrados". Para cada una de las gráficas hemos elegido una

escala adecuada en el eje de abscisas, de manera que pueda mirarse al menos un ciclo la gráfica. Si eligiéramos la misma escala en ambos ejes coordenados, entonces ambas gráficas lucirían muy alargadas, mucho más alargada la gráfica de la izquierda (no cabría en la página).

Si los ángulos los midiésemos en grados entonces tendríamos

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=\frac{\pi}{180}\approx 0.01745329251.$$

Si los midiésemos en "centígrados", unidad que resultase en dividir el ángulo recto en 25 partes iguales o lo que es lo mismo, dividir una vuelta completa en 100 partes iguales, entonces tendríamos

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=\frac{\pi}{50}\approx 0.06283185307.$$

Es interesante que la relación $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$ es válida cuando los ángulos se miden en radianes, de hecho tenemos

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1 \text{ si y solo si } \alpha \text{ se mide en radianes.}$$

La relación $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$, tiene consecuencias importantes para las 6 funciones trigonométricas, no solo para la función seno, por lo tanto, para todas las funciones elementales que se construyan con base en ellas. Esto da cuenta de la importancia que tiene el radián como unidad.

Ejemplo 11

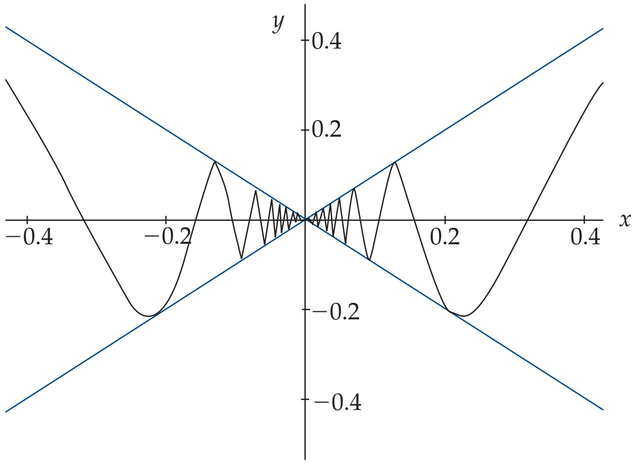
Demostremos que

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

Esto se sigue inmediatamente de la desigualdad

$$0 \le \left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

para toda $x\neq 0$. Esta desigualdad también se escribe $-|x| \le x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} \le |x|$. La gráfica de la función f se encuentra comprendida entre las gráficas de las funciones $y = |x|$ y $y = -|x|$.



Las conjeturas de los ejemplos 2, 3 y 4 se probarán más adelante; por ahora, estudiaremos algunos resultados acerca de límites de funciones. El primero relaciona los conceptos de límite de una función y límite de una sucesión. Este teorema nos permitirá aprovechar todos los resultados que hemos establecido para límites de sucesiones, con el fin de obtener resultados similares para límites de funciones.

Teorema

Sea f una función definida en una vecindad de un punto a, excepto quizá en a mismo. Entonces, la condición

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x)$$

se cumple, si y solo si

$$\ell = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

para toda sucesión (x_n) con $x_n \neq a$, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Demostración

Probemos primero una implicación. Supongamos que se cumple

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x).$$

Por definición de límite, dada cualquier $\varepsilon > 0$, es posible hallar $\delta > 0$, tal que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$. Ahora, probaremos que para toda sucesión (x_n) de puntos diferentes de a, que tienda al punto a se tiene $\ell = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Sea entonces (x_n) cualquier sucesión de puntos diferentes de a, tal que $x_n \to a$, y sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Para la ε dada tomemos $\delta > 0$, tal que se cumple $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Como $x_n \to a$, para esta δ existe un índice $N \in \mathbb{N}$, tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ para toda $n \geq N$. Por tanto, $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Esto significa que

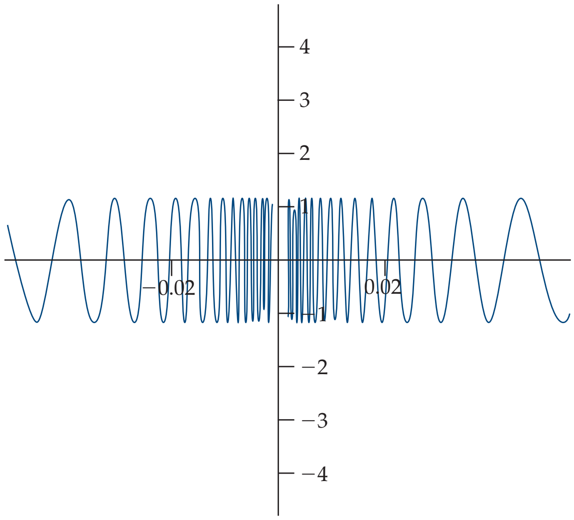
$$\ell = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Probemos, ahora, la otra implicación. Supongamos que para toda sucesión (x_n) de puntos diferentes de a, que tienda al punto a, se tiene $\ell = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Entonces, deberemos probar que $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$; para tal efecto, procedamos por contradicción. Si no fuese cierto $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$, existiría $\varepsilon_0 > 0$, tal que sería imposible hallar $\delta > 0$ con la propiedad de que $|f(x) - \ell| < \varepsilon_0$ siempre que se tuviese $0 < |x - a| < \delta$. En otras palabras, para toda $\delta > 0$ sería posible hallar al menos un punto x_δ, satisfaciendo $0 < |x_\delta - a| < \delta$ pero no $|f(x_\delta) - \ell| < \varepsilon_0$, o sea cumpliéndose $|f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$. En particular, para toda $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, donde n es un entero positivo, existiría x_n con $0 < | x_n - a | < \dfrac{1}{n}$, tal que $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Pero esto contradice la hipótesis de que para esta sucesión (x_n), en particular, debe cumplirse $\ell = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$; por tanto, $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ debe ser cierto. Esto prueba el teorema.

Ejemplo 12

Demostremos que no existe

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$



La no existencia de límite queda probada si exhibimos una sucesión (x_n) convergente a cero, tal que la sucesión de imágenes $\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x_n}\right)$ no tenga límite. Una sucesión tal está dada por

$$x_n = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

para todo entero positivo n. En efecto

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} &= \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \\
&= \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{1}{2}\pi\right) \\
&= \operatorname{sen} n\pi \cos\frac{1}{2}\pi + \cos n\pi \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi \\
&= \cos n\pi \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Esta sucesión no tiene límite; por consiguiente, la función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ no tiene límite en cero.

Nota

El teorema anterior resulta de suma utilidad para probar la no existencia de límite. Por ejemplo, si se exhiben las sucesiones (x_n) y (y_n), que convergen al punto a, pero las sucesiones de valores $(f(x_n))$ y $(f(y_n))$ tienen límites diferentes, entonces podemos concluir que no existe $\lim_{x \to a} f(x)$. Asimismo, también es posible usarlo para probar que no se cumple la igualdad $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. En este caso será suficiente exhibir una sucesión (x_n) convergente al punto a, tal que la sucesión $(f(x_n))$ no converja a ℓ. Usaremos esta técnica más adelante en algunos ejemplos.

De este teorema y de los que tratan sobre límites de sucesiones, se desprenden los siguientes teoremas para límites de funciones.

Teorema

Sean f y g funciones definidas en una vecindad de un punto a, excepto posiblemente en a. Si existen los límites

$$\ell_1 = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{y} \quad \ell_2 = \lim_{x\to a} g(x),$$

entonces, existe $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$ y además

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \ell_1 + \ell_2.$$

Demostración

Para probar que $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$ existe, probaremos que para toda sucesión (x_n) de puntos diferentes de a y convergente al punto a, la sucesión de imágenes $((f+g)(x_n))$ tiene límite y converge a $\ell_1 + \ell_2$. Sea pues, cualquier sucesión (x_n), tal que $x_n \neq a$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Se sigue del teorema anterior que

$$\ell_1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{y} \quad \ell_2 = \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

De los teoremas para límites de sucesiones tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Además, como $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$, entonces existe

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)).$$

O sea

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).\end{aligned}$$

Como la sucesión (x_n) consistente de puntos diferentes de a y convergente al punto a fue arbitraria, se sigue que

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Esto prueba el teorema.

Teorema

Sean f y g funciones definidas en una vecindad de un punto a, excepto posiblemente en a. Si existen los límites

$$\ell_1 = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{y} \quad \ell_2 = \lim_{x\to a} g(x).$$

Entonces existe $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ y además

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \ell_1 \ell_2.$$

Demostración

Para probar que existe $\lim\limits_{x \to a}(fg)(x)$, probemos que para toda sucesión (x_n), con $x_n \neq a$ que tenga por límite a, la sucesión $((fg)(x_n)) = (f(x_n) \cdot g(x_n))$ converge al producto $\ell_1 \ell_2$. Tomemos, entonces, cualquier sucesión (x_n) de puntos diferentes de a, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Como en la demostración anterior, de la existencia de los límites $\ell_1 = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\ell_2 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty}(fg)(x_n) &= \lim_{n \to \infty}(f(x_n)g(x_n)) \\
&= \lim_{n \to \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \to \infty} g(x_n) \\
&= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).
\end{aligned}$$

Luego, existe $\lim\limits_{x \to a}(fg)(x)$ y además

$$\lim_{x \to a}(fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 \ell_2.$$

Esto prueba el teorema.

Un caso particular de este teorema es el siguiente corolario.

Corolario

Si k es una constante real y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, entonces $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k\ell$.

Ahora, probemos la conjetura del ejemplo 2.

Ejemplo 13

Demostremos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Primero, observemos que de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

se sigue

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donde $h = \dfrac{x}{2}$.

Por tanto, de la identidad trigonométrica

$$1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{sen}\frac{x}{2})^2}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}\right)^2\\
&= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}\right)^2\\
&= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}\right)^2\\
&= 2\cdot\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 14

Si $f(x) = x$, entonces es evidente que para todo a real, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$. Del teorema anterior se sigue entonces que

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} (x\cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a^2.$$

Por consiguiente, también se tiene

$$\lim_{x\to a} x^3 = \lim_{x\to a} (x\cdot x^2) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x^2 = aa^2 = a^3.$$

Continuando este proceso, en general tenemos

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

para todo natural n y todo real a.

Ejemplo 15

Del ejemplo anterior, de la propiedad de la suma de límites y del corolario antes visto, se obtiene el siguiente resultado para polinomios. Sea

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

un polinomio con coeficientes reales, entonces para todo número real a tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)\\ &= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_1 a + b_0\\ &= f(a).\end{aligned}$$

Antes de enunciar y probar el teorema correspondiente al cociente de límites, probemos un teorema que será muy empleado en el estudio de funciones.

Teorema

Sea g una función definida en una vecindad de un punto a, excepto posiblemente en a. Si existe $\ell = \lim_{x\to a} g(x)$ y $\ell > 0$, entonces existe una vecindad $J = (a - r, a + r)$ de a, tal que $g(x) > 0$ para toda $x \in J$, con $x \neq a$.

Demostración

De la definición de $\ell = \lim_{x\to a} g(x)$, se sigue que para toda $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$, tal que

$$|\ell - g(x)| < \varepsilon$$

para toda $x \in (a - r, a + r)$ con $x \neq a$. Pero la desigualdad anterior también se escribe

$$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon.$$

Como $\ell > 0$, en particular podemos tomar $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. Así que existe $r > 0$, tal que

$$\ell - \frac{\ell}{2} < g(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$$

o sea

$$\frac{\ell}{2} < g(x) < \frac{3}{2}\ell$$

para toda $x \in (a - r, a + r)$ con $x \neq a$. Esto implica $g(x) > 0$ para toda $x \in (a - r, a + r)$ con $x \neq a$.

Se obtiene un resultado similar cuando el límite es negativo, así que, en general, tenemos

Teorema

Sea g una función definida en una vecindad de un punto a, excepto posiblemente en a. Si existe $\ell = \lim_{x\to a} g(x)$ y $\ell \neq 0$, entonces existe una vecindad $J = (a - r, a + r)$ de a, tal que $g(x)$ tiene el mismo signo de ℓ para toda $x \in J$, con $x \neq a$. En particular $g(x) \neq 0$ para toda $x \in J$, con $x \neq a$.

Ahora veamos el teorema correspondiente al límite del cociente de dos funciones.

Teorema

Sean f y g funciones definidas en una vecindad de un punto a, excepto posiblemente en a. Si existen los límites

$$\ell_1 = \lim_{x\to a} f(x) \text{ y } \ell_2 = \lim_{x\to a} g(x)$$

y además $\ell_2 = \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, entonces

a) Existe una vecindad J de a, tal que $g(x) \neq 0$ para toda $x \in J$, con $x \neq a$.

b) Existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

Demostración

El inciso *a*) es una de las afirmaciones del teorema anterior, así que la función cociente $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ está definida en una vecindad J de a, con la posible excepción de a.

Probemos, ahora, que para toda sucesión (x_n) de puntos distintos de a, que converge a a, la sucesión $\left(\dfrac{f}{g}(x_n)\right) = \left(\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)$ converge al cociente $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$. Pero esto es consecuencia inmediata del teorema para sucesiones

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g}(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)}.\end{aligned}$$

Esto prueba el teorema.

Ejemplo 16

Sea $f(x)$ una función racional; es decir, $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales. Sea a un número real. Sabemos que

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a) \text{ y } \lim_{x\to a} q(x) = q(a).$$

Supongamos que $q(a) \neq 0$, entonces, por el teorema sobre el cociente de límites, tenemos que existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y además

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} p(z)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Ejemplo 17

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Esta función está definida en todos los reales con excepción de $x = 1$. Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, tenemos que para todo real $x \neq 1$ se vale la igualdad

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Además, como existe $\lim\limits_{x\to 1}(x + 1)$ y es igual a 2, entonces

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2.$$

Ejemplo 18

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$. Como en el ejemplo anterior, dado que

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x^2 + 2x + 4)\\ &= 12.\end{aligned}$$

Ejemplo 19

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2}$. Averigüemos si existen los límites

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2}$$

y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2}.$$

Como estrategia general para un problema como este, determinemos primero el dominio de f, el cual consiste de todos los reales, excepto aquéllos donde se anula el denominador. Los puntos donde se anula el denominador son las raíces de la ecuación

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Las raíces son -1 y -2, así que f está definida en los reales diferentes de -1 y -2.

Consideremos el primer problema. Se trata de averiguar si existe el límite en -1. Veamos si el numerador se anula en este punto:

$$(-1)^3 - 6(-1)^2 + 3(-1) + 10 = -1 - 6 - 3 + 10 = 0.$$

Entonces, ambos polinomios, numerador y denominador, se anulan en -1. Esto significa que los dos polinomios pueden factorizarse donde uno de los factores es $x + 1$. Dividiendo los polinomios entre $x + 1$, obtenemos

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x + 1)(x^2 - 7x + 10)$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{(x + 1)(x^2 - 7x + 10)}{(x + 1)(x + 2)}\\ &= \frac{x^2 - 7x + 10}{x + 2}\end{aligned}$$

para toda x diferente de -1 y -2.

Como existe

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 7x + 10}{x + 2},$$

entonces existe

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2}$$

y además estos límites son iguales. De donde, finalmente, tenemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 7x + 10}{x + 2} = 18.$$

Ahora, averigüemos si existe el límite en 2. Como en este punto el denominador no se anula, el límite se calcula mediante una simple sustitución

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{2^3 - 6\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 10}{2^2 + 3\cdot 2 + 2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

5.4 Definición de a^r

El estudio de esta sección puede omitirse en un curso de cálculo de las carreras de ingeniería o incluso en un primer semestre de las carreras de matemáticas. Consideramos que el tema que presentamos aquí no ofrece muchas dificultades, sin embargo dado que por lo común el tiempo que las instituciones asignan a un primer curso de cálculo es insuficiente para que los profesores cubran en su totalidad un material como el que presentamos en este libro, es necesario hacer una selección del contenido del mismo. El estudio de esta sección puede omitirse sin que ello afecte la comprensión de los temas restantes. Al menos puede omitirse en una primera lectura del libro, pero quienes tengan interés en saber cómo se define rigurosamente la potencia a^r con exponente irracional, les recomendamos retornen a esta sección después.

La construcción rigurosa de la función exponencial a^x y en particular de la función e^x definida en todos los reales y de la función potencia x^r definida en los reales positivos, es tema obligado en todo tratado sobre fundamentos del cálculo. Nosotros no seremos la excepción, también lo haremos aquí, sin embargo, la construcción que presentamos difiere mucho de las que suelen encontrarse en los libros de cálculo. Por lo general, los autores de texto definen la función exponencial después de presentar el tema de la integral. Es relativamente cómodo definir la función exponencial como la función inversa de la función logaritmo, misma que se define previamente mediante una integral. Es un camino muy socorrido por lo autores. Es cómodo aunque nada natural, de hecho consideramos que es un tanto artificioso este acercamiento a la exponencial. Además, si así lo hiciéramos, tendríamos que esperar a estudiar la integral para definir la función exponencial. Presentarla tempranamente tiene sus ventajas, por ejemplo, después de este capítulo 5 sobre límites y continuidad vamos a disponer de la función exponencial para ilustrar la teoría sobre la derivada y la integral, lo que no pueden hacer los autores que posponen su definición. Pero esta no es la única razón para adelantar nuestro estudio de la función exponencial, también hay razones importantes de índole epistemológico. Expliquemos lo que esto significa.

Si $a > 0$ y r es un racional, la potencia racional a^r se construye en etapas, pero siempre conservando las leyes de los exponentes, $a^m a^n = a^{m+n}$ y $(a^m)^n = a^{mn}$, las cuales se cumplen trivialmente cuando los exponentes son números naturales. Estas propiedades son la guía conductora para establecer la definición de a^r cuando r es un racional (positivo, negativo o cero), como lo hicimos en la sección 3.1.5. Sin embargo, cuando r es un irracional, la situación ya no es tan simple. Si r es un irracional, empíricamente concebimos a^r como un número al cual nos aproximamos mediante potencias racionales a^ρ, es decir, potencias con exponente racional. Por ejemplo, si tratamos de darle significado a un número como $2^{\sqrt{2}}$, ante la imposibilidad de escribir con exactitud la expansión decimal de $\sqrt{2}$, lo primero que se nos ocurrirá será sustituir $\sqrt{2}$ por una aproximación como 1.4142, que es un racional. Es decir, para tener idea del valor que tiene $2^{\sqrt{2}}$ intentamos primero tener una idea del valor de $2^{1.4142}$ o quizá de una aproximación más simple como $2^{1.4} = 2^{\frac{14}{10}} = 2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{128}.$ En resumen, son las potencias racionales nuestros recursos para comprender o darle significado a potencias con exponentes irracionales. De hecho, cuando trabajamos con números irracionales, en la práctica nos remitimos a los racionales. Es un reflejo natural, es un hábito que adquirimos y desarrollamos en nuestra formación matemática escolar. Por ejemplo, si no recurrimos a una aproximación decimal de un número como $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, quizá nos quede un dejo de insatisfacción al hablar de él. Creo que uno se siente mejor si escribimos $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, aunque algunas veces abusamos y escribimos indebidamente $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$. No podemos negar que los racionales son los números de la vida diaria y que también son el recurso para acercarnos al misterioso mundo de los irracionales. Por esta razón preferimos establecer la definición de la potencia a^r para r irracional, mediante este proceso natural que utilizamos en la práctica y que consiste en aproximarnos a a^r con aproximaciones racionales del irracional r. Si embargo, debemos hacer una serie de precisiones y justificar matemáticamente algunos procesos de aproximación.

Si a es un real positivo, en el capítulo 3 hemos definido a^r para todo racional r. Ahora extenderemos la definición a todos los reales r. Si r es un real arbitrario, definiremos a^r como límite de sucesiones de números de la forma $t_n = a^{r_n}$, donde (r_n) es cualquier sucesión de racionales que converge al real r. Se tendrá entonces $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Pero no es inmediato, se trata de una prueba de existencia, la existencia de un límite. Para poder hablar de $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ debemos probar que existe tal límite. Más aún, debemos probar que siempre que se tenga una sucesión de racionales (r_n) que converge a r, entonces la sucesión (a^{r_n}) es convergente. Sin embargo, esto no es suficiente para establecer la definición, también debemos probar que si tenemos dos sucesiones de racionales (r_n) y (s_n) que convergen a un mismo real r, entonces las sucesiones correspondientes (a^{r_n}) y (a^{s_n}) convergen al mismo límite. Cuando probemos esto, estaremos en posibilidades de definir a^r para todo real r. En resumen son dos los resultados importantes a probar:

1) Si r es un real y (r_n) es cualquier sucesión de *racionales* tal que $r_n \to r$, entonces existe $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$.
2) Si (r_n) y (s_n) son dos sucesiones de racionales que convergen a un mismo real r, entonces $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$.

Para probar 1) y 2) nos apoyaremos en otras proposiciones auxiliares, la primera de ellas que establecemos a continuación si bien es simple en su enunciado, es fundamental. De la cadena de proposiciones que nos llevarán a 1) y 2), la primera proposición es la que tiene una prueba con mayor dificultad. El lector que desee avanzar con rapidez en el establecimiento de la definición de a^r puede omitir la prueba de esta primera proposición, las pruebas del resto de las proposiciones son muy simples. El lector interesado en la prueba de la primera proposición puede consultarla en el apéndice de esta obra.

Iniciemos pues nuestra serie de proposiciones que nos ayudarán a definir con rigor a^r para todo real r, racional e irracional.

Proposición

Sean $a > 0$ y (r_n) una sucesión de racionales que converge a cero, entonces la sucesión (a^{r_n}) converge a 1.
Para una demostración de la proposición anterior veáse el apéndice de este volumen.

Proposición

Sean $a > 0$ y r cualquier real. Sea (r_n) una sucesión creciente de racionales que converge a r. Entonces, la sucesión (a^{r_n}) es convergente.

Demostración

Supongamos como primer caso $a > 1$. Como (r_n) es una sucesión creciente, como ya probamos en la sección 3.5.1, la sucesión (a^{r_n}) también es creciente. Como (r_n) está acotada superiormente, la sucesión (a^{r_n}) también lo está. Por tanto, la sucesión (a^{r_n}) es convergente. Esto prueba la convergencia de (a^{r_n}) cuando $a > 1$. Si $a < 1$, aplicamos lo ya probado a la sucesión (α^{r_n}), donde $\alpha = \frac{1}{a} > 1$. La sucesión (α^{r_n}) es creciente y converge a un número positivo, luego existe

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^{r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{r_n}}.$$

El caso $a = 1$ es trivial.

Esto prueba la proposición.

Proposición

Sean $a > 0$ y r cualquier real. Sean (r_n) y (s_n) dos sucesiones de racionales convergentes al real r. Supongamos (r_n) creciente y (s_n) arbitraria. Entonces (a^{s_n}) es convergente y además

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}.$$

Demostración

Por la proposición anterior, sabemos que la sucesión (a^{r_n}) es convergente. Así pues, escribamos

$$a^{s_n} = a^{s_n - r_n + r_n} = a^{s_n - r_n}\, a^{r_n}.$$

Como $(s_n - r_n)$ es una sucesión de racionales que converge a cero, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n - r_n} = 1.$$

Por consiguiente, existe $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{s_n - r_n} a^{r_n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n - r_n})(\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.

De donde

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Esto prueba la proposición.

De la proposición anterior, se deduce un enunciado más general.

Teorema

Sean $a > 0$ y r cualquier real. Sean (r_n) y (s_n) dos sucesiones de racionales convergentes al real r. Entonces (a^{r_n}) y (a^{s_n}) son convergentes y además

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} .$$

Definición

Sea $a > 0$ y r cualquier real. Definimos a^r como

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} ,$$

donde (r_n) es cualquier sucesión de racionales que converge a r.

Esta definición establece el valor de a^r sin ambigüedad, ya que según el teorema probado, su valor es independiente de la sucesión de racionales (r_n) que se elija convergente a r.

5.5 Continuidad

Esta sección está dedicada al concepto de continuidad de funciones, el cual es indispensable para probar muchos de los resultados de cálculo diferencial. Por ejemplo, se requiere para establecer las reglas de derivación o para probar los principales teoremas sobre funciones derivables, mismos que estudiaremos en el capítulo 7.

Definición

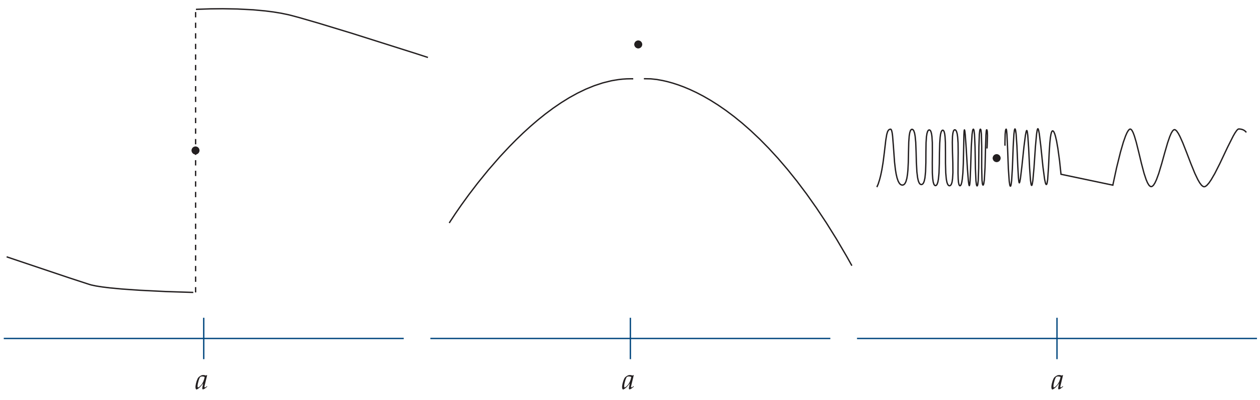
Sea f una función definida al menos en una vecindad abierta de un punto a. Decimos que f es **continua** en el punto a si existe el límite de f en a y además

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) .$$

Diremos que f es **discontinua** en a si no es continua en a. Que f sea discontinua en a significa, entonces, que o bien no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ o este límite es diferente de $f(a)$.

Observemos que a diferencia de la definición de límite, en el caso de la continuidad se requiere que la función esté definida en el punto en cuestión.

Es común que al intentar explicar el significado geométrico de continuidad de una función en un punto, algunos recurran a expresiones como “que una función sea continua quiere decir que su gráfica puede trazarse sin despegar el lápiz” o bien “que una función sea continua en un punto significa que su gráfica no tiene rupturas en ese punto” y entonces se acude a gráficas que muestran rupturas como las de la siguiente figura.



Ciertamente ninguna de estas gráficas puede ser la de una función continua en el punto a. En la de la izquierda existen los límites laterales en a pero son diferentes, además ninguno de estos límites coincide con el valor de la función $f(a)$. En la gráfica del centro existe el límite en el punto a pero es diferente de $f(a)$. La función cuya gráfica es la de la derecha, no tiene límites laterales. Por cierto, estas gráficas corresponden a situaciones particulares de funciones discontinuas en el punto a.

Pero las gráficas son ejemplos de cómo *no es* la de una función continua en un punto a, pero solo eso. La continuidad de una función en un punto es un concepto mucho más general que la ausencia de rupturas. La continuidad se refiere a una propiedad de una función en un punto y no al aspecto que pueda tener la función o su gráfica alrededor de él. Cuando se dice que una gráfica tiene una ruptura en un punto, implícitamente se asume que la función tiene un "buen comportamiento" alrededor de él, digamos que la gráfica tiene un aspecto liso fuera del punto y que es este el responsable de que la gráfica pierda el buen comportamiento observado a su alrededor. No tenemos por qué pensar que la gráfica de una función es bien comportada alrededor de un punto donde la función es continua y que la continuidad no es más que la extensión de ese buen comportamiento al punto.

La continuidad es un concepto puntual, es decir, se refiere a la propiedad que puede tener una función en un punto, si bien esta propiedad se describe en términos de los valores de la función en una vecindad del punto, el comportamiento de la función en la vecindad no tiene por qué ser mejor que la que tiene en el punto.

Esperamos que con los ejemplos que presentamos más adelante se aclare lo expresado en el párrafo precedente.

De hecho, una función puede estar definida en todos los reales y ser continua en un punto, solo en uno y en ninguno más. De esto daremos cuenta más adelante. Si una función es continua solo en un punto, no tiene sentido decir que solo en ese punto su gráfica no tiene rupturas, si en todos y cada uno de los puntos restantes hay rupturas, sería un contrasentido.

Si le parece extraño que hablemos de funciones que puedan ser continuas en un punto y discontinuas en todos los otros puntos, le concedemos la razón; lo extraño sería que le pareciera natural. La posibilidad de que haya funciones como la ya mencionada es por la naturaleza de nuestra definición de continuidad. Más adelante veremos ejemplos de este tipo de funciones. Esto significa que la definición matemática de continuidad no corresponde a la idea intuitiva que le damos a ese término, así que tenemos que entenderla muy bien y manejarla con todo el cuidado que se merece.

Aun cuando la definición de continuidad entrañe propiedades profundas y de gran generalidad, podemos observar que dado que la continuidad la hemos formulado en términos del límite de una función, el cual, a su vez, lo hemos establecido en términos de límite de sucesiones, todo lo desarrollado y estudiado acerca de estos y después de funciones, nos facilitará su estudio y tratamiento. En particular, establecemos de inmediato el siguiente teorema:

Teorema

Una función f, definida al menos en una vecindad abierta de un punto a, es continua en el punto a, si y solo si para toda sucesión (x_n) con $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

En cierto sentido y asumiendo que tenemos una razonablemente buena comprensión y un aceptable manejo de límites de funciones o de sucesiones, la continuidad de funciones en términos de estos se convierte en un concepto trivial.

Hemos definido la continuidad de una función en un punto de su dominio cuando dicho punto es interior, es decir, cuando existe una vecindad abierta del punto que está contenida en el dominio de la función. Si la función está definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces la definición de continuidad aplica a los puntos del intervalo abierto (a, b). Para el caso de los puntos extremos a y b, definimos continuidad lateral como sigue.

Definición

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **continua por la derecha** en a, si $f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$ y es **continua por la izquierda** en b, si $f(b) = \lim_{x\to b-} f(x)$.

Completamos nuestra definición de continuidad con la siguiente definición.

Definición

Una función f que es continua en cada punto x de su dominio, diremos que es **continua.**

Ejemplo 20

En el ejemplo 15 probamos que si

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

es un polinomio con coeficientes reales, entonces para todo real a tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \\ &= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0) \\ &= f(a)\end{aligned}$$

Esto significa que toda función polinomial $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ es continua en todo real a.

Ejemplo 21

En el ejemplo 16 probamos que si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, entonces para todo real donde $q(a) \neq 0$ se tiene

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a).$$

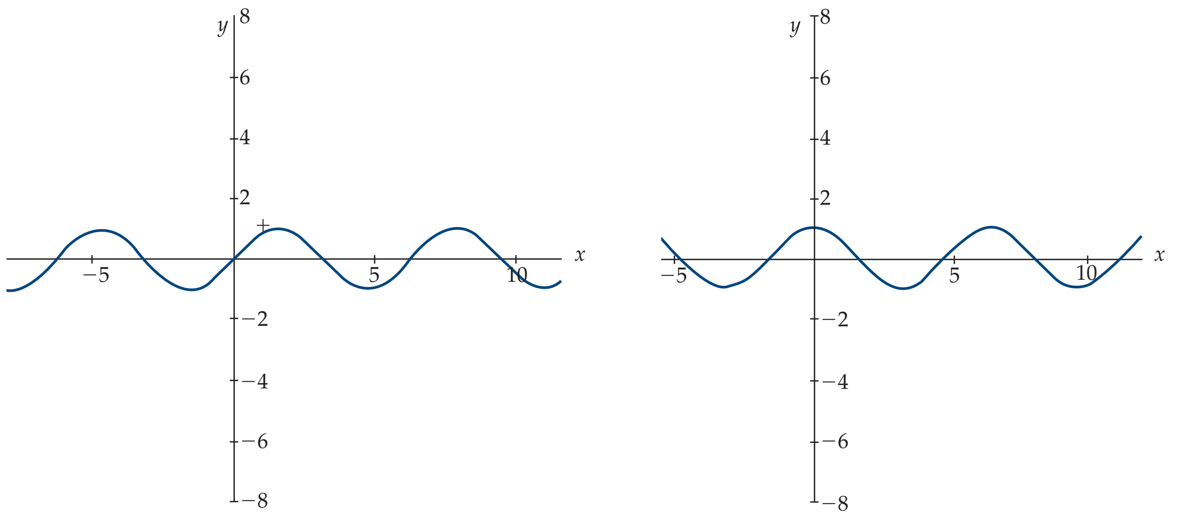
Esto significa que toda función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es continua en todo punto a de su dominio, el cual consiste en los reales x donde $q(x) \neq 0$.

Ejemplo 22

En el ejemplo 10 probamos que para todo real a se tiene

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$
- $\lim_{x\to\infty} \cos x = \cos a$

Esto significa que las funciones sen x y cos x son funciones continuas en todo punto a de su dominio, que es $\mathbb{R}$.



Los siguientes ejemplos se refieren a la continuidad en puntos particulares.

Ejemplo 23

Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Según hemos convenido, esta función está definida en todos los reales con excepción del cero, así que podemos hablar del límite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

pero no de que la función f sea continua en ese punto $x = 0$, pues no está definida en este punto. Sin embargo, si definimos la nueva función

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

también tenemos

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 1.$$

Las funciones f y F son diferentes, sus dominios son distintos, eso las hace diferentes. Pero ahora también podemos escribir

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 1.$$

Esto significa que la función F es continua en $x = 0$.

Ejemplo 24

Sea $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Como en el ejemplo anterior, dado que esta función no está definida en $x = 0$, no tiene sentido hablar de la continuidad de f en ese punto. Sin embargo, en el ejemplo 13 demostramos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Así que si definimos

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

obtenemos una función continua en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{1}{2} = F(0).$$

Esta función coincide con la original f en todos los puntos excepto en $x = 0$, donde f no está definida. Cuando se construyen funciones de esta manera, es decir, agregando puntos al dominio de una función dada, se dice que la función original se redefine, aunque solo es una manera de hablar, pues en realidad se define una nueva función.

Ejemplo 25

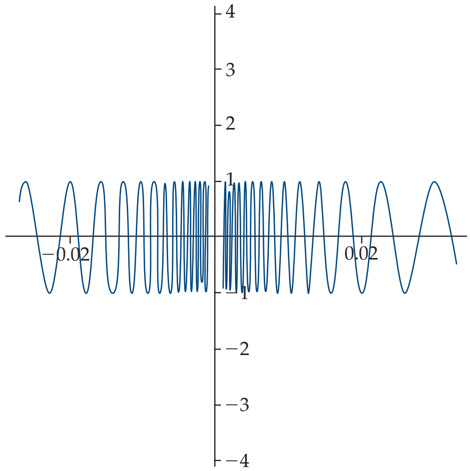
Sea $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. Esta función está definida en los reales diferentes de cero, pero dado que no tiene límite en $x = 0$, es decir, no existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, entonces no es posible definirla en ese punto, de tal manera que podamos obtener una función continua, como ocurrió en los ejemplos 23 y 24.

Como consecuencia tenemos:

Ejemplo 26

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Es discontinua en $x = 0$.

Ejemplo 27

Sea $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. En el ejemplo 12 probamos que

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

entonces, si definimos

$$F(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

obtenemos una función continua en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0.$$

Las funciones de los dos siguientes ejemplos remarcan la naturaleza puntual de la continuidad de una función y también muestran que la idea intuitiva asociada con la ausencia de rupturas de una gráfica dista mucho del significado profundo de este concepto.

Ejemplo 28

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

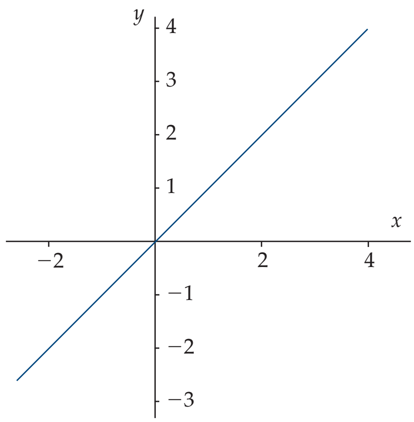
Esta función es continua en $x = 0$ y discontinua en todo $x \neq 0$. Así que es continua en un solo punto.

En efecto, probemos primero que f es continua en $x = 0$. Sea (x_n) cualquier sucesión que converge a cero. Para los elementos x_n que sean racionales se tiene $f(x_n) = x_n$. Para los elementos x_n que sean irracionales se tiene $f(x_n) = 0$. Como $x_n \to 0$, entonces $f(x_n) \to 0$. Luego, f es continua en $x = 0$.

Sea $x \neq 0$. Mostremos que f es discontinua en x. Supongamos primero que x es racional (diferente de cero), entonces $f(x) = x$. Elijamos cualquier sucesión de irracionales (x_n) convergente a x. Entonces $f(x_n) = 0 \to 0 \neq f(x) = x$, es decir $f(x_n) \not\to f(x)$. Esto prueba que f es discontinua en x. Supongamos ahora que x es irracional. Elijamos cualquier sucesión de racionales (x_n) convergente a x.

Entonces $f(x_n) = x_n \to x \neq f(x) = 0$, es decir $f(x_n) \not\to f(x)$.

En la gráfica siguiente, la recta $y = x$ consiste solo de puntos (x, x) con coordenadas racionales y la recta horizontal $y = 0$ consiste en puntos $(x, 0)$ con x irracional.



Ejemplo 29

Sea la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,\ 1],\ x = \dfrac{p}{q},\ q > 0 \text{ con } (p,\ q) = 1 \end{cases}$$

Recordemos que $(p, q) = 1$ significa que p y q son primos relativos, es decir, enteros sin factores en común.

Lo espectacular de esta función es que es continua en los irracionales y es discontinua en los racionales diferentes de cero, por supuesto es continua en $x = 0$.

Probemos primero que es discontinua en los racionales diferentes de cero. Sea x un racional diferente de cero, digamos $x = \dfrac{p}{q}$, donde p y q son enteros positivos primos relativos. Entonces $f(x) = \dfrac{1}{q}$.

Sea (x_n) una sucesión de irracionales que converge a x. Entonces $f(x_n) = 0$ para todo natural n. Por tanto, $f(x_n) \to 0$, luego $f(x_n) \not\to f(x) = \dfrac{1}{q}$. Esto prueba que f es discontinua en el racional x.

Sea ahora un irracional x y sea $(x_n) = \left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ cualquier sucesión de racionales positivos que converge a x. Probemos que al converger $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ al irracional $x > 0$, necesariamente $p_n \to +\infty$ y $q_n \to +\infty$.

Si (p_n) no divergiera a infinito, tendría una subsucesión (p_{nk}) acotada superiormente (¿por qué?). Como los elementos p_n son enteros positivos, al ser (p_{nk}) acotada, toma valores sobre un conjunto finito de enteros, así que al menos hay un entero positivo p tal que $p_{n_k} = p$ para una infinidad de índices n_k, por lo tanto, $p_n = p$ para una infinidad de índices n. En conclusión, existiría una subsucesión constante (p_{mk}) de (p_n). Entonces $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ tendría una subsucesión de la forma $\left(\dfrac{p}{q_{m_k}}\right)$ convergiendo al irracional x. Pero esto es imposible, pues

$$q_{m_k} = p\frac{1}{\dfrac{p}{q_{m_k}}}$$

convergería a px. Esto prueba que $p_n \to +\infty$. Por tanto, también se tiene $q_n \to +\infty$, esto se sigue de la relación $q_n = p_n \dfrac{1}{\frac{p_n}{q_n}}$ y del hecho $\dfrac{p_n}{q_n} \to x$.

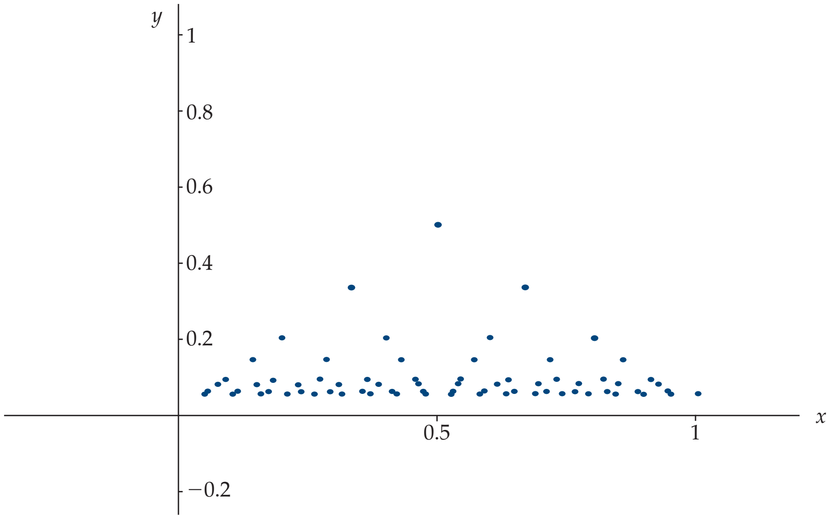
Por tanto, $f(x_n) = f\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right) = \dfrac{1}{q_n} \to 0$. O sea $f(x_n) \to f(x)$. Hemos probado que para toda sucesión de racionales (x_n) que converge a un irracional x, se tiene $f(x_n) \to f(x)$.

Consideremos ahora cualquier sucesión de reales (x_n) que converge a un irracional x. Entonces ocurren tres posibilidades:

a) A partir de algún índice N, todos los términos de la sucesión son racionales.
b) A partir de algún índice N, todos los términos de la sucesión son irracionales.
c) La sucesión es la unión de dos subsucesiones, una de racionales y otra de irracionales.

Cualquiera que sea el caso, se sigue inmediatamente de lo ya probado que $f(x_n) \to f(x)$. Esto prueba que f es continua en los irracionales.

En la siguiente figura se muestran algunos puntos de la gráfica de esta función.



Los siguientes teoremas acerca de la continuidad se obtienen directamente de las propiedades de los límites de funciones.

Teorema

Si f y g son funciones continuas en un punto a, entonces.

a) $f + g$ es continua en a.
b) fg es continua en a.
c) Si $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Demostración

Con los resultados sobre límites, la prueba de este teorema es muy simple. Por ejemplo, probemos el inciso a). Como f y g son continuas en a, entonces se tiene el

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Por consiguiente

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = f(a)+g(a) = (f+g)(a) \quad .$$

Esto significa que $f + g$ es continua en a.

Las pruebas de los demás incisos se dejan como ejercicio para el lector.

El siguiente teorema también es una consecuencia inmediata del correspondiente para límites.

Teorema

Si f es continua en un punto a y $f(a) \neq 0$, entonces existe una vecindad abierta J de a, tal que para toda $x \in J$, $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$, en particular $f(x) \neq 0$ para toda $x \in J$.

El siguiente teorema merece una prueba especial, ya que no tenemos su versión para límites.

Teorema

Sean f y g funciones tales que la composición $g \circ f$ está definida. Supongamos f continua en a y g continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Demostración

Probemos la continuidad de $g \circ f$ en a aplicando la definición. Para eso, mostremos que dada cualquier $\varepsilon > 0$ es posible encontrar una $r > 0$ tal que $|(g \circ f) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$ para todo real x que satisfaga $|x - a| < r$. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria. Como g es continua en $f(a)$, existe $r_1 > 0$, tal que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ para todo real y que cumpla $|y - f(a)| < r_1$. Por otra parte, como f es continua en a, existe $r > 0$, tal que $|f(x) - f(a)| < r_1$ para todo real x que cumpla $|x - a| < r$. Por tanto, si x satisface $|x - a| < r$, se cumple $|f(x) - f(a)| < r_1$ y esto implica, a su vez, que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$, es decir $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$. Esto prueba que $g \circ f$ es continua en a.

Enseguida veamos un asombroso teorema sobre continuidad y funciones estrictamente crecientes, para una prueba ver el apéndice.

Teorema

Sea f una función estrictamente creciente definida en un intervalo abierto I con imagen A. Entonces, la función inversa $f^{-1}\colon A \to I$ es continua.

Note que en el teorema anterior no se supone que la función f sea continua, ni siquiera en un punto, pero en cualquier caso la función inversa siempre resultará continua en *todos los puntos de su dominio*. Esto es consecuencia de la notable combinación de dos hipótesis: f es estrictamente creciente y su dominio es un intervalo. Por cierto, la imagen A de f no necesariamente es un intervalo. En el caso de que este conjunto también sea un intervalo, entonces podemos concluir que también f misma es continua, pues se tendría f^{-1} estrictamente creciente en un intervalo y la inversa de f^{-1} es f. Este teorema no solo resulta espectacular sino que además es muy poderoso, pues nos permite probar la continuidad de diversas funciones importantes, como se demuestra en los ejemplos que aparecen a continuación.

5.6 Las funciones exponencial a^x y $\log_a x$

En la sección 5.4 definimos la potencia a^r para $a > 0$ y $r \in \mathbb{R}$. Esta definición ahora nos permite definir la función exponencial $f(x) = a^x$ con dominio en todos los reales y la función potencia

$g(x) = x^r$ con exponente cualquier real r definida en $[0, +\infty)$. En esta sección estudiaremos la función exponencial $f(x) = a^x$ y su función inversa $\log_a x$.

Probemos primero que si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente. Sean s y t dos reales cualesquiera tales que $s < t$. Elijamos dos sucesiones de racionales (s_n) y (t_n) con las siguientes características:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t$.
- Ambas sucesiones (s_n) y (t_n) son estrictamente crecientes.
- Todo elemento de la sucesión (s_n) es menor que todo elemento de la sucesión (t_n), es decir, $s_n < t_m$ para cualesquiera índices m y n.

Como $a > 1$, para cada m fija y toda n se cumple $a^{s_n} < a^{t_m}$. Por tanto, tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq a^{t_m}.$$

O sea

$$a^s \leq a^{t_m}.$$

Esta desigualdad vale para todo entero positivo m. En particular, tenemos

$$a^s \leq a^{t_1} < a^{t_2} < a^{t_m}.$$

Tomando ahora el límite cuando $m \to \infty$, tenemos

$$a^s \leq a^{t_1} < a^{t_2} \leq \lim_{n\to\infty} a^{t_m} = a^t.$$

Esto prueba la desigualdad $a^s < a^t$.

Se deja como ejercicio para el lector que pruebe que si $0 < a < 1$, entonces la función a^x es estrictamente decreciente.

Enunciamos los resultados en el siguiente teorema.

Teorema

Sean $a > 0$ y $f(x) = a^x$ (definida en todos los reales). Si $a > 1$, $f(x)$ es estrictamente creciente. Si $0 < a < 1$, $f(x)$ es estrictamente decreciente. Además, $f(x) > 0$ para todo real x.

Ahora probemos que $f(x) = a^x$ es una función continua. Usando el teorema anterior podemos probar la siguiente proposición.

Proposición

Sean $a > 0$ y (r_n) una sucesión de reales que converge a cero, entonces la sucesión (a^{r_n}) converge a 1.

La prueba es totalmente similar al caso en el que (r_n) es una sucesión de racionales (véase el apéndice). Aquella prueba se apoyó en el hecho de que para $a > 1$, la función a^x, definida solo en los racionales, es creciente. Ahora a^x está definida en todos los reales.

De este teorema se desprende el siguiente que es muy importante.

Teorema

Sean $a > 0$ y r cualquier real. Sea (s_n) cualquier sucesión de reales tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = r$.
Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^r.$$

Demostración

Tomemos cualquier sucesión de racionales (r_n), tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Tenemos entonces por definición.

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Escribamos,

$$a^{s_n} = a^{s_n - r_n + r_n} = a^{s_n - r_n} a^{r_n}.$$

Como $(s_n - r_n)$ es una sucesión de reales que converge a cero, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n - r_n} = 1.$$

Por tanto, existe $\lim_{n\to\infty}\left(a^{s_n-r_n}a^{r_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a^{s_n-r_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. De donde

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r.$$

Esto prueba la proposición.

La proposición anterior no es otra cosa que la continuidad de la función exponencial, lo cual formulamos a continuación

Teorema

Si $a > 0$, entonces la función exponencial $f(a) = a^x$ es continua.

Un caso particular es el siguiente.

Teorema

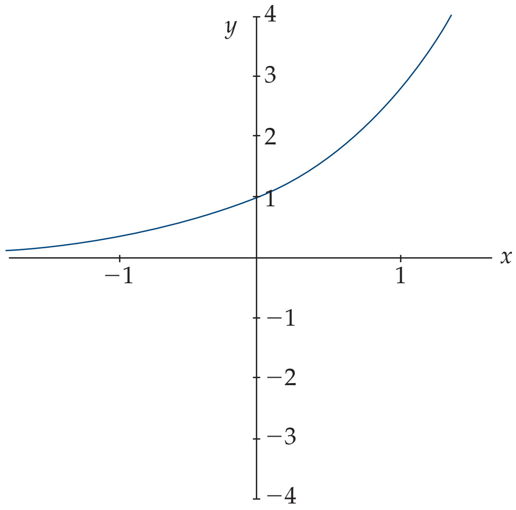
La función $\mathrm{Exp}(x) = e^x$ es continua y estrictamente creciente. Además, $e^x > 0$ para todo real x.

Si $a > 0$, la función $\log_a x$ es la inversa de la función a^x. Como a^x está definida en $\mathbb{R}$, el cual es un intervalo y es estrictamente creciente, su inversa $\log_a x$ es continua. Note que la continuidad de la función logaritmo se sigue del hecho de que a^x es estrictamente creciente y de que su dominio es un intervalo, no se requiere la hipótesis de que a^x es continua.

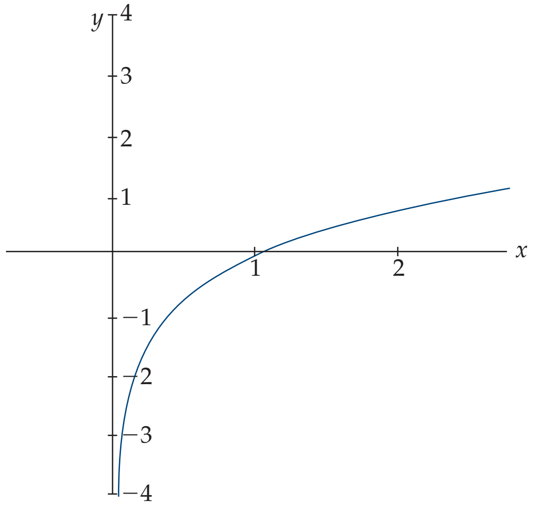
Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema

Si $a > 0$, la función $\log_a x$ es continua y estrictamente creciente.



Exp $(x) = e^x$



$f(x) = \log x$

5.7 Las funciones x^n y $\sqrt[n]{x}$

De las propiedades de los límites tenemos que para todo natural n, la función $f_n(x) = x^n$ es continua. Mostremos ahora que para todo entero positivo n, la función $f_n(x) = x^n$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. En efecto, sea $0 \leq x < y$. Si multiplicamos ambos miembros de esta desigualdad por $x \geq 0$, obtenemos de las propiedades de las desigualdades

$$x^2 \leq xy.$$

Similarmente, si multiplicamos ambos miembros de $x < y$ por $y > 0$, obtenemos

$$xy < y^2.$$

Por transitividad tenemos entonces

$$x^2 < y^2.$$

Esto prueba que $f_2(x) = x^2$ es estrictamente creciente. Supongamos ahora que para algún entero positivo k la función $f_k(x) = x^k$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Mostremos que $f_{k+1}(x) = x^{k+1}$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Sea $0 \leq x < y$. Tenemos entonces $x^k < y^k$. Al multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por $x \geq 0$ obtenemos $x^{k+1} \leq xy^k$. Por otra parte, al multiplicar $x < y$ por $y^k > 0$ tenemos $xy^k < y^{k+1}$. Por la propiedad transitiva obtenemos $x^{k+1} < y^{k+1}$. Esto prueba que $f_{k+1}(x) = x^{k+1}$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Por el principio de inducción matemática concluimos finalmente que para todo natural n, $f_n(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

Mostremos ahora que para todo entero positivo impar la función $f_n(x) = x^n$ es creciente estrictamente en $\mathbb{R}$. Ya hemos probado que es creciente estrictamente en $[0, +\infty)$, mostremos ahora que es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$. Sea $x < y \leq 0$. Tenemos entonces $0 \leq -y < -x$. Por lo ya probado tenemos $(-y)^n < (-x)^n$. O sea $(-1)^n y^n < (-1)^n x^n$. Como n es impar $(-1)^n = -1$, entonces tenemos $-y^n < -x^n$. Al multiplicar por -1 ambos miembros de esta desigualdad obtenemos finalmente $x^n < y^n$. Esto prueba que $f_n(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$. Para probar que $f_n(x) = x^n$, cuando n es impar, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ resta mostrar que si $x < 0 < y$, entonces $f(x) < f(y)$. Pero esto es inmediato pues en este caso $f(x) < 0 < f(y)$.

Ahora consideremos $g_n(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$. Mostremos que esta función es continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ cuando n es par y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ cuando n es impar. Para todo natural n, la función $g_n(x)=\sqrt[n]{x}$ es la inversa de $f_n(x) = x^n$. Como f_n es estrictamente creciente así lo es su inversa g_n. Por otra parte, como el dominio de f_n es un intervalo y es estrictamente creciente, su inversa g_n es continua. Hemos probado que $g_n(x)=\sqrt[n]{x}$ es continua y estrictamente creciente.

Resumimos los resultados en los siguientes teoremas.

Teorema

Para todo entero positivo n, la función $f(x) = x^n$ es continua. Además si n es par, f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Si n es impar, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Teorema

Para todo entero positivo n, la función $f(x)=\sqrt[n]{x}$ está definida en $[0, +\infty)$ si n es par y está definida en $\mathbb{R}$ si n es impar. Además para todo natural n, $f(x)=\sqrt[n]{x}$ es continua y estrictamente creciente en su dominio.

5.7.1 Las funciones $x^{\frac{p}{q}}$

Sea ahora r un racional y sea $f(x) = x^r$. Esta función está definida en $[0, +\infty)$ si $r > 0$ y en $(0, +\infty)$ si $r < 0$. Mostremos que $f(x) = x^r$ es continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ si $r > 0$, y es continua y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ si $r < 0$.

Supongamos primero $r > 0$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $r=\frac{m}{n}$. Como $g_n(x)=\sqrt[n]{x}$ es continua, $g^m(x)=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=x^{\frac{m}{n}}$ es continua. Sean ahora $0 \le x < y$. Como $g_n(x)=\sqrt[n]{x}$ es estrictamente creciente $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}$. Como $f_m(x) = x^m$ es estrictamente creciente, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m<\left(\sqrt[n]{y}\right)^m$, es decir $x^{\frac{m}{n}} < y^{\frac{m}{n}}$. Hemos probado que $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ es continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

Si $r=-\frac{m}{n}$, $f(x)=x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, es continua en $(0, +\infty)$. Como $x^{\frac{m}{n}}$ es estrictamente creciente, $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ es estrictamente decreciente. Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema

Sea r cualquier racional y sea $f(x) = x^r$. Esta función está definida en $[0, +\infty)$ si $r > 0$ y en $(0, +\infty)$ si $r < 0$. Entonces $f(x) = x^r$ es continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ si $r > 0$ y es continua y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ si $r < 0$.

5.8 Leyes de los exponentes reales

Ahora probaremos las leyes de los exponentes cuando estos son reales. La prueba del primer teorema solo requiere la definición de a^r como límite de sucesiones de la forma a^{r_n} con r_n racional. La prueba del segundo teorema requiere la continuidad de la función x^r con r racional.

Teorema

Para toda $a > 0$ y cualesquiera reales r y s se tiene $a^r a^s = a^{r+s}$.

Demostración

Por definición $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ y $a^s = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$ donde (r_n) es una sucesión de racionales que converge a r y (s_n) es una sucesión de racionales que converge a s. Por una parte tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}a^{s_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(a^{s_n}\right) = a^r a^s.$$

Por otra parte

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}a^{s_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n+s_n}\right) = a^{r+s}.$$

Por tanto $a^r a^s = a^{r+s}$. Esto prueba el teorema.

Para la prueba de la segunda ley de los exponentes vamos a requerir la continuidad de las funciones exponencial a^x y potencia x^r.

Teorema

Sea $a > 0$ y sean r y s reales cualesquiera. Entonces $(a^r)^s = a^{rs}$.

Demostración

Sean (r_n) y (s_m) dos sucesiones de racionales cualesquiera tales que $r_n \chi r$ y $s_m \to s$. Por definición, $(a^r)^s = \lim_{m\to\infty} (a^r)^{s_m}$ y $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Como x^{s_m} es una función continua y $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_m} = (a^r)^{s_m}$. Luego

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\right)^{s_m} = \lim_{m\to\infty}\left(a^r\right)^{s_m} = \left(a^r\right)^s.$$

Por otra parte, sabemos que $(a^{r_n})^{s_m} = a^{r_n s_m}$, por lo tanto para $m \in \mathbb{N}$ fija $\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\right)^{s_m} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n s_m} = a^{r s_m}$. Como a^x es continua $\lim_{n\to\infty} a^{r s_m} = a^{rs}$, es decir, $\lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_m} = a^{rs}$. Comparando los dos resultados para $\lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_m}$ obtenemos $(a^r)^s = a^{rs}$, que es lo que deseábamos probar.

5.9 Leyes de los logaritmos

En esta sección probaremos las leyes de los logaritmos que establecemos a continuación.

Teorema

Sea $a > 0$.

1) Si y_1 y y_2 son elementos del dominio de la función $\log_a x$, entonces se cumple $\log_a (y_1 y_2) = \log_a (y_1) + \log_a (y_2)$.
2) Si y está en el dominio de $\log_a x$ y r es cualquier real, entonces se cumple $\log_a (y^r) = r \log_a y$.

Demostración

Prueba de 1. Sea $x = \log_a(y_1 y_2)$, $x_1 = \log_a y_1$ y $x_2 = \log_a y_2$. Entonces por definición se tiene $a^x = y_1 y_2$, $a^{x_1} = y_1$ y $a^{x_2} = y_2$. Por tanto, $a^x = y_1 y_2 = a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$. Entonces $x = x_1 + x_2$. O sea $\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$.

Prueba de 2. Sea $x = \log_a y^r$. Si $r = 0$, la igualdad $\log_a (y^r) = r \log_a y$ se cumple trivialmente en este caso, pues $\log_a 1 = 0$. Supongamos ahora $r \neq 0$, entonces se tiene $a^x = y^r$. Luego $(a^x)^{\frac{1}{r}} = y$, es decir, $a^{\frac{x}{r}} = y$. Esto significa que $\frac{x}{r} = \log_a y^r$, o sea $x = r \log_a y$. Esto prueba que $x = \log_a y^r = r \log_a y$.

5.10 La función x^r

De las leyes de los logaritmos se sigue que para todo real r y todo $x > 0$ se tiene $\log(x^r) = r \log x$, así que la función $f(x) = x^r$ se escribe como

$$f(x) = x^r = e^{r \log x}.$$

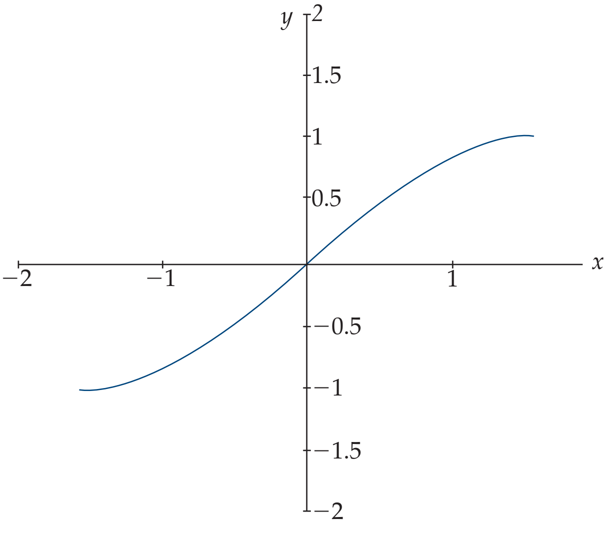
Por tanto, f es continua, pues si (r_n) es una sucesión de reales que converge a x, entonces por la continuidad de $\log x$ se tiene $\log r_n \to \log x$. Así, por la continuidad de e^x se tiene $e^{r \log r_n} \to e^{r \log x}$. O sea $f(r_n) \to f(x)$. Esto prueba la continuidad de $f(x) = x^r$. De la misma relación anterior y de la monotonía de las funciones exponencial y logaritmo obtenemos que la función $f(x) = x^r$ es estrictamente creciente si $r > 0$ y es estrictamente decreciente si $r < 0$. Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema

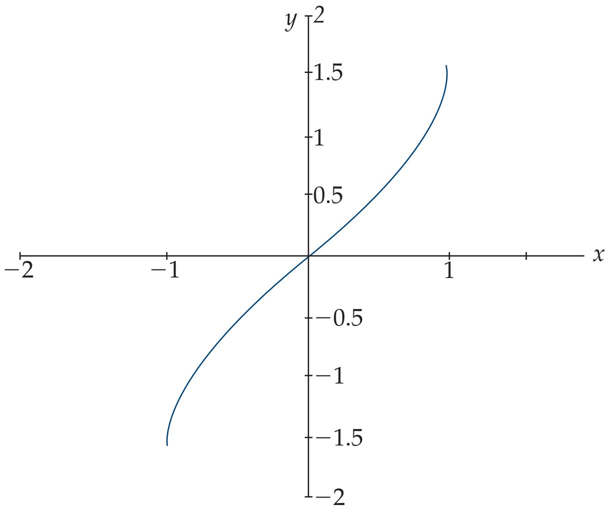
Para todo real r la función $f(x) = x^r$ es continua. Además, si $r > 0$, f es estrictamente creciente, si $r < 0$, f es estrictamente decreciente.

Ejemplo 30

Las funciones arcsen x y arccos x son funciones continuas en su dominio $[-1, 1]$. La función arcsen x es continua en su dominio, ya que es la inversa de una función creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

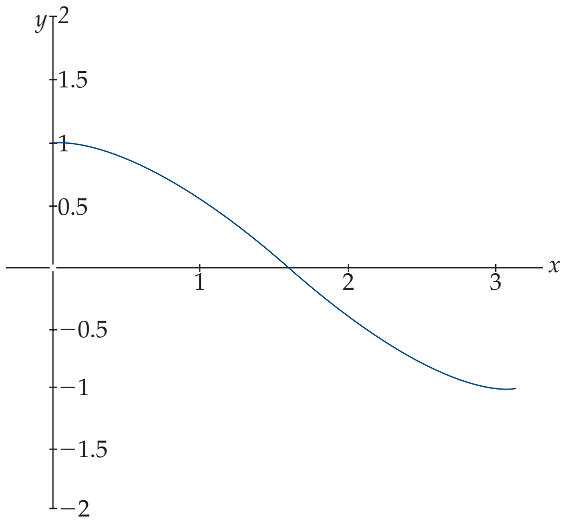


sen(x) restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

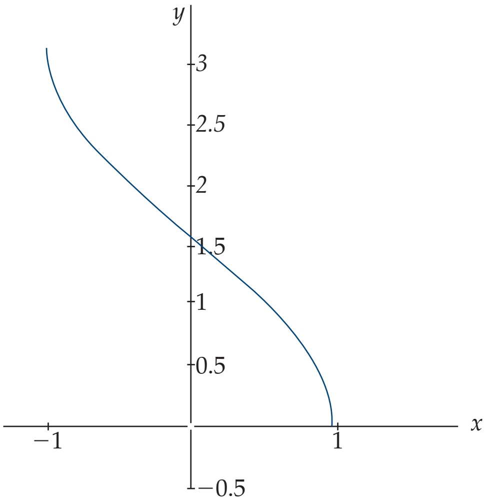


arcsen(x)

La función arccos x es la inversa de una función decreciente en el intervalo $[0, \pi]$.



cos x restringida al intervalo $[0, \pi]$

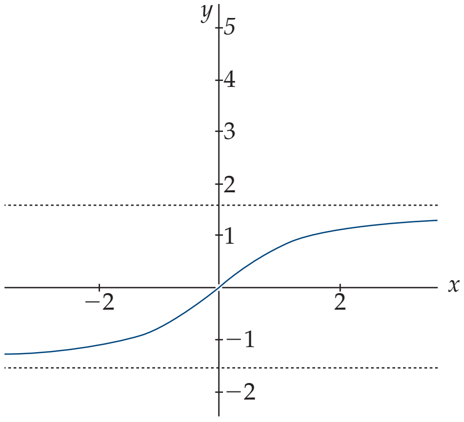


arccos(x)

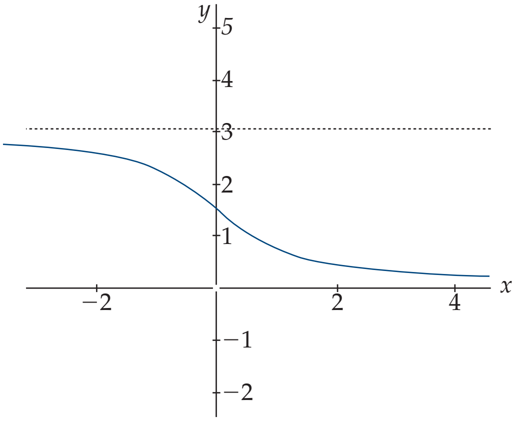
Las funciones arcsen x y arccos x tienen dominio en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejemplo 31

Las funciones arctan x y arccot x son continuas en su dominio, el cual es el conjunto de todos los reales. Ambas funciones son las inversas de funciones estrictamente monótonas en un intervalo.



arctan(x)



arccot(x)

5.11 Propiedades fundamentales de las funciones continuas

Una función continua en un intervalo cerrado y acotado posee propiedades de gran importancia. La relevancia de dichas propiedades es tal que se consideran la base para establecer los principales resultados del *cálculo diferencial e integral*, incluyendo los **teoremas del valor medio** y el **teorema fundamental del cálculo**. Para finalizar este capítulo, estableceremos tres de estas propiedades, su prueba se basa en la propiedad de continuidad de los reales. Aquí es donde la continuidad de los reales entra en escena y donde esta se hace indispensable. Estos teoremas son los que dan cuenta de la relevancia de este postulado. Nos encontramos en uno de los momentos cruciales en el desarrollo de la teoría del cálculo.

De esta forma, expondremos tres teoremas que hacen referencia a tres respectivas propiedades de las funciones continuas, las cuales es posible calificar, con justicia, como las propiedades fundamentales de las funciones continuas. Las pruebas de estos teoremas son profundas y tienen un cierto grado de dificultad, algunas de ellas pueden consultarse en el apéndice.

5.11.1 Propiedad de continuidad uniforme

La primera de las propiedades fundamentales de las funciones continuas que estudiaremos es la propiedad de continuidad uniforme. Estas propiedades las utilizaremos en las pruebas de las siguientes dos propiedades, además también la usaremos para probar la existencia de la integral, que estudiaremos en el capítulo 9.

Teorema (de continuidad uniforme)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que siempre que se tomen dos puntos $x, y \in [a, b]$, con $|x - y| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La prueba puede consultarse en el apéndice. La propiedad establecida en el teorema anterior tiene un gran parecido con la definición de continuidad de una función en *un punto*, sin embargo, una diferencia esencial es que ahora no hay un punto fijo, pues la propiedad se refiere a dos puntos cualesquiera, vale decir que se refiere a dos puntos variables. Está implícito, entonces, que la δ no depende de punto alguno, solo dependerá de ε. En general, para una función específica, entre más pequeña sea ε más pequeña será δ, aunque esto no necesariamente ocurre así; por ejemplo, para una función constante cualquier valor de δ va bien para cualquier valor de ε. En la definición de continuidad de una función en punto, en general δ dependerá tanto de la ε dada como del punto en cuestión, por esta razón y debido a la independencia de δ respecto a algún punto en particular, nos referiremos a la propiedad establecida en el teorema anterior como continuidad uniforme de f en el intervalo $[a, b]$. A continuación, formalizamos esta definición.

Definición

Una función f es **uniformemente continua** en un intervalo I (de cualquier tipo), si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para cualesquiera dos puntos $x, y \in I$ que satisfagan $|x - y| < \delta$, se tiene

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Que una función sea uniformemente continua en un intervalo significa que los valores de la función en dos puntos cualesquiera del intervalo están arbitrariamente cerca con tal que los puntos estén suficientemente cerca.

Ejemplo 32

Toda función constante definida en un intervalo I, por ejemplo en los reales $\mathbb{R}$, es uniformemente continua. En efecto, sean f la función y c su valor constante. Entonces, tenemos $f(x) = c$ para toda $x \in I$, por tanto, para toda $\varepsilon > 0$ y cualesquiera $x, y \in I$, se tiene

$$|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Así que podemos tomar cualquier valor positivo para δ, pues la desigualdad anterior se vale para cualquier par de puntos $x, y \in I$. En particular se cumplirá para todo par de puntos de I que satisfagan la desigualdad $|x - y| < \delta$ para la δ elegida.

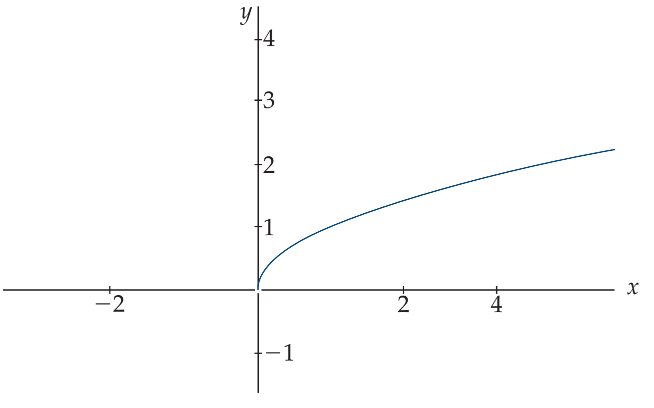
Ejemplo 33

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad, es decir, $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Debemos probar que para toda $\varepsilon > 0$ es posible hallar una $\delta > 0$, tal que siempre que se tenga $|x - y| < \delta$ se tendrá $|x - y| < \varepsilon$. Pero esto es obvio, pues para $\varepsilon > 0$ dada, es suficiente elegir $\delta = \varepsilon$, ya que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

Ejemplo 34

La función f:$[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \sqrt{x}$, es uniformemente continua.



En efecto, sean x y y dos reales cualesquiera en $[0, +\infty)$. Observemos primero que si $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, entonces

$$0 < \sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Por tanto, si x y y son dos reales cualesquiera en $[0, +\infty)$, se tiene

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|.$$

Ahora multipliquemos ambos miembros de la desigualdad anterior por $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|$, con lo que obtenemos

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|^2 \leq \left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| = |x-y|.$$

O sea

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

De esta desigualdad se sigue inmediatamente que la función $f(x)=\sqrt{x}$ es uniformemente continua, pues para $\varepsilon > 0$ dada, elijamos $\delta = \varepsilon^2$. Si $|x - y| < \delta = \varepsilon^2$, entonces

$$\sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Luego

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|} < \varepsilon.$$

Una formulación para la negación de la continuidad uniforme es la siguiente, la cual puede ser utilizada para probar que una función no es uniformemente continua.

Teorema

Una función $f: I \to \mathbb{R}$ *no* es uniformemente continua, si y solo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones de puntos (x_n) y (y_n) de puntos de I, tales que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$$

y

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

para todo natural n.

Demostración

Sean $\varepsilon_0 > 0$ y (x_n) y (y_n) dos sucesiones de puntos de I, tales que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$$

y

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

para todo natural n.

Sea $\varepsilon = \varepsilon_0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, para toda $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|x_N - y_N| < \delta$. Sin embargo, $|f(x_N) - f(y_N)| \geq \varepsilon_0$, así que no es posible hallar $\delta > 0$ que satisfaga $x, y \in$ I, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para la ε dada. Por consiguiente, la función $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

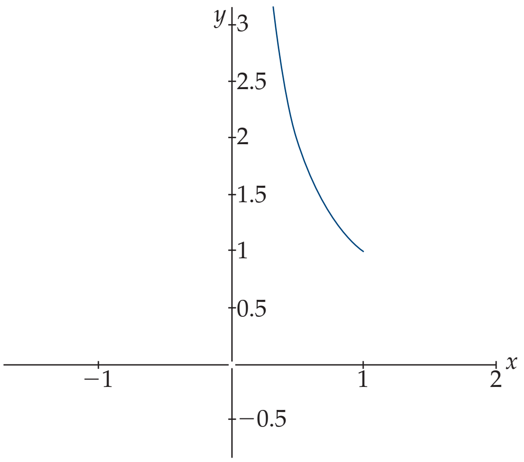
Ahora, supongamos que la función $f : I \to \mathbb{R}$ no es uniformemente continua. Repitiendo la construcción de la prueba del teorema anterior, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo entero $n > 0$ existe un par de puntos x_n y y_n en I, los cuales satisfacen la desigualdad $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y también $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Obviamente se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Luego, las sucesiones (x_n) y (y_n) satisfacen las condiciones requeridas. Esto prueba el teorema.

Ejemplo 35

La función f: $(0, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, no es uniformemente continua.



En efecto, tomemos $\varepsilon_0 = 1$ y para todo natural n sean

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ y } y_n = \frac{1}{n+1}$$

Entonces, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0$$

Por otra parte,

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |n - (n+1)| = 1 \geq \varepsilon_0$$

Por el teorema anterior, la función no es uniformemente continua.

Ejemplo 36

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, no es uniformemente continua, pues si tomamos $\varepsilon_0 = 1$ y

$$x_n = n + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad y_n = n,$$

tenemos

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Por otra parte

$$\left|f(x_n) - f(y_n)\right| = \left|f(n + \frac{1}{n}) - f(n)\right| = \left|(n + \frac{1}{n})^2 - n^2\right| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \geq 2 > \varepsilon_0.$$

Esto prueba que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Nota
Los ejemplos 35 y 36, que recién se expusieron, muestran la importancia de la hipótesis de que el intervalo de continuidad de una función sea cerrado y acotado, para que pueda afirmarse su continuidad uniforme. Así pues, en el ejemplo 34, el intervalo (0, 1) no es cerrado, mientras que en el ejemplo 35, el intervalo no es acotado, pues se trata de $\mathbb{R}$.

5.11.2 Teorema de Weierstrass sobre funciones acotadas

A continuación presentamos otra de las propiedades fundamentales de las funciones continuas, la cual se conoce como teorema de Weierstrass. Este teorema requiere del concepto de cota de una función, mismo que establecemos a continuación.

Definición

Una función f está **acotada superiormente** en un intervalo I, si existe un número real M tal que $f(x) \leq M$ para toda $x \in I$. En este caso, M es una **cota superior** de f. De igual modo, decimos que f está **acotada inferiormente** en I, si existe un número real m tal que $m \leq f(x)$ para toda $x \in I$. A m se le llama una **cota inferior** de f. Decimos que f es una función **acotada** en I si está acotada superior e inferiormente en I, así que existen reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in I$.

Nota
Si f es una función acotada en I, existen por definición reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in I$. Esto equivale a la existencia de un real positivo M tal que $-M \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in I$. Esta última desigualdad también se escribe $|f(x)| \leq M$.

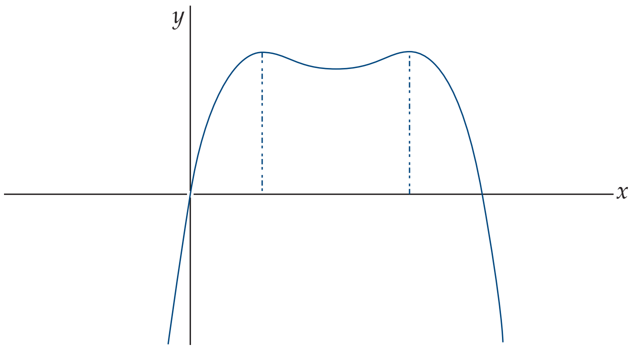
Teorema (de Weierstrass)

Si f es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f es acotada. De hecho, existen puntos x_1, x_2 $[a, b]$, tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

En otras palabras, f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en puntos de $[a, b]$.
La demostración puede consultarse en el apéndice.

Nota
El teorema anterior afirma que una función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene un valor máximo y otro mínimo. Esto no significa que el valor máximo lo alcance solo en un punto del intervalo. Es cierto que hay un único valor máximo, pero este valor puede ser tomado en más de un punto. Un fenómeno similar puede ocurrir con el valor mínimo.



Ejemplo 37

Dado que $1 \leq 1 + x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos $\dfrac{1}{1 + x^2} \leq 1$, luego la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ está acotada superiormente por 1, de hecho está acotada superior e inferiormente pues

$$0 \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Esta función está acotada por cero pero no alcanza un valor mínimo, pues $0 < \dfrac{1}{1 + x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y existen valores de x tales que $f(x)$ estén tan próximos a cero como se desee, pues

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

La función alcanza su valor máximo en $x = 0$ ya que $f(0) = 1$.

Ejemplo 38

Mostremos que la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ está acotada superior e inferiormente. Primero observemos que para todo real x se tiene $2|x| \leq 1 + x^2$. Esta desigualdad se sigue del hecho $0 \leq (|x| - 1)^2$, es decir, $0 \leq 1 - 2|x| + x^2$. Por tanto, tenemos

$$\frac{|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Pero esto significa que se cumple

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2} \text{ para todo real } x.$$

Entonces $-\dfrac{1}{2}$ es una cota inferior y $\dfrac{1}{2}$ es una cota superior de f. Como $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$, f alcanza un valor mínimo en x y un valor máximo en $\dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 39

Como en los dos ejemplos anteriores, la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ está acotada superior e inferiormente, pues para todo real x se cumple

$$0 \leq \frac{x^2}{1 + x^2} \leq 1.$$

Como $f(0) = 0$, f alcanza un valor mínimo en 0, sin embargo f no alcanza un valor máximo, ¿por qué?

Ejemplo 40

La función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ está acotada superior e inferiormente, pues para todo real x se cumple la desigualdad

$$\frac{|x|}{1 + |x|} \leq 1.$$

La cual es equivalente a la desigualdad

$$-1 \leq \frac{x}{1 + |x|} \leq 1.$$

De hecho para todo real x se cumple $|x| < 1 + |x|$, por tanto

$$-1 < \frac{x}{1 + |x|} < \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|}{1 + |x|} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{|x|} + 1} = 1$ la función no tiene valor mínimo ni valor máximo.

5.11.3 Teorema del valor intermedio

Ahora presentamos la tercera propiedad fundamental de las funciones continuas, se le conoce como teorema del valor intermedio. Antes de enunciarlo en su forma general, veamos un caso particular.

Teorema (de Bolzano)

Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Si $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe un punto x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = 0$. Se obtiene la misma conclusión si $f(a) > 0 > f(b)$.

Una manera de decir que $f(a)$ y $f(b)$ tienen diferente signo es mediante la condición $f(a)\,f(b) < 0$, así que podemos formular el teorema anterior en forma más simple.

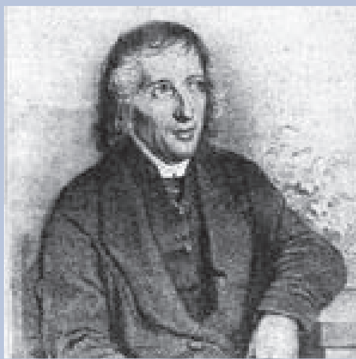
Teorema (de Bolzano)

Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Si $f(a)\,f(b) < 0$, entonces existe un punto x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = 0$.

Demostración

Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Mostremos que existe un punto x_0 en (a, b), tal que $f(x_0) = 0$. Procedamos por

Bernhard Bolzano (1781-1848)



Este filósofo, lógico y matemático checo, nació en Praga en 1781. Su madre era alemana y su padre un anticuario italiano. Después de ordenarse como sacerdote enseñó religión y filosofía en la universidad, pues aun reconociendo su talento matemático, el puesto se lo otorgaron a un candidato que poseía mayor experiencia en la enseñanza que él. Durante su estancia en Praga, Bolzano conoció a Cauchy.

Entre las principales aportaciones de Bolzano a la matemática se cuentan las definiciones rigurosas de continuidad de una función y de derivada que realizó y publicó. Asimismo, estableció con claridad la relación entre continuidad y derivabilidad de una función. En 1817 escribió sus memorias, que llevan por título *Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación.*

contradicción. Si se tuviese $f(x) \neq 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la función $g(x) = \frac{1}{|f(x)|}$ estaría definida y sería continua en todo el intervalo $[a, b]$. Por el teorema anterior, g estaría acotada, es decir, existiría $M > 0$, tal que

$$g(x) = \frac{1}{|f(x)|} \leq M \text{ para toda } x \in [a, b].$$

Así que se tendría $|f(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ para toda $x \in [a, b]$.

Como f es uniformemente continua en $[a,b]$, para $\varepsilon = \frac{1}{M}$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{M}$ siempre que se tenga $|x - y| < \delta$.

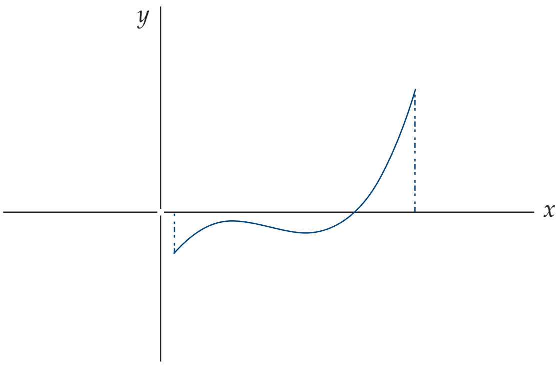
Como en la demostración anterior, sea n tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Los puntos

$$a_0 = a, \ a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ a_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, a_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, \ a_n = b$$

cumplen $|a_k - a_{k-1}| < \delta$ para toda $k = 1, \ldots, n$, así que $|f(a_k) - f(a_{k-1})| < \frac{1}{M}$ y también $|f(a_k) - f(x)| < \frac{1}{M}$ para toda $x \in [a_{k-1}, a_k]$. Como $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe K tal que $f(a_{K-1}) < 0 < f(a_K)$. Por consiguiente, se tiene $f(a_k)| = |f(a_k) - 0| < |f(a_k) - f(a_{k-1})| < \frac{1}{M}$, pero esto contradice la desigualdad $|f(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ que ya teníamos, la cual debería cumplirse para toda $x \in [a, b]$. Esta contradicción se obtiene al suponer $f(x) \neq 0$ para toda $x \in (a, b)$, por tanto, se debe tener que existe algún punto x_0 en (a, b) donde $f(x_0) = 0$. Esto prueba la afirmación cuando $f(a) < 0 < f(b)$.

Para el caso $f(b) < 0 < f(a)$, es suficiente aplicar lo ya probado a la función $g = -f$. Esto prueba el teorema.

Si interpretamos la continuidad de una función como el hecho de que su gráfica no tiene rupturas, el teorema anterior resulta claro desde el punto de vista geométrico. Si en el extremo a el punto de la gráfica se encuentra por abajo del eje x, mientras que en el extremo b, el punto correspondiente se encuentra por arriba, entonces, siendo la gráfica una curva sin rupturas, esta debe cruzar el eje x al menos una vez.



Como podemos percibir, la prueba dista mucho de ser simple. Esta se sustenta en la nada trivial propiedad de continuidad de los reales, que se establece en términos puramente analíticos, no geométricos. Esta reflexión es la que en esencia estableció el matemático alemán Richard Dedekind, quien hacia el último tercio del siglo XIX, mientras enseñaba cálculo en el Politécnico

de Zurich, Suiza, se percató del uso inconsciente que los matemáticos hacían de la continuidad de los reales, basados en su representación como puntos de una recta, a la cual llamamos *recta real*, que dicho sea de paso es un objeto ideal.

El tránsito de la recta real a los números y de los números a la recta real se obviaba y seguramente se miraba como algo natural pues, en apariencia, los matemáticos no se percataban de la necesidad y la carencia de una propiedad formulada en términos puramente analíticos de la continuidad de los reales, que les permitiese sustituir, en sus demostraciones, sus argumentos geométricos por argumentos analíticos. Dedekind fue el primero en percatarse de que hacía falta una formulación de la continuidad de los reales que en algún sentido fuese equivalente a la continuidad geométrica de la recta real; asimismo, también fue el primero en proporcionar esa versión analítica de la continuidad de los reales, lo cual hizo a través de las ahora llamadas *cortaduras de Dedekind*. A partir de entonces se ha descubierto que hay varias propiedades de los reales equivalentes a su continuidad, nosotros hemos adoptado una que no es usual que los autores de los libros de texto la adopten como postulado. Pues, en su lugar, prefieren otras versiones que son equivalentes a la nuestra, la cual se formula simplemente como: toda sucesión de reales, creciente y acotada, superiormente es convergente.

Es importante aclarar que nuestra reflexión no está formulada en el sentido de que en una demostración matemática debamos prescindir de los recursos geométricos, como son las interpretaciones o representaciones gráficas. En el proceso de una prueba matemática, las evidencias geométricas suelen ser fuentes de ideas, pero estas deben ser traducibles a argumentos analíticos.

Las demostraciones anteriores muestran el importantísimo papel que realiza el postulado de continuidad de los números reales. Dicha demostración, ahora está formulada en términos analíticos y es la que distingue a los reales de los racionales.

Una de las aplicaciones más populares del teorema de Bolzano es el cálculo aproximado de raíces de una ecuación $f(x) = 0$. Si se conocen dos reales a y b, tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces se puede afirmar que entre estos reales, a y b, existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Después, se procede a dividir el intervalo con extremos a y b, para aplicar el teorema de Bolzano en un intervalo más corto. De esta manera, se "atrapa" una raíz en intervalos tan pequeños como deseemos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 41

Probemos que la ecuación

$$\frac{1}{32}x^5 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)

Nacido en Brunswick, Alemania, Dedekind se orientó desde edad muy temprana hacia las ciencias físicas. Fue, probablemente, el último alumno de Gauss, quien supervisó su tesis doctoral.

Dedekind es considerado un matemático notable, debido a sus numerosas contribuciones originales a la matemática; por ejemplo, la teoría de los números algebraicos y sus trabajos sobre curvas algebraicas. A él se debe la primera definición abstracta de un grupo finito. Sin embargo, su fama se basa sobre todo en sus *Ensayos sobre la teoría de números*, publicación que data de 1872, en la cual se ocupó principalmente del concepto de continuidad de los números reales.

Dedekind impartió clases de cálculo diferencial e integral en el Politécnico de Zurich, Alemania. Un día, en 1858, mientras estaba en su clase, se percató de que se recurría a la evidencia geométrica para demostrar el siguiente teorema: *toda magnitud que crece de una manera continua pero no sin límite, debe ciertamente aproximarse a un valor límite (toda sucesión creciente y acotada superiormente, converge).* Dedekind fue el primero en dar cuenta de que el concepto de continuidad no había sido bien definido (todavía), pero que además dicho teorema constituía una base suficiente sobre la cual se fundamentaba el análisis.

Debido a ese sentimiento de insatisfacción, se dedicó a buscar el origen de este teorema en la aritmética y, al mismo tiempo, a dar una definición real de la esencia de la continuidad. El 24 de noviembre de 1858 encontró lo que buscaba y él mismo lo declaró en un sus ensayos antes citados.

Insatisfecho con los métodos habituales para introducir los números irracionales, en su lugar propuso "que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma", con lo cual, el problema se reduce, entonces, a establecer en el contexto puramente aritmético la definición de los mismos y, sobre todo, la continuidad de los reales. Dado que la comparación de los números racionales con la recta le lleva al reconocimiento de "agujeros" y, entonces a una cierta discontinuidad de los números, plantea la pregunta: "¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta cuestión y declara que solo mediante ella será posible obtener una base científica para establecer los resultados del cálculo.

tiene al menos tres raíces, es decir, existen al menos tres números reales que la satisfacen. Definamos la función $f(x) = \frac{1}{32}x^5 - \frac{3}{2}x + 1$. Un valor de f que se calcula fácilmente es en $x = 0$. En este caso tenemos $f(0) = 1$, así que $f(0) > 0$.
Para $x = -3$ tenemos $f(-3) = -\frac{243}{32} + \frac{9}{2} + 1 = -\frac{67}{32}$, así que $f(-3) < 0$.
Hemos obtenido

$$f(-3) < 0 < f(0)$$

por tanto, por el teorema de Bolzano, existe un real $-3 < x_1 < 0$ tal que $f(x_1) = 0$.

Por otra parte, $f(1) = -\frac{15}{32} < 0$, entonces tenemos $0 < f(0)$ y $f(1) < 0$ existe un real $0 < x_2 < 1$ tal que $f(x_2) = 0$. Finalmente, para $x = 3$ obtenemos

$$f(3) = \frac{163}{32} > 0,$$

así que $f(1) < 0 < f(3)$, por tanto existe $1 < x_3 < 3$ tal que $f(x_3) = 0$.

Esto prueba que f se anula al menos en los tres puntos x_1, x_2, y x_3.

Ejemplo 42

Probemos que la ecuación

$$x^{51} - 50x^{50} - 1 = 0$$

tiene al menos una raíz. Sea $f(x) = x^{51} - 50x^{50} - 1$ y hallemos dos puntos donde la función toma valores con signos opuestos. Como $f(0) = -1 < 0$, tratemos de hallar un punto a donde tome un valor positivo. Si hacemos $a = 1$, tenemos $f(a) = -50$.

Como podemos intuir, para valores positivos "pequeños" de x, f toma valores negativos debido al coeficiente -50 y a que los exponentes de los dos términos en x son "grandes" y muy similares. Para determinar un valor de x suficientemente grande tal que f tome un valor positivo, escribamos

$$f(x) = x^{51} - 50x^{50} - 1 = x^{50}(x - 50) - 1.$$

De aquí obtenemos fácilmente $f(51) = 51^{50} - 1 > 0$. Entonces tenemos $f(0) < 0 < f(51)$, luego por el teorema de Bolzano existe $0 < a < 51$ tal que $f(a) = 0$.

Ejemplo 43

Pruebe que la ecuación

$$x^3 - 9999x + 1 = 0.$$

tiene al menos tres raíces.

Definamos $f(x) = x^3 - 9999x + 1$. En este caso $f(0) = 1 > 0$. Escribamos

$$f(x) = x^3 - 9999x + 1 = x(x^2 - 9999) + 1.$$

Es claro que para $x = -100$, $f(x) < 0$, de hecho $f(-100) = -99$, así que f tiene una raíz en el intervalo $(-100, 0)$. Es claro que también $f(1) < 0$, así que f tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Por otra parte, $f(100) = 101 > 0$, entonces f tiene una raíz en el intervalo $(1, 100)$. Esto prueba que la función f

se anula en al menos tres puntos y, por tanto, la ecuación $x^3 - 9999x + 1 = 0$ tiene al menos tres raíces.

Ejemplo 44

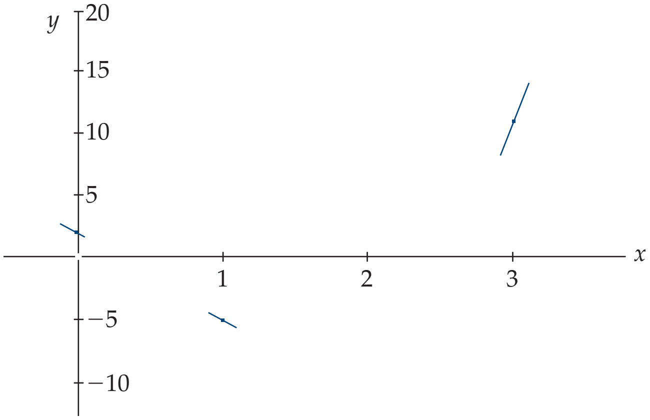
Consideremos la ecuación

$$2x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Definamos la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$. Valuando la función en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$, obtenemos

$$f(0) = 2, f(1) = -5, f(3) = 11.$$

Como $f(0) > 0 > f(1)$, la función f debe anularse en al menos un punto entre 0 y 1. También, como $f(1) < 0 < f(3)$, f debe anularse en un punto entre 1 y 3. En la siguiente gráfica se ilustran pequeños fragmentos de la gráfica alrededor de los puntos (0, 2), (1, −5) y (3, 11).



Ahora, tratemos de aproximarnos a un punto entre 0 y 1 donde se anule la función. Consideremos el punto medio del intervalo [0, 1], es decir $\frac{1}{2}$. El valor de f en este punto es $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$. Como $f(0) > 0 > f\left(\frac{1}{2}\right)$, entonces la función debe anularse en algún punto entre 0 y $\frac{1}{2}$. Consideremos, ahora, el punto medio del intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, es decir $\frac{1}{4}$. Como antes, valuemos f en $\frac{1}{4}$, con lo que obtenemos $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{32} > 0$. Ahora, tenemos $f\left(\frac{1}{4}\right) > 0 > f\left(\frac{1}{2}\right)$, así que la función toma valores con diferente signo en los extremos del intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, por tanto, debe anularse en un punto del intervalo abierto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Tomemos el punto medio del intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, o sea $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$. En este punto tenemos $f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{145}{256} = -0.56640625$. Entonces, la función se anula en algún punto entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$.

Como el punto medio del intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$ es $\frac{5}{16}$ y $f\left(\frac{5}{16}\right) = -0.1069...$, entonces existe un punto entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{16}$ donde f se anula. Continuando con este proceso de bisección de intervalos podemos aproximarnos a un punto del intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}]$, donde la función se anule, es decir, a una raíz de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$.

Este método de bisección de un intervalo nos conduce con rapidez a una aproximación de una raíz en el intervalo inicial [0, 1] con un número de decimales correctos previamente establecido. Por ejemplo, después de 4 bisecciones hemos atrapado una raíz en el intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}]$, la longitud de este intervalo es $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$. Si realizamos otras 6 bisecciones más, localizaremos la raíz en un intervalo de longitud $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0.000976$ y después de realizar 20 bisecciones obtendremos el intervalo $[\frac{312\,261}{1\,048\,576}, \frac{156\,131}{524\,288}] = [\frac{312\,261}{2^{20}}, \frac{312\,262}{2^{20}}]$, cuya longitud es $\frac{1}{2^{20}} \approx 0.000000953$. Dado que hay una raíz de $2x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$ en este intervalo, el extremo $x = \frac{312\,261}{1\,048\,576} = \frac{312\,261}{2^{20}} \approx 0.29779529$ es una aproximación a esta raíz, cuyos primeros 5 decimales coinciden con los primeros cinco decimales de la raíz.



Si bien es cierto que en la actualidad existen poderosas computadoras personales y desarrollados programas de matemáticas propios para estos equipos de cómputo con los cuales podemos calcular aproximaciones a raíces con casi tantos decimales como deseemos, vale la pena indicar que es posible realizar algunos de los cálculos anteriores con una calculadora escolar, que tenga capacidad de sumar, restar, multiplicar y dividir.

Pareciera que el número de decimales no crece con la velocidad deseada, pero el número de decimales correctos crece más rápido de lo que seguramente podemos imaginar. Por ejemplo, con 40 bisecciones obtendremos asombrosamente una aproximación cuyo error es del orden de una billonésima, pues tendrá 12 decimales correctos.

También es posible aplicar este método de bisección iniciando en el intervalo [1, 3], con lo cual encontraremos una aproximación de otra raíz en este intervalo.

Finalizaremos esta sección con un teorema que es una versión generalizada del teorema de Bolzano y dada su importancia en la matemática recibe un nombre especial.

Teorema del valor intermedio

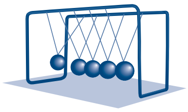
Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y sean $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$. Si y_0 es cualquier número entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$, entonces existe un punto x_0 en (α, β) tal que $f(x_0) = y_0$.

Observe que los casos $f(a) < 0 < f(b)$ y $f(a) > 0 > f(b)$ son situaciones particulares de este teorema.

Parafraseando el teorema del valor intermedio podemos decir que todo número real entre dos valores de una función continua, también es valor de la función.

La propiedad de las funciones continuas enunciada en el teorema del valor intermedio también es conocida como *Propiedad de Darboux*.

5.12 Problemas y ejercicios



Reflexiones sobre la definición de límite

I. Una forma concisa de escribir la definición de límite $\lim_{x \to a} f(x) = A$ es:
Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que
$0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Con base en esta reflexión, responda las siguientes preguntas.

1. Explique por qué el siguiente enunciado es equivalente a la definición de límite.
Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que
$0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - A| \leq \varepsilon$.

2. Explique por qué el siguiente enunciado es equivalente a la definición de límite.
Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que
$0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - A| < 2\varepsilon$.

3. Explique por qué el siguiente enunciado es equivalente a la definición de límite.
Para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$, tal que
$0 < |x - a| < \varepsilon$ implica $|f(x) - A| < \delta$.

4. Demuestre con un ejemplo que el siguiente enunciado es incorrecto.
Para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$, tal que
$0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - A| < \varepsilon$.

5. Demuestre con un ejemplo que el siguiente enunciado es incorrecto.
Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que
$|f(x) - A| < \varepsilon$ implica $0 < |x - a| < \delta$.

6. Pruebe que $\lim_{x \to a} f(x) = A$ si y solo si $\lim_{h \to 0} f(x + h) = A$.

7. Pruebe que $\lim_{x \to a} f(x) = A$ si y solamente si $\lim_{x \to a} \left[f(x) - A \right] = 0$.

8. Si $f(x) = x^3$, halle $\delta > 0$ tal que se cumpla $|f(x) - a^3| < 0.001$, siempre que $|x - a| < \delta$.

9. Si $f(x) = x^4 + 2$, halle $\delta > 0$ tal que se cumpla $|f(x) - f(a)| < 0.1$, siempre que $|x - a| < \delta$.

Reflexiones sobre las propiedades algebraicas de los límites

10. Demuestre con un ejemplo que puede existir $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right]$ sin que necesariamente existan los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$.

11. Pruebe que si existen $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right]$ y $\lim_{x \to a} f(x)$, entonces también existe $\lim_{x \to a} g(x)$.

12. Demuestre con un ejemplo que puede existir $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right]$ sin que necesariamente existan los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$.

13. Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right]$, ¿se puede afirmar que necesariamente existe $\lim_{x \to a} g(x)$?

14. Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para toda x. Suponga que existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, pruebe que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

15. Si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen $f(x) < g(x)$ para toda x y existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿se puede afirmar que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$?

16. Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tales que satisfacen $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Supóngase que existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ y que, además, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$. Pruebe que existe $\lim_{x \to a} h(x)$ y que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x)$.

17. Suponga $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = A$. Pruebe que si $\alpha \neq 0$, entonces $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(\alpha x)}{x} = \alpha A$.

18. Halle $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha x}{x}$.

19. Pruebe que si $\lim_{x \to a} f(x) = A$, entonces $\lim_{x \to a} |f(x)| = |A|$.

20. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \\ 1 \text{ si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Pruebe que para toda $a \in \mathbb{R}$ no existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

21. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \text{ es racional} \\ -x \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Pruebe que existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y que no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ para toda $a \neq 0$.

22. Pruebe que si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 0} f(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Cálculo de límites

I. Halle los siguientes límites.

23. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$

24. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$

25. $\lim_{x \to 1} \frac{x}{1 + x}$

26. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$

27. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$

28. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

29. $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\sqrt{2 - x}}{x^2 - 1}$

30. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

31. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

32. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$

33. $\lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x(x - 2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right]$

34. $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x - 4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right]$

35. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

36. $\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$

37. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1}$, ($m$ entero positivo)

38. $\lim_{x \to 2} \frac{x^m - 2^m}{x - 2}$, ($m$ entero positivo)

39. $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$, ($m$ entero positivo)

40. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, ($m$ y n enteros positivos)

41. $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, ($m$ y n enteros positivos)

42. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$

43. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$

44. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

45. $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$

46. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$

47. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$

48. $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2}{2x + 1} - \frac{(2x - 1)(3x^2 + x + 2)}{4x^2} \right]$

49. $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \ldots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$$

50. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x} - x}$

51. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[5]{x^4+1}}$

52. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3} + \sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1} - x}$

53. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3} - \sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$

54. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$

55. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$

56. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$

57. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$

58. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

59. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, $(x > 0)$

60. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

61. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$

62. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

63. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$, $(a > b)$

64. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$, ($m$ y n enteros positivos)

65. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$

66. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

67. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

68. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}$

69. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

70. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan kx}{x}$

71. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$, $(\beta \neq 0)$

72. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 5x}$

73. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$, $(\beta \neq 0)$

74. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{(\operatorname{sen} x)^n}$, ($n$ entero positivo)

75. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{(\operatorname{sen} x)^m}$, ($m$ y n enteros positivos, $n \geq m$)

76. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

77. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$

78. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x \tan x - \frac{\pi}{\cos x} \right)$

79. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{x}$

80. $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$

81. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{sen} 2x}$

82. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

83. $\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}$

84. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

85. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\tan^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$

86. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{\tan x}\right)$

87. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

88. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos x}$

89. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$

90. $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 2x}$

91. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

92. $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$

93. $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

94. $\lim_{x\to a} \left(\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\tan\frac{\pi x}{2a}\right)$

95. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$

96. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$

97. $\lim_{x\to \pi} \frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right)}$

98. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\tan x-\frac{\pi}{\cos x}\right)$

99. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$

100. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos \alpha x-\cos \beta x}{x^2}$

101. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\tan(a+x)-\tan(a-x)}$

102. $\lim_{\alpha\to \beta} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

103. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$

104. $\lim_{h\to 0} \frac{\tan(a+2h)-2\tan(a+h)+\tan a}{h^2}$

105. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$

106. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\tan x}$

107. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\frac{x}{2}}$

108. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

109. $\lim_{x\to \infty} \frac{(ax-1)^n}{x^n+A}$, ($n$ entero positivo)

110. $\lim_{x\to \pm\infty} x\left(\sqrt{x^2\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$

111. $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$

112.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+3h)-3\operatorname{sen}(a+2h)+3\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} x}{h^3}$$

113.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x\left(\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x+4}-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+6\operatorname{sen} x+2}\right)$$

114. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x(1-\cos x)}{x^4}$

115. $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$

116. $\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

117. $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$

Límites infinitos y límites al infinito

I. Con base en las dos definiciones siguientes, resuelva los problemas que se le plantean.

a) Decimos que $f(x)$ tiende a más infinito cuando x tiende a x_0 y escribimos $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si para todo real M existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) > M$. De igual forma, $f(x)$ tiende a menos infinito cuando x tiende a x_0 y escribimos $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, si para todo real M existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) < M$.

b) Decimos que $f(x)$ tiende a un real ℓ cuando x tiende a $+\infty$ y escribimos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si para toda $\varepsilon > 0$ existe M, tal que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ siempre que se tenga $x > M$. De forma similar, $f(x)$ tiende a ℓ cuando x tiende a $-\infty$ y escribimos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, si para toda $\varepsilon > 0$ existe M, tal que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ siempre que se tenga $x < M$.

118. Pruebe que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

119. Pruebe que si $n \geq m$, existe

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

120. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$?

121. Para $n \geq m$, calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

II. Calcule los siguientes límites.

122. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

123. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

124. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$

125. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

126. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

127. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

128. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$

129.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$$

130. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$

131. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

132. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$

133. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$

134. $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$

135. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

136. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$

137. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

138. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$

139. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

140. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

141. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

142. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

143. $\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

144. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

145. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

146. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

147. $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$

Sobre límites laterales

148. Demuestre que

a) $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(-x) =$

b) $\lim_{x\to 0} f(|\,x\,|) = \lim_{x\to 0+} f(x) =$

149. Pruebe que $\lim_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

150. Pruebe que $\lim_{x\to 0-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

151. Calcule los límites laterales

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}$$

152. Calcule los límites laterales

$$\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0-} e^{-\frac{1}{x}}$$

153. Calcule los límites laterales

$$\lim_{x\to 0-} \tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}$$

y

$$\lim_{x\to 0+} \tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-e^{-\frac{2}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}$$

Sobre funciones continuas

I. Resuelva los siguientes problemas.

154. Pruebe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$.

155. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en $x = 0$ y discontinua en los demás puntos.

156. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ con } p \text{ y } q \text{ primos relativos} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.

157. Construya un ejemplo de una función f definida en $\mathbb{R}$, discontinua en todos los reales, tal que $|f|$ sea continua en $\mathbb{R}$.

158. Pruebe que si f es continua en a, entonces también $|f|$ es continua en ese punto.

159. Sea $a \in \mathbb{R}$. Construya una función definida en $\mathbb{R}$ que sea continua en a y discontinua en los demás puntos.

160. De las siguientes funciones, diga cuáles están acotadas superiormente y cuáles inferiormente y cuáles alcanzan un valor máximo y cuáles un valor mínimo.

a) $f: (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

f) $f(x) = \tan x$, en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = \arctan x$

III. Realice lo que se le pide.

161. Halle dos reales α y β, tales que la ecuación $x^3 - x + 2 = 0$ tenga una raíz en el intervalo $[\alpha$ y $\beta]$.

162. Pruebe que en el intervalo $[0, 2]$, la ecuación $x^4 - 3x + 1 = 0$ tiene dos raíces.

163. Pruebe que la ecuación $x^4 - 5x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos cuatro raíces reales.

164. Pruebe que la ecuación $e^x - 4x^2 = 0$ tiene al menos tres raíces reales.

165. Sea $f: [0, 1] \to [0, 1]$continua. Pruebe que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x)=x$ (f tiene un punto fijo).

166. Pruebe que $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^2$, es uniformemente continua.

167. Pruebe que $f(x) = x^3$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

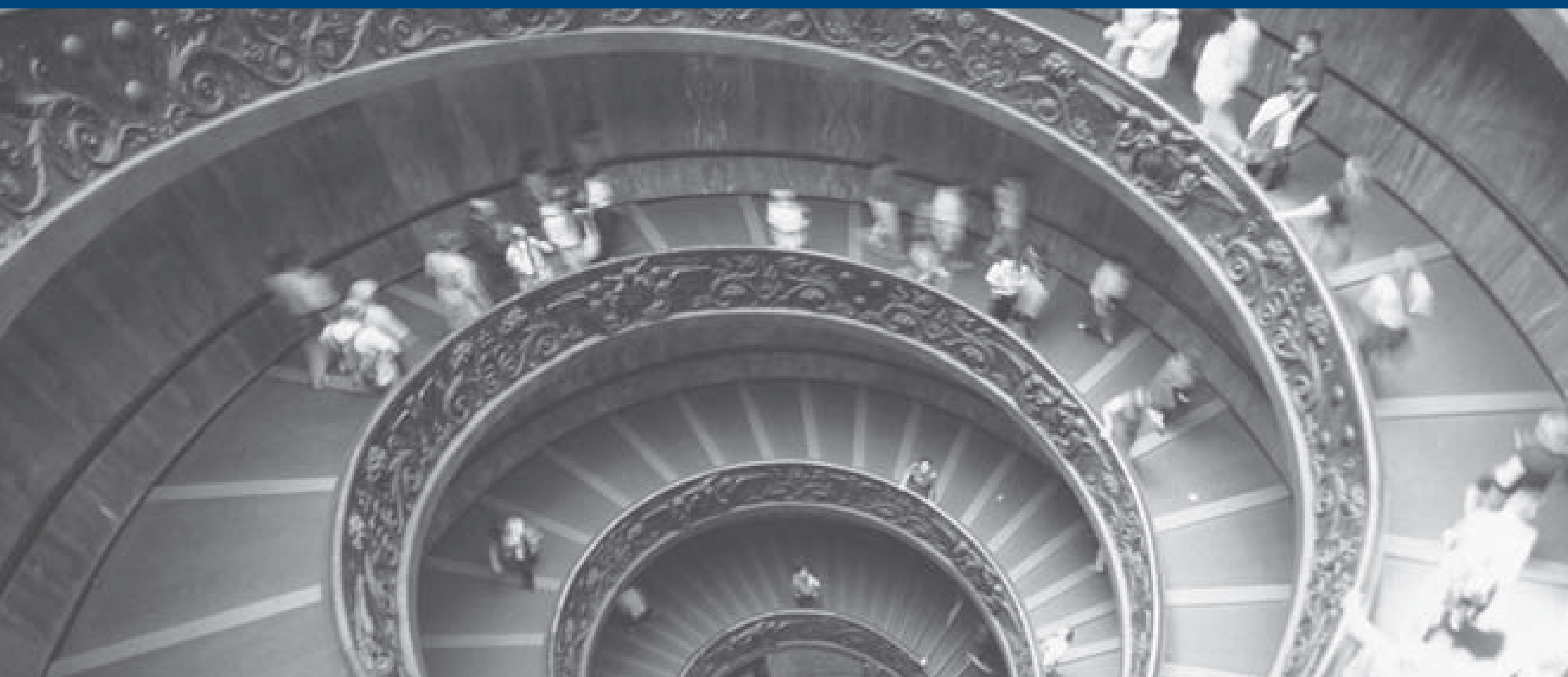
168. Pruebe que $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

169. Pruebe que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

170. Pruebe que $f(x) = \cos x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

CAPÍTULO 6

RAZÓN DE CAMBIO Y DERIVADA



6.1 Razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea

Isaac Newton (1643-1727)



Isaac Newton (1643-1727), físico y matemático inglés, es considerado uno de los más grandes científicos de la historia. Realizó importantes aportaciones en muchos campos de la ciencia. Sus descubrimientos y teorías constituyen la base de gran parte de los avances científicos desarrollados en su época, los cuales siguen vigentes en la actualidad.

Entre sus logros destaca su participación en la creación y el desarrollo del cálculo diferencial e integral, honor que comparte con Leibniz. Además, realizó importantes aportaciones en otras áreas de las matemáticas y la física. A Newton se debe el ahora conocido teorema del binomio o desarrollo binomial.

En el campo de la física destacan sus trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica. Hacia 1679, Newton estableció su ley de la gravitación universal y mostró la compatibilidad entre su ley y las tres leyes de Kepler que gobiernan los movimientos planetarios. Con esto logró demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento de la Tierra son las mismas que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes.

Newton también estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre.

Uno de los conceptos centrales que trata el cálculo diferencial es la razón de cambio de una cantidad respecto de otra. Un caso particular de esta es el concepto de velocidad o rapidez, instantánea. La generalización de esta última tiene una gran variedad de interpretaciones en diversas disciplinas. Antes de establecer dicho concepto, veamos algunos ejemplos.

6.1.1 Caída libre

Desde la época de Galileo y Newton se sabe que la distancia que recorre un cuerpo que cae desde una altura fija está dada por

$$d = \frac{1}{2}\,gt^2.$$

Esta fórmula puede deducirse de la Segunda Ley de Movimiento y de la Ley de la Gravitación Universal, ambas pertenecientes al campo de la física y formuladas por Newton, en donde t representa el tiempo empleado en recorrer la distancia d y g es la llamada constante de gravedad, cuyo valor depende de la altura sobre el nivel del mar y del punto de la Tierra donde nos encontremos. Esto significa que g en realidad no es una constante, su valor depende del punto donde nos encontremos, tanto en la Tierra como en el espacio. Así, por ejemplo, en el sur de la ciudad de México, en el rumbo de ciudad universitaria, una buena aproximación para g es 9. 7792707 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Sin embargo, para simplificar nuestros cálculos aritméticos en esta sección tomaremos el valor 9.8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ para g. Si este valor le parece una aproximación burda de g para la ciudad de México, entonces pensemos que nuestro estudio corresponde a algún otro lugar de la Tierra donde este sea el valor de g, en cuyo caso la ecuación que describe la distancia recorrida es

$$d = \left(4.9\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2.$$

Cuando en esta ecuación sustituimos el valor de t en segundos, obtenemos el valor de d en metros. La distancia recorrida d depende del tiempo transcurrido t, así que d es una función del tiempo y es más conveniente escribir $d(t)$ en lugar de escribir simplemente d. Omitamos las unidades y escribamos esta relación como

$$d(t) = 4.9t^2,$$

en donde debemos entender que t representa el valor numérico del tiempo. Vale decir que la ecuación anterior describe el movimiento del cuerpo.

Al cabo de un segundo, el cuerpo habrá recorrido $d = 4.9(1^2) = 4.9$ metros. Al cabo de dos, habrá recorrido $d = 4.9(2^2) = (4.9) = 19.6$ metros. En el lapso comprendido entre los instantes 1 y 2, el cuerpo habrá recorrido

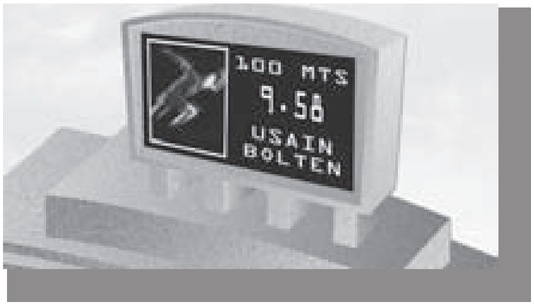
$$4.9(2^2) - 4.9(1^2) = 19.6 - 4.9 = 14.7 \text{ metros.}$$

Durante el primer segundo, el cuerpo recorre 4.9 metros, mientras que durante el segundo intervalo, el cuerpo recorre 14.7 metros. En la tabla siguiente se relacionan las distancias recorridas después de haber transcurrido t segundos, para diversos valores de t.

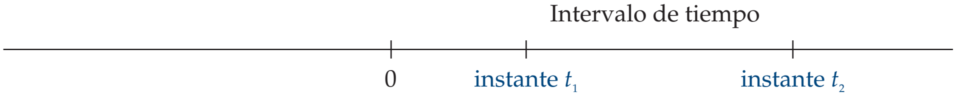
***t* (s)**	1	2	3	4	5	6	7	8
***d*(*t*)(m)**	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5	176.4	240.1	313.6

Es importante distinguir entre un intervalo de tiempo y un instante. No es lo mismo el instante $t = 1$, que el lapso de un segundo comprendido entre los instantes $t = 0$ y $t = 1$. Un segundo puede representar un instante pero también puede corresponder a un lapso o a tiempo transcurrido. El tiempo transcurrido entre los instantes $t = 2$ y $t = 3$ es de un segundo, nuevamente un segundo representa un lapso, no un instante. El intervalo de tiempo comprendido entre los instantes $t = 0$ y $t = 1$ lo denotaremos por [0, 1]. En general, el intervalo de tiempo comprendido entre un instante t_0 y otro posterior t_1 lo denotaremos por $[t_0, t_1]$. Por ejemplo, el intervalo comprendido entre los instantes $t = 4$ y $t = 6$, lo representaremos por [4, 6]. El lapso es el tiempo transcurrido entre los instantes que son los extremos del intervalo.

Es conveniente referirse al lapso transcurrido entre los instantes que son extremos de un intervalo como la longitud de este. Así pues, la longitud del intervalo $[t_0, t_1]$ es $t_1 - t_0$, el cual también tiene unidades de tiempo. Como la longitud de un intervalo, un segundo admite subdivisiones en lapsos más pequeños, por ejemplo podemos hablar de lapsos de $\frac{1}{10}$ de segundo. Asimismo, también podemos subdividir un intervalo en subintervalos más pequeños. Hablar de fracciones de segundo como lapsos ya es muy común en el desarrollo de las competencias de diversas disciplinas de velocidad en los juegos olímpicos o en competencias internacionales. Los tiempos que desarrollan los atletas en esas competencias ahora se miden en centésimas de segundo. Por ejemplo, el récord mundial de los 100 metros planos es de 9.58 segundos, impuesto en 2009 en Berlín por el atleta jamaicano Usain Bolten.



La diferencia entre instante e intervalo de tiempo será más clara si representamos los instantes por puntos en la recta numérica. En esta, los intervalos de tiempo corresponderán a segmentos.



La tabla anterior indica la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo o durante un lapso, medido desde el inicio $t = 0$. Si definimos la posición del cuerpo como su distancia al punto de partida, entonces definimos $d(t)$ como la posición en el instante t. Con esta convención, la fórmula $d(t) = 4.9t^2$ adquiere un nuevo significado, así $d(t)$ nos da la posición del cuerpo en el instante t. En este ejemplo no es tan relevante distinguir entre distancia recorrida y posición,

pero en el ejemplo siguiente veremos que es mejor darle a $d(t)$ la interpretación de posición, que interpretar $d(t)$ como distancia recorrida.

Con la ayuda de la tabla anterior, podemos calcular la distancia recorrida por el cuerpo entre dos instantes cualesquiera de la tabla. Por ejemplo, el cuerpo recorre $176.4 - 78.4 = 98$ metros, durante los dos segundos comprendidos entre los instantes $t = 4$ y $t = 6$. Como sabemos, la velocidad de un cuerpo en movimiento que recorre una distancia d, se define como el cociente que resulta de dividir esta distancia entre el tiempo que emplea en recorrerla. En nuestro ejemplo, el cuerpo emplea dos segundos en recorrer 98 metros, por lo que en ese intervalo de tiempo su velocidad fue de

$$\frac{98\text{ m}}{2\text{ s}} = 49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Este concepto de velocidad, en realidad corresponde a lo que se llama *velocidad promedio o velocidad media*, debido a que el cuerpo no necesariamente lleva esa velocidad durante el viaje que realiza entre los instantes $t = 4$ y $t = 6$. Que la velocidad promedio sea de $49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, significa que en un lapso de un segundo, entre esos dos instantes, el cuerpo recorre aproximadamente 49 m. Por ejemplo, podemos decir que en promedio, en el intervalo comprendido entre los instantes $t = 4$ y $t = 5$ el cuerpo también llevó una velocidad de $49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Usando la tabla de valores también es posible calcular la velocidad promedio en el intervalo comprendido entre los instantes $t = 4$ y $t = 5$, para lo cual calculamos la distancia recorrida entre esos dos instantes. El lapso comprendido entre estos es de un segundo.

$$\text{Velocidad promedio entre los instantes } t = 4 \text{ y } t = 5\text{: } \frac{122.5 - 78.4}{1} = 44.1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esta velocidad promedio es un poco menor que la antes obtenida. La razón de que la primera haya sido mayor se debe a que el cuerpo incrementó su velocidad durante el intervalo $[5, 6]$.

Ahora, calculemos la velocidad promedio en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes $t = 4$ y $t = 4.5$. En este caso, el tiempo empleado es 0.5 s y la distancia recorrida es $d(4.5) - d(4) = 99.225 - 78.4 = 20.825$ m, por lo que tenemos

$$\text{Velocidad promedio entre } t = 4 \text{ y } t = 5\text{: } \frac{d(4.5) - d(4)}{0.5} = \frac{20.825}{0.5} = 41.65\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esta velocidad promedio es la que el cuerpo lleva en el intervalo de tiempo $[4, 4.5]$ y es menor a la que el cuerpo lleva en el intervalo $[4, 5]$.

La velocidad promedio en un intervalo $[t_1, t_2]$ es el cociente que resulta de dividir la distancia recorrida $d(t_2) - d(t_1)$ entre el lapso $t_2 - t_1$, que el cuerpo emplea en recorrerla

$$\text{Velocidad promedio: } \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Este cociente se llama *razón de cambio*, y constituye la razón o el cociente de un cambio de posición entre un cambio de tiempo.

En la siguiente tabla se relacionan las velocidades promedio en diferentes intervalos de tiempo comprendidos entre el instante $t = 4$ y un instante t poco después, los cuales son intervalos de la forma $[4, t]$:

$$\text{Velocidad promedio en } [4, t]\text{: } \frac{d(t) - d(4)}{t - 4}$$

Intervalo $[4, t]$	$[4, 4.4]$	$[4, 4.2]$	$[4, 4.1]$	$[4, 4.05]$	$[4, 4.01]$
Velocidad promedio	$41.16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$40.18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$39.69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$39.445\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$39.249\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

De esta tabla obtenemos, por ejemplo, que en el "pequeño intervalo" [4, 4.01], de longitud un centésimo (de segundo), la velocidad promedio es de 39.249 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Podemos continuar disminuyendo la longitud del intervalo [4, t], tomando valores de t cada vez más cercanos a 4 y con seguridad intuiremos que la velocidad promedio se aproximará cada vez más al valor 39.2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Esto es un hecho que probaremos más adelante. Este valor, que en principio no corresponde a ninguna velocidad promedio, recibe el nombre de *velocidad instantánea* del cuerpo en el instante $t = 4$.

En realidad, para determinar la velocidad instantánea en el instante $t = 4$, también debemos tomar intervalos de la forma [t, 4], donde t representa un instante anterior al instante 4. La siguiente tabla representa los valores de la velocidad media para diferentes intervalos de este tipo

$$\text{Velocidad promedio en } [t, 4]\text{: } \frac{d(4) - d(t)}{4 - t} = \frac{d(t) - d(4)}{t - 4}$$

Intervalo [t, 4]	[3.6, 4]	[3.8, 4]	[3.9, 4]	[3.95, 4]	[3.99, 4]
Velocidad promedio	37.24 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	38.22 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	38.71 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	38.955 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	39.151 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Como en el caso anterior, más adelante probaremos que las velocidades promedio en intervalos de la forma [t, 4] también se aproximarán al mismo valor 39.2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, por lo que diremos que la velocidad instantánea del cuerpo en el instante $t = 4$ es 39.2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

La velocidad instantánea es un concepto, algo ideal, en el límite de velocidades promedio cuando el tiempo o lapso de recorrido tiende a cero. En nuestro caso específico, el tiempo de recorrido para el intervalo [4, t] es $t - 4$ y para el intervalo [t, 4] es $4 - t$. Este tiempo de recorrido lo hacemos tender a cero si hacemos que el extremo t de los intervalos [4, t] y [t, 4] tienda a 4.

Tenemos, entonces, que la velocidad instantánea en el instante $t = 4$ es

$$39.2 = \lim_{t\to 4}\frac{d(t) - d(4)}{t - 4}.$$

En general, la velocidad $v(t_0)$ en cualquier instante t_0 se define como el límite

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

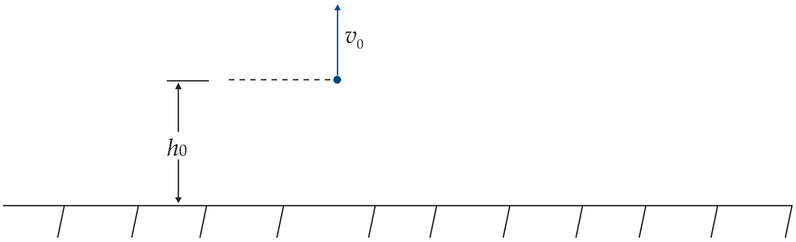
Si sustituimos en esta expresión $d(t) = 4.9t^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{t\to t_0}\frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0}\frac{4.9t^2 - 4.9t_0^2}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0}\frac{4.9(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} \\ &= 4.9\lim_{t\to t_0}\frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} \\ &= 4.9\lim_{t\to t_0}(t + t_0) \\ &= 4.9(2t_0) \\ &= 9.8t_0. \end{aligned}$$

Así que en caída libre, partiendo desde el reposo, la velocidad instantánea en el instante t_0 es $v(t_0) = 9.8t_0$

6.1.2 Tiro vertical de un proyectil

Ahora, supongamos que lanzamos verticalmente hacia arriba un objeto desde una altura h_0, medida sobre la recta vertical a partir del piso. Supongamos que el proyectil se lanza con una velocidad inicial v_0.



Mientras el cuerpo asciende, su velocidad disminuye, deteniéndose en un instante t_m, en el que alcanza una altura máxima h_m. A partir de ese instante t_m, el cuerpo empieza a descender. Determinemos la altura máxima h_m y el tiempo t_m que requiere el proyectil para alcanzarla.

Como en el ejemplo anterior, es un hecho conocido en física que el movimiento del proyectil está descrito por

$$h(t_0) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0.$$

Esta ecuación también se deduce de la Segunda Ley de Newton y de la Ley de Gravitación Universal (también de Newton). En un capítulo posterior, sobre cálculo integral, obtendremos esta ecuación.

Ahora, $h(t)$ no representa una distancia recorrida, sino la posición del objeto, determinada por su distancia al plano horizontal que se encuentra a la altura h_0 , y la cual es medida sobre la recta perpendicular al plano desde el objeto. En este caso es posible que haya dos instantes en los que el cuerpo ocupe la misma posición (un instante cuando el cuerpo está ascendiendo y otro cuando el cuerpo está descendiendo). Es claro que en la ecuación anterior, $h(t)$ toma el valor h_0 en el instante $t = 0$, lo cual concuerda con la suposición de que el objeto se encuentra a una altura inicial h_0.

La velocidad instantánea $v(t_0)$ que lleva el cuerpo en un instante t_0, es definida, como en el ejemplo anterior, mediante el límite

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Si en el cociente $\dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$ sustituimos $h(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0 - \left(-\frac{1}{2}gt_0^2 + v_0t_0 + h_0\right)}{t - t_0} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2) + v_0(t - t_0)}{t - t_0} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}g(t + t_0)(t - t_0) + v_0(t - t_0)}{t - t_0}.
\end{aligned}$$

Así que para toda $t \neq t_0$ tenemos

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = -\frac{1}{2}g(t + t_0) + v_0.$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \left[-\frac{1}{2}g(t + t_0) + v_0 \right]. \end{aligned}$$

O sea

$$v(t_0) = -gt_0 + v_0.$$

Esta fórmula expresa la velocidad instantánea del proyectil en cualquier instante t_0. Por ejemplo, si hacemos $t_0 = 0$, obtenemos $v(0) = v_0$. Dado que t_0 representa cualquier instante, vamos a reemplazarlo por la letra t. Así, tenemos

$$v(t) = -gt + v_0.$$

Observemos que mientras el tiempo transcurre, la velocidad instantánea disminuye, de hecho llega un momento en el que la velocidad vale cero y después toma valores negativos. Que la velocidad sea negativa no significa otra cosa que el hecho de que el cuerpo va en descenso. La velocidad es positiva cuando el cuerpo va en ascenso y es negativa cuando está descendiendo. La fórmula para la velocidad nos permite encontrar el instante en el que el cuerpo llega a su máxima altura, el cual es precisamente el instante en el que la velocidad vale cero; mismo que denotaremos por t_m. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} v(t_m) &= 0 \\ -gt_m + v_0 &= 0 \\ t_m &= \frac{v_0}{g}. \end{aligned}$$

Observemos que a mayor velocidad inicial v_0, al cuerpo le lleva mayor tiempo alcanzar la altura máxima, que denotamos por h_m. Determinemos esa altura sustituyendo el valor obtenido de t_m en la fórmula $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$:

$$\begin{aligned} h_m &= h(t_m) \\ &= -\frac{1}{2}gt_m^2 + v_0 t_m + h_0 \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + h_0 \\ &= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0 \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + h_0. \end{aligned}$$

En esta fórmula verificamos un hecho obvio: a mayor velocidad inicial, mayor altura máxima. En teoría, esta fórmula nos permite calcular la altura máxima para cualquier velocidad inicial v_0 ; sin embargo, para grandes alturas el valor de la gravedad puede variar significativamente, así que la fórmula solo es aplicable, aunque de manera aproximada, para "pequeños rangos" de desplazamiento. Para el caso general donde se permite cualquier velocidad inicial y, por tanto, cualquier altura máxima, se debe tomar en cuenta la variabilidad de la gravedad y el movimiento, que se describe mediante otra ecuación. En ese caso, el valor (variable) de la gravedad puede ser pequeño si el cuerpo asciende a una altura suficientemente grande, de hecho si asciende por una línea recta que una los centros de la Tierra y la Luna, habrá un punto sobre esta donde la fuerza debida a la gravedad combinada es cero.

6.1.3 Disipación del alcanfor blanco

El alcanfor blanco, cuya fórmula química es $C_{10}H_8$, también llamado naftalina, es un sólido blanco que se sublima con facilidad. Para su uso comercial, se produce en forma de pequeñas esferitas, las cuales antiguamente eran usadas para evitar la polilla en los roperos. Mientras el alcanfor se sublima o se disipa, el volumen de las esferas disminuye, así que el volumen es una función del tiempo. Podemos medir la disipación por la cantidad de volumen que se pierde por unidad de tiempo. Si $V(t_0)$ representa el volumen de la esfera en un instante t_0, y $V(t)$ representa el volumen en un instante posterior t, entonces el volumen disipado es $V(t) - V(t_0)$. Esta diferencia es negativa, pues $V(t) < V(t_0)$. La pérdida promedio de volumen por unidad tiempo en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, es entonces

$$\frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

El cociente anterior es una razón de cambio promedio y en este caso se trata de una cantidad negativa. La razón de cambio instantánea, en el instante t_0 es un límite.

Razón de cambio instantánea del volumen en el instante t_0:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

Es natural suponer que la disipación de la esfera dependa de manera directa del área o la superficie expuesta a la intemperie. Esto significa que la razón de cambio con la que disminuye el volumen respecto del tiempo, es proporcional a la superficie de la esfera. Esta ley de disipación se traduce en

$$\lim_{t\to t_0}\frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} = kS(t_0).$$

donde k es una constante de proporcionalidad, con valor negativo, que podemos determinar de forma experimental.

Supongamos que la esfera de naftalina tiene originalmente un radio $R = 1$ cm, así que el volumen original es $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi$ cm^3. Denotemos por $r(t)$, el radio de la esfera en cualquier instante t mientras se sublima, entonces

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

La superficie de la esfera es $S(t) = 4\pi r^2(t)$. Tenemos entonces

$$\lim_{t\to t_0} \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} = kS(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\frac{4}{3}\pi\, r^3(t) - \frac{4}{3}\pi\, r^3(t_0)}{t - t_0} = 4k\pi\, r^2(t_0).$$

Simplificando los coeficientes obtenemos

$$\frac{1}{3}\lim_{t\to t_0} \frac{r^3(t) - r^3(t_0)}{t - t_0} = k\, r^2(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{r^3(t) - r^3(t_0)}{t - t_0} = 3k\, r^2(t_0).$$

Así que nuestra hipótesis de disipación se traduce en:

La razón de cambio del cubo del radio es proporcional al triple del cuadrado del radio.

En la siguiente sección veremos que esta condición nos permite determinar el radio $r(t)$ como función del tiempo, de hecho también veremos que

$$r(t) = 1 + kt.$$

así que $V(t) = \frac{4}{3}\pi\,(1+kt)^3$.

6.1.4 Desintegración radiactiva del uranio 238

El núcleo de un átomo está formado por protones y neutrones. El número atómico es el número de protones, mientras que el peso atómico es la suma de los números de protones y neutrones. En general, los elementos químicos están formados por átomos del mismo número atómico pero de diferente peso atómico, lo cual significa que los átomos tienen diferentes números de neutrones. Cada una de estas clases de átomos, correspondientes a los diferentes pesos atómicos, da lugar a los diferentes isótopos de un elemento químico, los cuales tienen el mismo número atómico pero se distinguen por su peso atómico particular. El número de neutrones es característico de cada isótopo. La palabra isótopo proviene del griego y significa *el mismo sitio*, lo que significa que esos diferentes elementos químicos ocupan un lugar en el mismo grupo (en el mismo sitio) en la tabla periódica.

En la ciencia química, los isótopos se denotan por el nombre del elemento químico seguido de su peso atómico. Por ejemplo, hay tres diferentes tipos de isótopos de uranio: U^{238}, U^{235}, U^{234}. Por lo regular se escriben U^{238}, U^{235} y U^{234} o bien ^{238}U, ^{235}U y ^{234}U. Así pues, el uranio natural de número atómico 92 está formado por estos tres tipos de isótopos.

El uranio fue descubierto en 1789 por el químico alemán Martin Heinrich Klaproth, quien le puso este nombre en honor al planeta urano, el cual apenas había sido descubierto en 1781. En cada gramo de uranio natural, 99.28% es U^{238}, 0.71% es U^{235} y 0.01% es U^{234}. Un isótopo radiactivo se caracteriza por tener un núcleo inestable, esto se debe a la diferencia entre los números de protones y neutrones, provocando que el isótopo se transforme de manera natural en elementos

más estables, proceso durante el cual se libera energía de diferentes formas: rayos α (núcleos de helio), rayos β (electrones) y rayos γ (energía electromagnética). A este proceso de transformación, que es sumamente lento, le llamaremos decaimiento, debido a que durante el mismo decae la cantidad de uranio. En el decaimiento del uranio 238 se produce helio y plomo, este último permanece junto con el uranio no transformado.

Una de las características del decaimiento es lo que se llama vida media del isótopo, que es el tiempo que requiere una cantidad de masa del elemento químico en reducirse a la mitad. La vida media del isótopo U^{238} es de 4 500 millones de años (la vida de la Tierra).

Cuando el uranio contenido en las rocas, producidas por la solidificación de la lava en una erupción volcánica, comienza a decaer, el plomo se deposita en las rocas junto con el uranio. Los científicos pueden estimar el tiempo que ha transcurrido desde que se formó la roca, por la proporción de plomo en el uranio contenido en estas.

Si $x(t)$ representa la cantidad de uranio en cualquier instante t, entonces la razón de cambio instantánea de $x(t)$ respecto del tiempo, en el instante t_0 es

$$\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}.$$

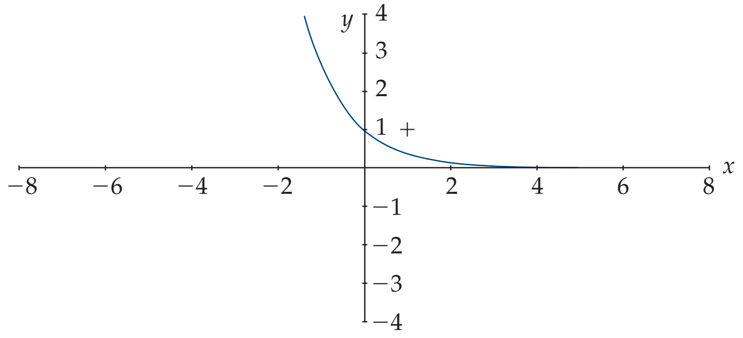
En este caso se supone (y es natural hacer tal suposición) que la razón de cambio de la masa de uranio respecto del tiempo es proporcional a la cantidad de uranio presente. Esto significa que

$$\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = kx(t_0).$$

Como en el ejemplo anterior, k es una constante de proporcionalidad que resulta ser un número negativo, pues $x(t) < x(t_0)$ cuando $t > t_0$. Más adelante mostraremos que la función $x(t)$ tiene que ser de la forma

$$x(t) = x_0 e^{kt},$$

en donde x_0 es la cantidad de masa inicial del elemento químico. La exponencial con exponente negativo refleja el decaimiento de $x(t)$ y la velocidad de decaimiento, que es la razón de cambio instantánea de la cantidad de masa respecto del tiempo, depende de la constante k.



6.2 La derivada

Después de estudiar los ejemplos anteriores, con seguridad comprenderemos la gran importancia que tiene el concepto de razón de cambio instantánea en la aplicación de las matemáticas a las ciencias físicas y a las ciencias naturales, así como para muchas otras disciplinas. La razón de

cambio de una cantidad respecto de otra, está presente en muchos contextos. Por otra parte, generalizaremos el concepto de razón de cambio instantánea a situaciones en las que el tiempo no es necesariamente la variable independiente; en esos casos, será más propio hablar de razón de cambio en un punto dado y no de razón de cambio en un instante. Sin embargo, y abusando un poco del lenguaje, hablaremos de razón de cambio instantánea, aun cuando la variable independiente no sea el tiempo, y le daremos un nombre especial. Esto lo hacemos en la siguiente definición.

Definición

Sea $y = f(x)$ una función y x_0 un punto de su dominio. Si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

diremos que f es **derivable** en el punto x_0 y que tal límite se llama la **derivada** de f en x_0, la cual se denota por cualquiera de los símbolos

$$f'(x_0), \ \frac{df}{dx}(x_0) \ \text{ o } \ Df(x_0).$$

También suelen usarse las notaciones (sobre todo en física e ingeniería)

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}, \ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \ \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \ \text{o bien} \ \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

para la derivada de f en x_0.

Nota

No obstante que se trata de un hecho obvio, es importante observar que para hablar de la derivada $f'(x_0)$, primero debemos asegurarnos de la existencia del límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

De hecho, existen funciones para las cuales hay puntos donde no existe el límite; dicho en otras palabras, hay funciones que no son derivables en al menos un punto de su dominio. Más adelante, estudiaremos algunos ejemplos que ilustran esta situación y también veremos ejemplos de funciones que son derivables ¡solo en un punto de su dominio!

6.2.1 Derivadas laterales

La derivada de una función f en un punto a es por definición el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Cuando hablamos de la derivada $f'(a)$ de una función f en un punto, suponemos implícitamente que f está definida en una vecindad abierta de a, es decir, está definida en un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$. Supongamos ahora que la función está definida en un intervalo de la forma $[a, a + r)$. En este caso, podemos hablar del límite lateral derecho

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Cuando este límite existe, le llamamos la **derivada lateral derecha** de f en el punto a y le denotamos por $f'(a+)$. Similarmente, definimos la **derivada lateral izquierda** como el límite

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

y la denotamos por $f'(a-)$.

Se concluye inmediatamente de las propiedades de los límites el siguiente teorema:

Teorema

Una función f es derivable en un punto a si y solo si existen las derivadas laterales $f'(a+)$ y $f'(a-)$ y son iguales, en cuyo caso $f'(a)=f'(a+)=f'(a-)$.

Ejemplo 1

La función $f(x) = |x|$ f tiene derivadas laterales en $a = 0$ pero no es derivable. En efecto, para toda $x > 0$ se tiene

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1.$$

Por tanto

$$f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1.$$

Por otra parte, para $x < 0$ se tiene

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$$

Por tanto

$$f(0-)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1.$$

Como las derivadas laterales $f'(0+)$ y $f'(0-)$ son diferentes, f no es derivable en cero.

Ejemplo 2

Sea $f(x)=|\text{sen } x|$. Mostremos que existen las derivadas laterales $f'(0+)$ y $f'(0-)$ y que son diferentes, por lo que f no será derivable en cero.

Para toda $0<x<\pi$ se tiene $\text{sen } x > 0$ y entonces

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|\text{sen } x|}{x}=\frac{\text{sen } x}{x}.$$

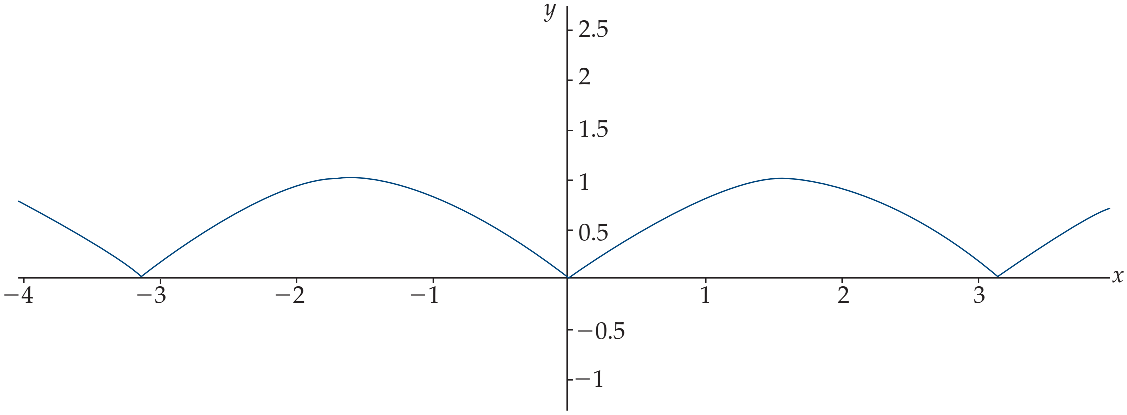
Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\text{sen } x}{x}=1.$$

Por otra parte, para $-\pi < x < 0$ se tiene sen $x < 0$, por tanto

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen }x}{x}=-\lim_{x\to 0-}\frac{\text{sen }x}{x}=-1.$$

Esto significa que $f'(0+)=1$ y $f'(0-)=-1$, por lo que $f(x)=|\text{sen }x|$ no es derivable en cero.



Definición

Si una función f es derivable en cada punto de un conjunto A, subconjunto de su dominio, diremos que *f es derivable en A*. Si una función f está definida en un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$, diremos que *f es derivable en* $[a, b]$ si es derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b) y existen las derivadas laterales $f'(a+)$ y $f'(b-)$.

La derivada de una función f en un punto x_0 es, por definición, una razón de cambio instantánea y no una razón de cambio promedio en un intervalo. La razón de cambio instantánea se refiere a un punto, por esta razón diremos que la derivada es un *concepto puntual* y la *derivabilidad* es una *propiedad puntual*, pues se refiere a una propiedad de la función f en un punto x_0.

Apliquemos la definición anterior a algunas funciones particulares. En los ejemplos que analizamos en la sección razón de cambio instantánea ya obtuvimos la derivada de algunas funciones; veamos esos casos.

En el ejemplo sobre caída libre, la derivada en t_0 de la función desplazamiento $d(t) = 4.9t^2$ era la velocidad instantánea $v(t_0)$ del objeto en caída. Ahora, con nuestra nueva notación escribimos

$$\begin{aligned}
d'(t_0) &= \lim_{t\to t_0}\frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}\\
&= \lim_{t\to t_0}\frac{4.9t^2-4.9t_0^2}{t-t_0}\\
&= \lim_{t\to t_0}\frac{4.9(t^2-t_0^2)}{t-t_0}\\
&= 4.9\lim_{t\to t_0}\frac{(t-t_0)(t+t_0)}{t-t_0}\\
&= 4.9\lim_{t\to t_0}(t+t_0)\\
&= 4.9(2t_0)\\
&= 9.8t_0.
\end{aligned}$$

A partir de lo desarrollado en el ejemplo sobre tiro vertical, podemos concluir que la derivada de la función

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

en el punto t_0 es

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= \lim_{t\to t_0}\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0}\left[-\frac{1}{2}g(t + t_0) + v_0\right] \\ &= -gt_0 + v_0. \end{aligned}$$

Por su parte, en el ejemplo sobre el alcanfor blanco, la ley de sublimación

$$\lim_{t\to t_0}\frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} = kS(t_0)$$

se traduce como

$$V'(t_0) = kS(t_0),$$

la cual, a su vez, se transforma en

$$\lim_{t\to t_0}\frac{r^3(t) - r^3(t_0)}{t - t_0} = 3kr^2(t_0).$$

Donde $r(t)$ es el radio de la esfera (función del tiempo). Esto también se escribe

$$\frac{dr^3}{dt}(t_0) = 3kr^2(t_0)$$

o bien

$$(r^3)'(t_0) = 3kr^2(t_0).$$

En el ejemplo sobre la radiación del uranio 238, la hipótesis de decaimiento de la función $x(t)$, que representa la masa de este, satisface la condición

$$\lim_{t\to t_0}\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = kx(t_0).$$

Esta condición se traduce en

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = kx(t_0).$$

6.3 Cálculo de la derivada de algunas funciones elementales (parte 1)

En principio, para calcular derivadas es necesario adquirir destreza en el cálculo de límites. El problema siempre consistirá en calcular límites de funciones $F(x)$ que tienen la forma particular

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dado que se trata de calcular el límite en x_0 de una expresión con esta forma, los límites tendrán propiedades o fórmulas especiales. En una sección posterior estableceremos tales fórmulas, pero por el momento obtengamos algunas derivadas para algunas funciones básicas muy importantes.

Ejemplo 3

Función constante

Una función constante es cualquier función f que satisface $f(x) = c$ para todo real x, donde c es un número real. Si x_0 es cualquier real (punto fijo del dominio de f), tenemos, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \text{ para toda } x \neq x_0.$$

Por tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Es decir

$$f'(x_0) = 0 \text{ para cualquier valor de } x_0.$$

Ejemplo 4

Función identidad

Sea la función $f(x) = x$ y x_0 cualquier real fijo. Entonces, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \text{ para toda } x \neq x_0.$$

Por consiguiente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Así pues, tenemos

$$f'(x_0) = 1 \text{ para cualquier valor de } x_0.$$

Ejemplo 5

Función lineal

Sea $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes. Sea x_0 cualquier real fijo. Tenemos, entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} \\ &= \frac{ax - ax_0}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= a\end{aligned}$$

para toda $x \neq x_0$. Por tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a.$$

Así pues, tenemos

$$f'(x_0) = a \text{ para cualquier valor de } x_0.$$

Ejemplo 6

Sean $f(x) = x^2$ y x_0 cualquier real fijo. Tenemos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= x + x_0 \end{aligned}$$

para toda $x \neq x_0$. Por consiguiente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Así que tenemos

$$f'(x_0) = 2x_0 \text{ para cualquier valor de } x_0.$$

Ejemplo 7

Sean $f(x) = x^3$ y x_0 cualquier real fijo. Tenemos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= x^2 + x_0 x + x_0^2 \end{aligned}$$

para toda $x \neq x_0$. Por tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [x^2 + x_0 x + x_0^2] = 3x_0^2 .$$

Así que tenemos

$$f'(x_0) = 3x_0^2 \text{ para cualquier valor de } x_0.$$

6.3.1 Derivada de $f(x) = x^r$

Generalicemos los resultados de los dos ejemplos anteriores. Usando la definición, derivaremos $f(x) = x^r$, donde r es un racional. Iniciemos con el caso simple, en el que r es un entero.

Sea $f(x) = x^n$, donde n es cualquier entero positivo y x_0 es cualquier real fijo. Tenemos, entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}\end{aligned}$$

para toda $x \neq x_0$, observemos que la expresión $x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}$ tiene n sumandos, por tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}] = n x_0^{n-1}.$$

Así pues, tenemos

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1} \text{ para cualquier valor de } x_0.$$

Ahora, consideremos r un entero negativo. Veamos primero el caso especial $r = -1$.

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Esta función está definida en todos los reales diferentes de cero. Mostremos que es derivable en cada uno de los puntos de su dominio. Sea $x_0 \neq 0$. Tenemos para cada $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{\frac{x_0 - x}{x_0 x}}{x - x_0} \\ &= \frac{x_0 - x}{x_0 x (x - x_0)} \\ &= -\frac{1}{x_0 x}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{1}{x_0 x} \right) \\ &= -\frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{x_0^2}.\end{aligned}$$

De esta forma, si $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ entonces $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$, para toda $x_0 \neq 0$.

Sea ahora, r un entero negativo, digamos $r = -n$. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x^n}$ son todos los reales excepto el cero. Probemos que es derivable en cada $x_0 \neq 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} \\ &= \frac{x_0^n - x^n}{x_0^n x^n (x - x_0)} \\ &= -\frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1})}{x_0^n x^n (x - x_0)} \\ &= -\frac{x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}}{x_0^n x^n}.\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}}{x_0^n x^n} \right) \\ &= -\frac{n x_0^{n-1}}{x_0^{2n}} \\ &= -n \frac{1}{x_0^{n+1}} \\ &= -n x_0^{-n-1}.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que si $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x_0) = -\ n x_0^{-n-1}$ para todo $x_0 \neq 0$.

Consideremos en este momento a r un racional positivo. Estudiemos primero el caso especial $r = \frac{1}{m}$.

Sea, entonces, $f(x) = \sqrt[m]{x}$, donde m es cualquier entero positivo. Esta función está definida para $x \geq 0$, si m es un entero par, mientras que si m es impar, está definida para toda x.

Mostremos que para m par, $f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ es derivable en toda $x_0 > 0$, y que si m es impar, la función es derivable en toda $x_0 \neq 0$. En ambos casos, la función es no derivable en $x_0 = 0$.

En cualquiera de los casos, sea $x_0 \neq 0$. Ahora factorizaremos la diferencia $x - x_0$, interpretándola como diferencia de m-ésimas potencias $x - x_0 = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m - \left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^m$:

$$x - x_0 = \left(x^{\frac{1}{m}} - x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} + \left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} + \left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-3} + \cdots + \left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right) + \left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}\right).$$

Entonces, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{x_0}}{x-x_0}\\
&= \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{x_0}}{\left(\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{x_0}\right)\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}\right)}\\
&= \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{x_0}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}\\
&= \frac{1}{m\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}\\
&= \frac{1}{m\,x_0^{\frac{m-1}{m}}}\\
&= \frac{1}{m}\frac{1}{x_0^{1-\frac{1}{m}}}.
\end{aligned}
$$

De donde tenemos

$$
f'(x_0) = \frac{1}{m}\frac{1}{x_0^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}x_0^{\frac{1}{m}-1}
$$

para toda $x_0 > 0$ si m es par y toda $x_0 \neq 0$ si m es impar.

Para el caso $x_0 = 0$, el cociente

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{x_0}}{x-x_0}\\
&= \frac{\sqrt[m]{x}}{x}\\
&= \frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}
\end{aligned}
$$

no tiene límite. Esto significa que la función $f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ no es derivable en $x_0 = 0$.

Si $r = \dfrac{n}{m}$, donde m y n son enteros positivos primos relativos, la función $f(x) = (\sqrt[m]{x})^n = x^{\frac{n}{m}}$ está definida en todos los reales si m es impar y en todos los reales no negativos si m es par. Veamos en qué puntos es derivable. Sea x_0 un punto del dominio correspondiente. De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{x^{\frac{n}{m}}-x_0^{\frac{n}{m}}}{x-x_0}\\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n-\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^n}{x-x_0}\\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left[\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\right]}{x-x_0}\end{aligned}$$

Para eliminar la indeterminación, factorizaremos el denominador $x - x_0$ como en el caso anterior. Interpretemos $x - x_0$ como diferencia de potencias $x-x_0=\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m-\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^m$. Tenemos, entonces, para toda $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}\frac{x^{\frac{n}{m}}-x_0^{\frac{n}{m}}}{x-x_0} &= \frac{\left(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left[\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\right]}{x-x_0}\\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left[\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\right]}{\left(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left[\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}\right]}\\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}}{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}.\end{aligned}$$

De donde, si $x_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}}{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}+\cdots+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)+\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{n\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}}{m\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}\\ &= \frac{n}{m}\left(x_0^{\frac{1}{m}}\right)^{n-m}\\ &= \frac{n}{m}x_0^{\frac{n-m}{m}}\\ &= \frac{n}{m}x_0^{\frac{n}{m}-1}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que si m y n son enteros positivos, entonces $f(x) = (\sqrt[m]{x})^n = x^{\frac{n}{m}}$ es derivable en todo punto de su dominio $x_0 \neq 0$. Además, $f'(x_0) = \frac{n}{m} x_0^{\frac{n}{m}-1}$.

Cuando $n > m$ y $x_0 = 0$, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^{\frac{n}{m}}}{x} = x^{\frac{n}{m}-1}.$$

Así que en este caso existe

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x^{\frac{n}{m}-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, para el caso $n > m$ existe la derivada de $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ en todo real x_0 de su dominio, incluyendo $x_0 = 0$.

El caso r, un racional negativo, se deja como ejercicio para el lector. En este caso, la función $f(x) = x^{-\frac{n}{m}}$, donde m y n son enteros positivos, es derivable en todo punto de su dominio x_0. Además, $f'(x_0) = -\frac{n}{m} x_0^{-\frac{n}{m}-1}$.

Observemos que las fórmulas para las derivadas de las funciones x^n, x^{-n} y $\sqrt[m]{x}$ incluyen los casos particulares x, x^2, x^{-1} y $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Todas las fórmulas anteriores pueden escribirse de manera unificada; de hecho, tenemos el resultado general.

Sea $f(x) = x^r$, donde r es cualquier entero positivo, negativo o cero o cualquier racional, entonces la derivada en los puntos donde $f(x)$ es derivable está dada por

$$f'(x) = rx^{r-1}.$$

6.3.2 Derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$

Veamos que esta función es derivable en cualquier punto x_0, para lo cual tenemos que mostrar que existe el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}.$$

Aplicando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0}\\ &= \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}\\ &= \cos\frac{x+x_0}{2}\;\frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}.\end{aligned}$$

En el capítulo 5, probamos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1,$$

de donde obtenemos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = 1.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\cos\frac{x+x_0}{2}\;\frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\cos\frac{x+x_0}{2}\right]\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\right]\\ &= \cos x_0.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$f'(x_0) = \cos x_0 \text{ para toda } x_0 \in \mathbb{R}.$$

6.3.3 Derivada de $f(x) = \cos x$

Esta función, como la función seno, es derivable en cualquier real x_0. En efecto, aplicando ahora la identidad

$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0}\\ &= \frac{-2\operatorname{sen}\dfrac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-x_0}{2}}{x-x_0}\\ &= -\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\;\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}\\ &= -\lim_{x\to x_0}\left[\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\right]\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\right]\\ &= -\operatorname{sen} x_0.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$f\,'(x_0) = -\operatorname{sen} x_0 \text{ para todo real } x_0.$$

6.3.4 Derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$

La función $f(x) = e^x$ está definida para todos los reales y ya hemos estudiado algunas de sus propiedades; por ejemplo, sabemos que es una función continua, creciente y, por tanto, invertible. Su función inversa es logaritmo natural $\log x$. Probemos que es derivable en cualquier punto x_0 y que su derivada es $f(x_0) = e^{x_0}$, lo cual significa que $f\,'(x_0) = f(x_0)$.

Debemos probar que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}.$$

De las leyes de los exponentes, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}\\ &= e^{x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}\end{aligned}$$

Hagamos

$$h = e^{x-x_0}-1.$$

Entonces, tenemos

$$e^{x-x_0} = 1 + h$$
$$x - x_0 = \log(1 + h).$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= e^{x_0}\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= e^{x_0}\frac{h}{\log(1 + h)} \\ &= e^{x_0}\frac{1}{\frac{\log(1 + h)}{h}} \\ &= e^{x_0}\frac{1}{\log\left((1 + h)^{\frac{1}{h}}\right)}. \end{aligned}$$

Observemos que de la continuidad de la función exponencial tenemos

$$\lim_{x \to x_0} h = \lim_{x \to x_0} (e^{x-x_0} - 1) = 0.$$

Por otra parte, de la definición del número e tenemos

$$e = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

y de la continuidad de la función logaritmo obtenemos

$$\lim_{h \to 0}\log(1 + h)^{\frac{1}{h}} = \log\left(\lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}}\right) = \log e = 1.$$

Por consiguiente

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = e^{x_0}\lim_{h \to 0}\frac{1}{\log\left((1 + h)\right)^{\frac{1}{h}}} = e^{x_0}.$$

De esta forma, tenemos que si $f(x) = e^x$, entonces

$$f'(x_0) = e^{x_0} \text{ para todo real } x_0.$$

6.3.5 Derivada de la función logaritmo natural $f(x) = \log x$

La función $f(x) = \log(x)$ está definida para todos los reales positivos. Mostremos que es derivable en todo positivo x_0 y que además su derivada en ese punto es igual a $\frac{1}{x_0}$. Así pues, debemos probar

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Para lograrlo, hagamos $h = x - x_0$. Tenemos, entonces, $x = h + x_0$. Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\log x - \log x_0}{x-x_0}\\ &= \frac{\log(h+x_0)-\log x_0}{h}\\ &= \frac{\log\left(\frac{h+x_0}{x_0}\right)}{h}\\ &= \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}\\ &= \frac{1}{x_0}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\end{aligned}$$

De la definición del número e y de la continuidad de la función logaritmo, tenemos

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}} = e$$

$$\lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}} = \log\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right) = \log e = 1.$$

Por tanto, obtenemos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}} = \frac{1}{x_0}.$$

Así

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0}\text{, para toda } x_0 \text{ positiva.}$$

Enseguida, presentamos un resumen de los resultados de los casos anteriores, indicando en qué puntos se aplican las fórmulas.

$f(x) = c,$	$f'(x) = 0$	x real.
$f(x) = x,$	$f'(x) = 1$	x real.
$f(x) = ax + b,$	$f'(x) = a$	x real.
$f(x) = x^2,$	$f'(x) = 2x$	x real.

$f(x) = x^n$ (n entero positivo),	$f'(x) = nx^{n-1}$	x real.
$f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$,	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$.
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ (n entero positivo),	$f'(x) = -nx^{-n-1}$	$x \neq 0$.
$f(x) = \sqrt{x}$,	$f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x > 0$.
$f(x) = x^{\frac{1}{m}}$ (n entero positivo),	$f'(x) = \dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$	$x \neq 0$, m impar, $x > 0$, m par.
$f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ (m, n enteros positivos),	$f'(x) = \dfrac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$	$x > 0$, m par, $x \neq 0$, m impar.
		(En ambos casos se incluye $x = 0$, si $n > m$.)
$f(x) = x^{-\frac{n}{m}}$ (m, n enteros positivos),	$f'(x) = -\dfrac{n}{m}x^{-\frac{n}{m}-1}$	$x > 0$, m par, $x \neq 0$, m impar.
$f(x) = \text{sen}\, x$,	$f'(x) = \cos x$	$x \neq 0$.
$f(x) = \cos x$,	$f'(x_0) = -\text{sen}\, x$	$x \neq 0$.
$f(x) = \log x$,	$f'(x_0) = \dfrac{1}{x}$	$x > 0$.
$f(x) = e^x$,	$f'(x_0) = e^{x_0}$	x real.

6.4 Fórmulas o reglas de derivación

Las fórmulas que obtuvimos en la sección anterior serán la base para calcular derivadas de funciones más complicadas, pero vamos a requerir reglas generales de derivación. Para establecer dichas reglas o fórmulas generales, será necesario el siguiente teorema.

Teorema

Si una función $f(x)$ es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración

Primero, recordemos que $f(x)$ sea continua en x_0 significa que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

o, de forma equivalente

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) = 0.$$

Por definición, que $f(x)$ sea derivable en x_0 significa que existe el límite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Para probar $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$, escribamos

$$f(x) - (x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

igualdad obvia que vale para toda $x \neq x_0$.

Por tanto, dado que cada uno de los factores del miembro derecho tiene límite en x_0, el producto lo tendrá en ese punto y además

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto significa que $f(x)$ es continua en x_0. Hemos probado el teorema.

6.4.1 Derivada del producto de una constante por una función

Sean $f(x)$ una función derivable en un punto x_0 y α una constante. Entonces, la función $(\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$ es derivable en x_0 y la derivada está dada por $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

Demostración

Para probar la derivabilidad de la función $(\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$ en x_0, debemos probar que existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0}.$$

Así, tenemos

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\alpha\, f(x) - \alpha\, f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \alpha \; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \left(\lim_{x \to x_0} \alpha \right) \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \alpha f'(x_0).
\end{aligned}$$

Esto prueba que αf es derivable en x_0 y $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

6.4.2 Derivada de la suma de dos funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un mismo punto x_0. Entonces, la función suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ es derivable en x_0 y además

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demostración

Para probar la derivabilidad de la función suma $(f+g)(x)$ en x_0 debemos probar la existencia del límite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Esto es fácil de probar si escribimos

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Pues, en este caso tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

Esto prueba que $f+g$ *es derivable en* x_0 *y* $(f+g)'(x_1) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

6.4.3 Derivada del producto de dos funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un mismo punto x_0. Entonces, la función producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$ es derivable en x_0 y además

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Demostración

Para probar que el producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$ es derivable en el punto x_0, debemos mostrar la existencia del límite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}.$$

Para tal fin, escribiremos el cociente de diferencias de la función $(fg)(x)$, de tal forma que pondremos en juego los cocientes de diferencias de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$; de esta manera, estaremos en posibilidad de usar la hipótesis de que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x_0. Así pues, recurramos a un truco muy común en matemáticas que consiste en sumar y restar una misma cantidad a una expresión, con lo cual se obtienen expresiones equivalentes pero con formas más convenientes. Por otra parte, es importante observar que en esta prueba acudimos al hecho de que toda función derivable en un punto necesariamente es continua en ese punto, establecido en el teorema anterior.

Escribamos, entonces

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Con esto, hemos logrado que estén presentes los cocientes de diferencias de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Aplicando, ahora, la hipótesis de que existen los límites

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ y } \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

y el hecho de que $g(x)$ es continua en este punto

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

concluimos que existe el límite

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).$$

el cual podemos calcular usando las propiedades de los límites antes probados.

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)\right)+\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Esto prueba que fg es derivable en x_0 y que $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

6.4.4 Derivada del cociente de dos funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un punto x_0. En este caso, adicionamos la condición $g(x_0) \neq 0$. Entonces, la función cociente $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en x_0 y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Demostración

Antes de proceder con la demostración, hagamos algunas precisiones. La función cociente $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ está definida solo en los puntos x donde $g(x) \neq 0$. Además, por un teorema sobre funciones continuas, al ser $g(x)$ continua en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, tenemos que $g(x)$ es diferente de cero en una vecindad del punto x_0, así que la función $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ está definida en esta vecindad de x_0, condición necesaria para poder hablar de su derivada en x_0.

Como en los casos anteriores, para probar que el cociente $\frac{f}{g}(x)$ es derivable en el punto x_0, debemos mostrar la existencia del límite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}.$$

Escribamos el cociente de diferencias de manera que se pongan en juego los cocientes de diferencias de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right].
\end{aligned}$$

Tenemos, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$
$$= \frac{1}{g(x_0)^2}\left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\right]$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Esto prueba que $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Llamaremos *derivación* al proceso de obtención de la derivada de una función en un punto y *reglas de derivación* a las fórmulas antes obtenidas.

Con base en lo expuesto en la sección 6.3 y las reglas de derivación es posible obtener derivadas de funciones más complicadas.

Ejemplo 8

Como ya hemos visto, si m es un entero positivo, la derivada de la función potencia x^m, en cualquier punto x, está dada por mx^{m-1}. Además, la derivada de una constante por una función en un punto x, es el producto de la constante por la derivada de la función en ese punto; por tanto, la derivada de cualquier función de la forma αx^m en un punto x es igual a amx^{m-1}. Aplicando repetidas veces la regla de la suma, obtenemos que la derivada de cualquier función polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x$$

en cualquier punto, está dada por

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Ejemplo 9

Un caso particular del producto de dos funciones es el cuadrado de una función $F_2(x) = f(x)f(x) = f^2(x)$. Esta función será derivable donde f lo sea. En cada punto x donde exista la derivada, se tiene

$$F_2'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x)$$
$$= 2f(x)f'(x).$$

Usando este resultado, ahora podemos calcular la derivada del cubo de una función. Sea $F_3(x) = f^3(x)$; escribamos $F_3(x) = f^2(x)f(x)$. Entonces, tenemos

$$F_3'(x) = 2f(x)f'(x)f(x) + f^2(x)f'(x)$$
$$= 2f^2(x)f'(x) + f^2(x)f'(x)$$
$$= 3f^2(x)f'(x).$$

Usando inducción matemática, se puede probar que si n es un entero positivo y $F(x) = f^n(x)$, entonces

$$F'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x),$$

en todos los puntos x donde f sea derivable.

Ejemplo 10

Si $F_2(x) = \text{sen}^2 x$, entonces $F_2'(x) = 2 \text{ sen } x \cdot \text{sen}' x = 2 \text{ sen } x \cos x$. En general, si n es un entero positivo y $F_n(x) = \text{sen}^n (x)$, entonces

$$F_n'(x) = n \text{ sen}^{n-1} x \cos x.$$

Ejemplo 11

Si $G_2(x) = - \cos^2 x$, tenemos, entonces

$$G_2'(x) = -2 (\cos x)(-\text{ sen } x) = 2 \text{ sen } x \cos x.$$

Observe que la derivada de la función F_2 del ejemplo anterior y la de la función G_2 están dadas por la misma fórmula.

Ejemplo 12

Un caso particular del cociente de dos funciones es $F(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

En todos los puntos x donde g es derivable y $g(x) \neq 0$, la función F también lo es; además, en esos puntos se tiene

$$F'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Por ejemplo, si $F(x) = \dfrac{1}{x-1}$, entonces $F'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Ejemplo 13

Una función **racional** es cualquiera de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales. Esta función está definida en todos los reales x donde $q(x) \neq 0$.

En general, el dominio de una función racional consiste en la unión de un número finito de intervalos abiertos y es derivable en todos los puntos de su dominio. La derivada de $f(x)$ en cada punto x, está dada por

$$f'(x) = \frac{q(x)p'(x) - q(x)'p(x)}{q^2(x)}.$$

Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ consiste en la unión de los intervalos abiertos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. La derivada en cada punto x del dominio está dada por

$$f'(x) = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$
$$= -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Observe que la función $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$, en cada punto x tiene la misma derivada. En efecto

$$h'(x) = 2\frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Ejemplo 14

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$. Esta función está definida en todos los reales y es derivable en cada punto de su dominio. Así pues, la derivada está dada por

$$f'(x) = (\operatorname{sen})'(x) \cos x + \operatorname{sen} x\,(\cos)'(x)$$
$$= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$$
$$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
$$= \cos^2 x.$$

Ejemplo 15

Sea $f(x) = x^3 \cos^2 x$. Entonces, tenemos

$$f'(x) = 3x^2 \cos^2 x + x^3\,(2\cos x)(-\operatorname{sen} x)$$
$$= 3x^2 \cos^2 x - 2x^3 \cos x \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 16

Sea $f(x) = x^n e^x$. Por tanto, tenemos

$$f'(x) = nx^{n-1}e^x + x^n e^x$$
$$= (nx^{n-1x} + x^n)\,e^x$$
$$= (n+x)\,x^{n-1}e^x.$$

Ejemplo 17

Sea $f(x) = e^{nx}$, donde n es un entero positivo. Entonces, dado que $f(x) = e^{nx} = (e^x)^n$, tenemos

$$f'(x) = n(e^x)^{n-1}\,e^x$$
$$= ne^{(n-1)x}\,e^x$$
$$= ne^{nx}.$$

6.5 Cálculo de la derivada de algunas funciones elementales (parte 2)

6.5.1 Derivada de las funciones tan x, cot x, sec x y csc x

Ya hemos visto las fórmulas de las derivadas de las funciones seno y coseno. Ahora, es posible obtener las derivadas de las cuatro funciones trigonométricas básicas restantes:

Sea $F(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

Sea $F(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\csc^2 x. \end{aligned}$$

Si $F(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \sec x \ \tan x. \end{aligned}$$

Finalmente, ahora sea $F(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= -\csc x \ \cot x. \end{aligned}$$

En resumen, tenemos

- $F(x) = \text{sen}\, x, \quad F'(x) = \cos x.$
- $F(x) = \cos x, \quad F'(x) = -\text{sen}\, x.$
- $F(x) = \tan x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}, \ F'(x) = \sec^2 x.$
- $F(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}, \ F'(x) = -\csc^2 x.$
- $F(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \ F'(x) = \sec x \tan x.$
- $F(x) = \csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}, \ F'(x) = -\csc x \cot x.$

6.6 Generalización de las reglas de derivación

6.6.1 Derivada de la suma de un número finito de funciones

Aplicando de manera sucesiva la fórmula para la derivada de la suma de dos funciones, obtenemos la fórmula para la derivada de la suma de n funciones:

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n funciones derivables en un punto x, entonces la función suma $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ es derivable en x. Además

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x).$$

6.6.2 Derivada del producto de un número finito de funciones

Sea f el producto de tres funciones, $f(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x)$, asociemos los factores de tal manera que interpretemos f como el producto de dos funciones, $f(x) = (f_1 f_2)(x)f_3(x)$. Un factor es el producto $f_1 f_2$ y otro factor es f_3. Aplicando la fórmula para la derivada del producto de dos funciones, obtenemos

$$f'(x) = (f_1 f_2)'(x)f_3(x) + (f_1 f_2)(x)f_3'(x).$$

Aplicando nuevamente la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones, se obtiene

$$(f_1 f_2)'(x)f_3(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x).$$

De donde finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 f_2)'(x)f_3(x) + (f_1 f_2)(x)f_3'(x) \\ &= f_1'(x)f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x). \end{aligned}$$

Si aplicamos de manera sucesiva la fórmula para la derivada del producto de dos funciones, podemos obtener la fórmula para el producto de n funciones:

Sean f_1, f_2, …, f_n n funciones derivables en un punto x, entonces la función producto $f(x) = f_1(x)f_2(x) \ldots f_n(x)$ es derivable en x. Además

$$f'(x) = f_1'(x)f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x)f_2(x) \ldots f_n'(x).$$

Para los puntos x donde $f(x) \neq 0$, la fórmula anterior puede escribirse en la forma

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

Ejemplo 18

Sea $f(x) = x^4 + \sqrt{x} + xe^x + \dfrac{\cos x}{x^2+1}$. Esta función, suma de cuatro funciones, es derivable en todos los reales positivos y no en otros puntos, pues el sumando $\sqrt{x}$ solo es derivable en $x > 0$. La derivada $f'(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + e^x + xe^x + \frac{(x^2+1)(-\operatorname{sen} x) - (2x)(\cos x)}{(x^2+1)^2} \\ &= 4x^3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + (1+x)e^x - \frac{(x^2+1)\operatorname{sen} x + 2x \cos x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 19

Si $f(x) = x^2e^{5x} \operatorname{sen} x$, entonces, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{5x} \operatorname{sen} x + x^2(5e^{5x}) \operatorname{sen} x + x^2e^{5x} \cos x \\ &= 2xe^{5x} \operatorname{sen} x + 5x^2e^{5x} \operatorname{sen} x + x^2e^{5x} \cos x. \end{aligned}$$

6.7 Derivada de funciones compuestas: regla de la cadena

Sin duda alguna, la regla de la cadena, referente a la fórmula para derivar funciones valuadas en funciones (funciones compuestas), es una de las herramientas más poderosas del cálculo diferencial, por esa razón dedicamos una sección completa a su estudio.

Sean f y g dos funciones tales que los valores $g(x)$ de g pertenecen al dominio de f. Esto nos permite construir la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Supongamos que g es derivable en un punto x_0 y que f es derivable en $g(x_0)$. Entonces, la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x_0 y su derivada está dada por

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Demostración

Como en los casos anteriores, probaremos la derivabilidad de la función $(f \circ g)(x)$ en el punto x_0 mostrando que existe el límite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}.$$

Sin embargo, este caso es un poco más complicado que los de la suma, la multiplicación y el cociente de dos funciones. Para entender el tipo de dificultades que ahora se presentan, tratemos de transformar el cociente de diferencias, imitando los trucos que empleamos para los casos antes mencionados. Es razonable que, con el propósito de poner en juego los cocientes de diferencias para $f(x)$ y $g(x)$, multipliquemos y dividamos por la diferencia $g(x)-g(x_0)$, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}&=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\&=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\;\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Podríamos argumentar que, dado que existen los límites

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

y

$$\lim_{y\to g(x_0)}\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)}$$

y haciendo $y=g(x)$, obtenemos

$$\lim_{g(x)\to g(x_0)}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{y\to g(x_0)}\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)}=f'(g(x_0)).$$

Por consiguiente, dado que $g(x)\to g(x_0)$ en cuando $x\to x_0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\;\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\&=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\right]\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].\\&=f'(g(x_0))\,g'(x_0).\end{aligned}$$

Sin embargo, en este ajuste de fórmulas, hay un detalle que nos impide que utilicemos este truco de multiplicar y dividir por la diferencia $g(x)-g(x_0)$. El inconveniente es que no es posible estar seguros que podamos multiplicar y dividir por tal diferencia, ya que esta podría ser cero para valores de x arbitrariamente cercanos a x_0. Esto nos lleva a realizar un análisis más minucioso del cociente de diferencias de la función compuesta $(f\circ g)(x)$. Aunque, en realidad vamos a proceder de otra manera.

Como $f(x)$ es derivable en $y_0=g(x_0)$, existe el límite

$$f'(y_0)=\lim_{y\to g(x_0)}\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)}=\lim_{y\to g(x_0)}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}.$$

Dado que el cociente de diferencias

$$\frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$$

es la causa de las dificultades cuando hacemos $y = g(x)$, definamos la función $F(y)$ como sigue

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{si } y \neq y_0 \\ f'(g(x_0)) = f'(y_0) & \text{si } y = y_0 \end{cases}$$

Esta función es continua en $y_0 = g(x_0)$, pues

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = F(y_0).$$

Es fácil verificar, a partir de la definición de la función $F(y)$, que la siguiente igualdad es válida para toda y:

$$f(y) - f(y_0) = F(y)(y - y_0).$$

En efecto, si $y \neq y_0$,

$$F(y)(y - y_0) = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}\,(y - y_0) = f(y) - f(y_0).$$

Por otra parte, si $y = y_0$, ambos miembros de $f(y) - f(y_0) = F(y)(y - y_0)$ valen cero, por lo que se convierte en una igualdad trivial.

En resumen, la diferencia $f(y) - f(y_0)$ se escribe como el producto $F(y)(y - y_0)$, donde $F(y)$ es una función continua en $y_0 = g(x_0)$.

Entonces, usando esta representación para $f(y) - f(y_0)$, tenemos para toda $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{F(g(x))(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= F(g(x))\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

O sea

$$\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}=F(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Es claro que el miembro derecho tiene límite en x_0, pues como $g(x)$ es continua en x_0 y $F(y)$ lo es en $y_0 = g(x_0)$, se sigue que $(F\circ g)(x) = F(g(x))$ es continua en x_0; por tanto, existe el límite

$$\lim_{x\to x_0}(F\circ g)(x)=\lim_{x\to x_0}F(g(x))$$

el cual es igual a $(F\circ g)(x_0) = F(g(x_0)) = F(y_0) = f'(y_0) = f'(g(x_0))$. Además, como $g(x)$ es derivable en x_0, existe el límite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Así que existen los límites de ambos factores, de donde obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\left(F(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\&=\lim_{x\to x_0}F(g(x))\ \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=f'(g(x_0))g'(x_0).\end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula de la derivada de la composición de dos funciones:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$$

conocida como **regla de la cadena**.

Hermanos Bernoulli



Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748), su hermano mayor, son de los miembros más destacados de una familia suiza de nueve físicos y matemáticos, al igual que Daniel (1700-1782) hijo de Johann.

Tanto Jacob como Johann hicieron importantes contribuciones al cálculo. Aunque Jacob fue quien propuso el problema de lo que hoy en día se conoce como ecuación diferencial de Bernoulli, Johann fue quien la resolvió. Sin embargo, se considera que la obra maestra de Jacob fue el libro *Ars Conjectandi* (*El arte de la conjetura*), trabajo dedicado a la teoría de la probabilidad. Los números de Bernoulli también llevan ese nombre en honor a Jacob. Por su parte, en la Luna hay un cráter llamado *cráter Bernoulli* en honor a los dos hermanos.

Cabe mencionar que Johann fue discípulo de Jacob, a quien sustituyó en su cátedra como profesor en la Universidad de Basilea. Ahí mismo, Johann Bernoulli tuvo como discípulo al famosísimo Leonhard Euler.

6.8 Definiciones alternativas para la derivada

En la prueba de la regla de la cadena, acudimos a una reformulación de la definición de la derivabilidad de una función. Esta nueva forma de establecer la derivada nos permitió salvar algunas dificultades que se presentaron con la definición original. Vale la pena oficializar que es una nueva forma de definir la derivada, aprovecharemos la ocasión para presentar una tercera forma más. Establezcamos entonces estas dos definiciones equivalentes de derivada, pero antes recordemos la original.

Las siguientes tres definiciones de derivada son equivalentes:

Definición 1

Sea f una función definida en un conjunto D y $x_0 \in D$ tal que existe una vecindad abierta de x_0 contenida en D. Si existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

diremos que f es **derivable** en x_0 y este límite se llama la **derivada** de f en el punto x_0, el cual denotaremos por cualquiera de los símbolos

$$f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0) \text{ o } Df(x_0).$$

Definición 2

Sea f una función definida en un conjunto D y $x_0 \in D$ tal que existe una vecindad abierta de x_0 contenida en D. Si existe una función F definida en D, continua en x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0)$$

para toda $x \in D$, diremos que f es **derivable** en x_0 y a $F(x_0)$ le llamaremos la **derivada** de f en x_0, el cual denotaremos por cualquiera de los símbolos

$$f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0) \text{ o } Df(x_0).$$

Veamos ahora una tercera definición equivalente a las dos anteriores.

Definición 3

Sea f una función definida en un conjunto D y $x_0 \in D$ tal que existe una vecindad abierta de x_0 contenida en D. Si existe una recta con ecuación de la forma $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0$$

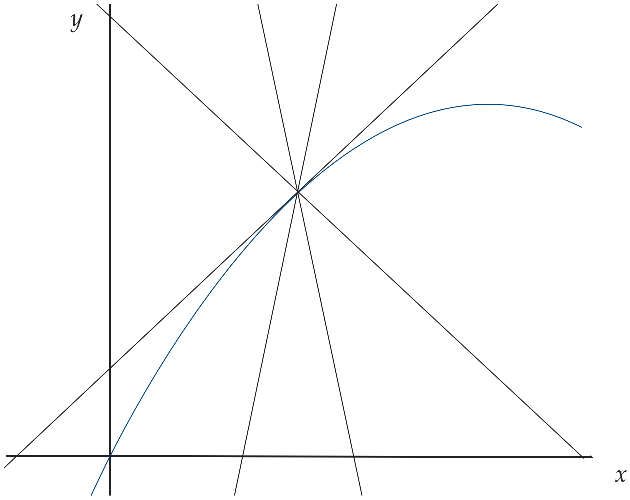
diremos que f es **derivable** en x_0 y a la pendiente m se le llama la **derivada** de f en el punto x_0, el cual denotaremos por cualquiera de los símbolos

$$f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0) \text{ o } Df(x_0).$$

Se deja como ejercicio para el lector que establezca esta versión 3 de la derivada.

La definición anterior está relacionada con una interpretación geométrica de la derivada que estudiaremos en el capítulo 7. La derivada $f'(x_0)$ de una función f en el punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente es entonces $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. La definición 3 nos dice en qué se distingue la recta tangente del resto de las rectas que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$. Nos dice cuál es la propiedad que hace que la recta sea tangente a la curva. Consideremos todas las rectas que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$. Es una familia de rectas que se describe con la familia de ecuaciones

$$y = m(x - x_0) + f(x_0), \quad m \in \mathbb{R}.$$



Es claro que para cualquier ecuación $y = m\,(x - x_0)\, f(x_0)$, se tiene

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0))\right] = 0$$

pues

$$f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0)) = \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\downarrow\atop 0} - m\underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow\atop 0}.$$

Sin embargo, la tangente se caracteriza porque su ecuación no solamente cumple esta propiedad sino que cumple una propiedad más fuerte. No solo debe tender a cero la diferencia $f(x) - \left[m(x - x_0) + f(x_0)\right]$, sino que también debe tender a cero esta diferencia aun dividida entre $x - x_0$.

$$\frac{f(x) - \left[m(x - x_0) + f(x_0)\right]}{x - x_0} \to 0\,.$$

Entonces, la definición 3 nos dice que para que f sea derivable en x_0, debe existir una recta con esa propiedad, que solamente tiene la recta tangente. Derivabilidad significa la existencia de la recta tangente en este sentido.

Cualquiera de las tres definiciones puede utilizarse, por ejemplo, para probar las propiedades de la derivada. Es un buen ejercicio probar nuevamente las reglas de derivación usando cada una de las dos definiciones.

Veamos un ejemplo de esto. De acuerdo con la definición 2, que una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ sea derivable en un punto $x_0 \in D$ significa que existe una función $F\colon D \to \mathbb{R}$ continua en x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0)$$

para toda $x \in D$. De esta relación se sigue inmediatamente la continuidad de f en x_0, pues el producto de dos funciones continuas en un punto es una función continua.

Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ y $g\colon D \to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en un punto $x_0 \in D$, entonces existen funciones F y G definidas en D, continuas en x_0 tales

$$f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0) \;\text{ y }\; g(x) - g(x_0) = G(x)(x - x_0)$$

para toda $x \in D$. De las relaciones anteriores y mediante algunos cálculos algebraicos obtenemos

$$f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0)) = (F(x) + G(x))(x - x_0)$$

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \left[F(x)G(x)(x - x_0) + F(x)g(x_0) + G(x)f(x_0)\right](x - x_0)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{F(x)g(x_0) - f(x_0)G(x)}{g(x_0)\left[G(x)(x - x_0) + g(x_0)\right]}(x - x_0).$$

De estas relaciones se siguen inmediatamente las reglas de la derivada para la suma, producto y cociente de funciones. Se invita al lector a que lleve a cabo los detalles.

Si bien la definición 2 es muy cómoda para probar las propiedades básicas de la derivada, oculta la idea de razón de cambio que le dio origen.

6.9 Cálculo de la derivada de algunas funciones elementales (parte 3)

6.9.1 Derivada de las funciones a^x y x^n

Basados en la función exponencial e^x y la función $\log x$, así como en sus propiedades desarrolladas en la sección 5.6, podemos escribir $f(x) = a^x = e^{x \log a}$ y $g(x) = x^r = e^{r \log x}$. De la regla de la cadena se sigue que f es derivable en cada $x \in \mathbb{R}$ y, además, $f'(x) = e^{x \log a}\,(x \log a)' = e^{a \log x} \log a$. O sea

$$f'(x) = (\log a)a^x.$$

Similarmente tenemos que $g(x) = x^r = e^{r \log x}$ es derivable en cada $x \in (0, +\infty)$, además $g'(x) = e^{r \log x}(r \log x)' = e^{r \log x} r \frac{1}{x}$. O sea

$$g'(x) = rx^{r-1}.$$

Resumimos los resultados en el siguiente teorema.

Teorema

Sean $f(x) = a^x$ y $g(x) = x^r$, donde $a > 0$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = (\log a)a^x$ para todo real x y $g'(x) = rx^{r-1}$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

La regla de la cadena junto con las fórmulas o reglas de derivación, vistas en la sección 6.4, nos ofrecen un enorme potencial para derivar funciones con aspecto tan complejo como nos lo permita nuestra imaginación. Con un poco de práctica, podemos convertirnos en diestros calculistas de derivadas. En la presente sección ilustraremos algunas de sus aplicaciones.

Ejemplo 20

Derivemos la función $F(x) = \text{sen}(x^2)$. Si definimos $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = x^2$, entonces la función F es la composición $f \circ g$:

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x) = \text{sen}\,(x^2).$$

Por tanto, usando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))\, g'(x) \\ &= \cos(x^2)(2x). \end{aligned}$$

Así que $F'(x) = 2x \cos x^2$.

Ejemplo 21

Sea $F(x) = e^{x^2}$. En este caso, $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, donde $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$. De la regla de la cadena se sigue

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))\, g'(x) \\ &= e^{x^2}(2x). \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos $F'(x) = 2xe^{x^2}$.

Ejemplo 22

Sea $F(x) = e^{\cos x}$. Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$, entonces tenemos $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))\, g'(x) \\ &= e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x) \\ &= -e^{\cos x} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Ejemplo 23

La función $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ puede escribirse como la composición $(f \circ g)(x)$ de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces tenemos

$$F'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6.9.2 Algunas fórmulas básicas

Usando la regla de la cadena y las fórmulas de las derivadas de los ejemplos anteriores, estableceremos algunas fórmulas generales. En la lista siguiente, f es una función definida en algún intervalo y F es derivable en los puntos donde f lo sea.

- $F(x) = f^n(x)$, $\quad F'(x) = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
- $F(x) = \sqrt{f(x)}$, $\quad F'(x) = \frac{1}{2}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, $\quad (f(x) > 0$ para toda $x)$
- $F(x) = \operatorname{sen} f(x)$, $\quad F'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$
- $F(x) = \cos f(x)$, $\quad F'(x) = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$
- $F(x) = \tan f(x)$, $\quad F'(x) = \sec^2 f(x) \cdot f'(x)$

- $F(x) = \cot f(x)$, $\quad F'(x) = -\csc^2 f(x) \cdot f'(x)$
- $F(x) = \sec f(x)$, $\quad F'(x) = \sec f(x) \tan f(x) \cdot f'(x)$
- $F(x) = \csc f(x)$, $\quad F'(x) = -\csc f(x) \cot f(x) \cdot f'(x)$
- $F(x) = e^{f(x)}$, $\quad F'(x) = e^{f(x)} f'(x)$
- $F(x) = \log f(x)$, $\quad F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $\quad (f(x) > 0$ para toda $x)$

6.10 Derivadas de algunas funciones especiales

Cuando hablamos de calcular la derivada de una función, es probable que se piense en un procedimiento para obtener una fórmula (la derivada) a partir de otra (la función), como lo hicimos para las funciones de la sección anterior. En esos casos, el proceso de derivación se convierte en un algoritmo, en un procedimiento mecánico que consiste en aplicar las reglas de derivación que utilizamos muchas veces sin reflexionar. Sin embargo, en principio, el proceso de derivación debe aplicarse de manera particular a cada uno de los puntos donde la función sea derivable. El cálculo de la derivada debe hacerse punto a punto, aplicando la definición y quizá alguna regla o reglas (no lo olvide, punto a punto). No siempre tenemos la suerte de poder calcular la derivada para todos los puntos donde la función sea derivable mediante un único proceso y obtener, entonces, una fórmula que se aplique a todos ellos.

En los siguientes ejemplos presentamos algunas funciones que ilustran que la derivada no siempre puede calcularse mediante una fórmula que aplique a todos los puntos, pues en al menos algunos puntos vamos a requerir aplicar directamente la definición. Otros ejemplos ilustrarán funciones que son no derivables en al menos un punto y uno mostrará con más contundencia el carácter puntual de la derivada, pues la función será derivable solo en un punto de su dominio.

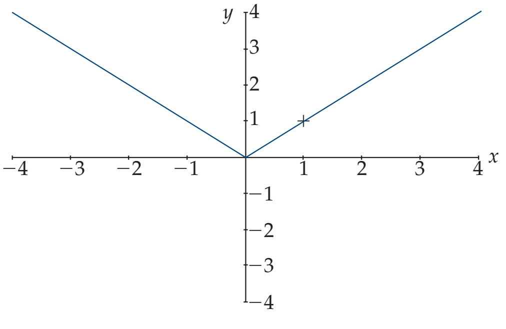
Ejemplo 24

Función valor absoluto

La función **valor absoluto**, definida como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es un ejemplo típico que se usa para mostrar la *no derivabilidad* de una función en un punto.



En este caso se trata de una función no derivable en $x_0 = 0$.

Ahora, tratemos de averiguar la derivabilidad de $f(x) = |x|$ en cualquier punto. Sea x_0 cualquier real. Queremos ver si el cociente de diferencias

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$$

tiene límite en x_0.

Para tal efecto, transformemos el cociente de diferencias como sigue

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \\ &= \frac{\left(|x| - |x_0|\right)\left(|x| + |x_0|\right)}{\left(x - x_0\right)\left(|x| + |x_0|\right)} \\ &= \frac{x^2 - x_0^2}{\left(x - x_0\right)\left(|x| + |x_0|\right)} \\ &= \frac{x + x_0}{|x| + |x_0|}.\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x + x_0}{|x| + |x_0|}.$$

Por tanto, si $x_0 \neq 0$, el cociente tendrá límite en x_0 y además

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x + x_0}{|x| + |x_0|} = \frac{2x_0}{2|x_0|} = \frac{x_0}{|x_0|}.$$

Así pues, existe la derivada en x_0 y además

$$f'(x_0) = \frac{x_0}{|x_0|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x_0 < 0 \end{cases}$$

Por otra parte, si $x_0 = 0$, no existe

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x},$$

pues existen los límites laterales en $x_0 = 0$, pero son diferentes:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

Esto significa que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x_0 = 0$. Para los demás puntos tenemos

$$f'(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Otra manera de derivar la función valor absoluto es interpretándola como la función compuesta $f(x) = \sqrt{x^2}$. Debido a que la función $\sqrt{x}$ es derivable solo en los positivos de esta relación, podemos concluir que f es derivable en todo $x \neq 0$. El caso $x = 0$ debe tratarse por separado.

Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}, \ (x \neq 0).$$

Fórmula que también es posible escribir de este otro modo

$$f'(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x\,|x|}{|x|^2} = \frac{x\,|x|}{x^2} = \frac{|x|}{x}.$$

Ejemplo 25

Sea la función $f(x) = x\,|x|$. Dicha función está definida en todos los reales y no obstante que sus valores están expresados en términos del valor absoluto, es derivable en todo punto de su dominio.

Para todos los puntos $x \neq 0$, podemos aplicar las reglas de derivación, incluyendo la regla de la cadena.

Escribamos $|x| = \sqrt{x^2}$, con lo que $f(x)$ toma la forma

$$f(x) = x\sqrt{x^2}.$$

Utilizando la regla para derivar una función compuesta y el producto de funciones, obtenemos

$$f'(x) = x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}\right) + \sqrt{x^2},$$

o sea

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + \sqrt{x^2}.$$

Si multiplicamos y dividimos el primer sumando entre $\sqrt{x^2}$, obtenemos

$$f'(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}.$$

Esto es

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2}.$$

Si retomamos la igualdad $|x|\sqrt{x^2}$, finalmente tenemos para $x \neq 0$

$$f'(x) = 2\,|x|.$$

Para el punto $x = 0$, aplicamos de forma directa la definición

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Entonces, concluimos que la fórmula $f'(x) = 2|x|$ aplica a todos los puntos $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 26

Sea la función $f(x) = x^n |x|$, donde n es cualquier entero positivo.

Como en el caso anterior reemplazamos en la fórmula $|x| = \sqrt{x^2}$, entonces $f(x)$ toma la forma

$$f(x) = x^n \sqrt{x^2}$$

Sea $x \neq 0$. Nuevamente, utilizando la regla para derivar una función compuesta y la regla de la derivada del producto de funciones, obtenemos

$$f'(x) = x^n\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}\right) + \sqrt{x^2}\ (nx^{n-1}).$$

Ordenando y simplificando en el lado derecho de la igualdad

$$f'(x) = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2}} + nx^{n-1}\sqrt{x^2},$$

si multiplicamos y dividimos el primer sumando por $\sqrt{x^2}$, obtenemos

$$f'(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2} + nx^{n-1}\sqrt{x^2},$$

o sea

$$f'(x) = (n+1)x^{n-1}\sqrt{x^2}.$$

Sustituyendo $|x| = \sqrt{x^2}$, se obtiene para $x \neq 0$:

$$f'(x) = (n+1)x^{n-1}|x|.$$

El caso $x = 0$, lo tratamos por separado:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\ |x|}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}|x| = 0.$$

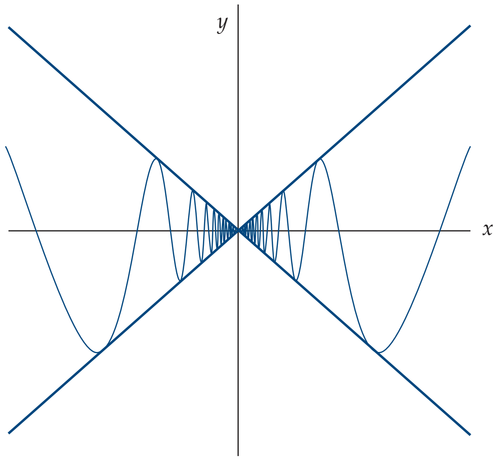
De lo antes obtenido, podemos concluir que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f'(x) = (n+1)x^{n-1}|x|.$$

Ejemplo 27

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



La gráfica está comprendida entre las gráficas de $|x|$ y $-|x|$. Esto se sigue de la desigualdad $\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x|$, o sea $-|x| \leq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq |x|$.

Mostremos que f es no derivable en el punto 0. Para demostrarlo, primero probemos que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no tiene límite en 0, para lo cual daremos dos sucesiones de reales, (x_k) y (y_k), que convergen a 0, y tales que las sucesiones de imágenes correspondientes $(f(x_k))$ y $(f(y_k))$ tienden a límites diferentes. La primera sucesión es $(x_k) = \left(\frac{1}{k\pi}\right)$. Esta tiende a 0 cuando $k \to \infty$, de esta forma se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x_k} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{sen} k\pi = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Por otra parte, para la sucesión $(y_k) = \left(\frac{1}{(2k + \frac{1}{2})\pi}\right)$, que también tiende a 0 cuando $k \to \infty$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{y_k} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\,(2k + \tfrac{1}{2})\pi = \lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\,(2k\pi + \tfrac{1}{2}\pi) = 1.$$

Por tanto, no existe el límite de

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

cuando $x \to 0$. Esto significa que $f(x)$ no es derivable en 0.

Para los puntos $x \neq 0$, podemos calcular la derivada usando la regla del producto y la regla de la cadena. Para $0 < x$ y $x < 0$ derivamos la función $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ restringida a los intervalos abiertos $(0, +\infty)$ y $(-\infty, 0)$. En este caso, la derivada está dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \operatorname{sen}\frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x} \end{aligned}$$

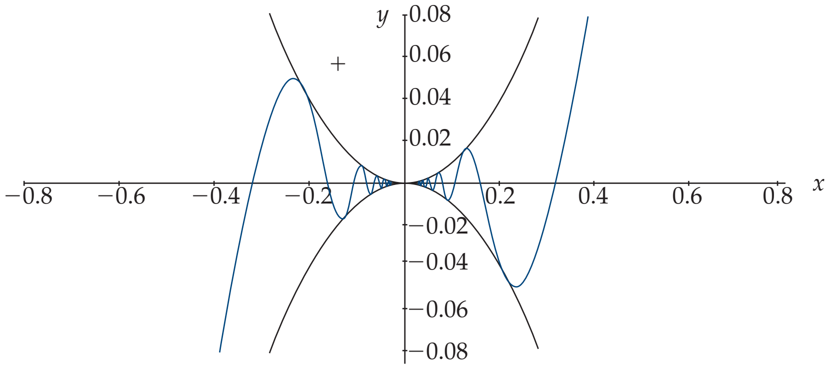
para toda $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ejemplo 28

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dado que $\left| x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right| \leq x^2$, se tiene $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq x^2$ así que la gráfica de f está comprendida entre las gráficas de x^2 y $-x^2$.



Como en el ejemplo anterior, separamos el problema en dos casos. El primero consiste en considerar la función definida en el dominio restringido $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. El segundo caso consiste del punto $x = 0$. Para el primer caso, simplemente aplicamos las reglas de derivación, incluyendo la regla de la cadena. De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 2x \cos \frac{1}{x} \\ &= -\cos \frac{1}{x} + 2x \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Esta fórmula aplica para toda $x \neq 0$.

Ahora, supongamos el punto $x_0 = 0$. En este caso

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Por lo que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Esto se deduce de la desigualdad

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

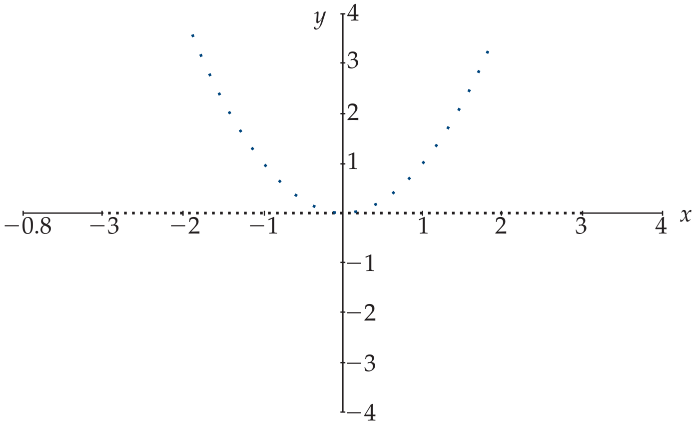
y del teorema del sándwich para límites. Por consiguiente, tenemos

$$f'(x) = \begin{cases} -\cos\dfrac{1}{x} + 2x\cos\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 29

Función derivable en un único punto. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional} \\ \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$



Esta función es discontinua en todos los reales diferentes de cero, por lo que, en consecuencia, en estos puntos no es derivable. El único punto donde $f(x)$ es derivable es $x = 0$, de hecho en este la derivada vale cero. En efecto, puesto que $f(0) = 0$, tenemos para $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Por tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

O sea

$$f'(0) = 0.$$

6.11 Derivada de funciones inversas

En esta sección estableceremos un importante teorema que nos permitirá obtener la derivada de la inversa de una función en términos de la derivada de la función misma. Con este teorema, conjuntamente con las que hemos llamado reglas algebraicas de derivación y la regla de la

cadena, completamos nuestras técnicas para derivar, en principio, cualquier función elemental, como la definimos en el capítulo 3.

Antes de enunciar y probar nuestro resultado sobre derivadas de funciones inversas, recordemos algunos hechos sobre este importante concepto. Para que una función con dominio un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tenga su inversa, es necesario y suficiente que sea inyectiva (uno a uno), lo cual significa que dos puntos diferentes, x_1 y x_2, de su dominio no pueden tener la misma imagen; dicho en otras palabras, si $x_1 \neq x_2$, entonces se debe tener $f(x_1) \neq f(x_2)$. Este enunciado equivale al siguiente: si x_1 y x_2 son puntos del dominio tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces necesariamente $x_1 = x_2$. En este caso, la función inversa está definida en la imagen (rango) de la función que es el conjunto $B = \{f(x) | x \in A\}$.

Dentro de la familia de funciones inyectivas destacan las que son estrictamente monótonas, es decir, las estrictamente crecientes y las estrictamente decrecientes. Estas funciones tienen propiedades muy especiales, por ejemplo, en el capítulo 5 probamos que si una función estrictamente creciente está definida en un intervalo, entonces su inversa es necesariamente continua; es una situación notable, de hecho un tanto espectacular, ya que no se requiere la hipótesis de que la función original sea continua, como algunos libros de texto la suponen, en particular si la inversa, que es estrictamente creciente, también está definida en un intervalo. Entonces, la función original es continua.

Una función inyectiva no necesariamente es creciente o decreciente; sin embargo, un hecho notable, que no probaremos aquí, es que si la función además de inyectiva es continua en un intervalo, entonces necesariamente es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Puesto que estaremos interesados en las funciones inyectivas continuas en intervalos, podemos limitarnos a las funciones estrictamente monótonas.

A continuación enunciamos y probamos un teorema que hará crecer nuestro, ya de por si amplio, potencial de cálculo de derivadas.

Teorema (derivada de la función inversa)

Sea $f:(a, b) \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, derivable en un punto $x_0 \in (a, b)$, y sea $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ la inversa de f. Supóngase $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(x_0)$ y además

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demostración

Probaremos que

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Para lo cual es suficiente probar que para toda sucesión $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de puntos de J, diferentes de $f(x_0)$, que tiende a $f(x_0)$, se tiene

$$\lim_{y_n \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Sea pues $y_1, y_2, y_3, \ldots$ una sucesión de puntos de J diferentes de $f(x_0)$, que converge a $f(x_0)$.

Sea la sucesión

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_3 = f^{-1}(y_3), \ldots$$

Los puntos de esta sucesión están en el intervalo (a, b) y son diferentes de x_0. Como f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b), f^{-1} es continua (esto ya ha sido probado en el capítulo 5) en $f(x_0)$. Por tanto, como $\lim_{n\to\infty} y_n = f(x_0)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0.$$

Por otra parte, de la definición de $x_n = f^{-1}(y_n)$ se tiene $f(x_n) = y_n$, de donde tenemos

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}.$$

Por hipótesis

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

Por consiguiente, podemos hablar del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

O sea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Esto prueba el teorema.

Otra manera de enunciar el teorema anterior se obtiene al cambiar ligeramente la notación.

Teorema (derivada de la función inversa)

Sea $f(a, b) \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y sea $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ la inversa de f y $y_0 \in J$. Supóngase f derivable en $f^{-1}(y_0)$ y $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$. Entonces, f^{-1} es derivable en y_0 y además

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Aplicaremos el teorema anterior para obtener las derivadas de algunas funciones inversas importantes.

6.11.1 Derivada de las funciones arc

6.11.1.1 Derivada de arcsen x

La función $g(x) = \text{arcsen } x$ tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$, al cual hemos definido como la inversa de la función $f(x) = \text{sen } x$, restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En el intervalo abierto

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es diferente de cero, pues $f'(x) = \cos x$. Si restringimos $f(x) = \operatorname{sen} x$ a este intervalo, podemos aplicar el teorema anterior. Entonces, en todo punto $y_0 \in (-1, 1)$, se tiene

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \\ \operatorname{arcsen}'(y) &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)}. \end{aligned}$$

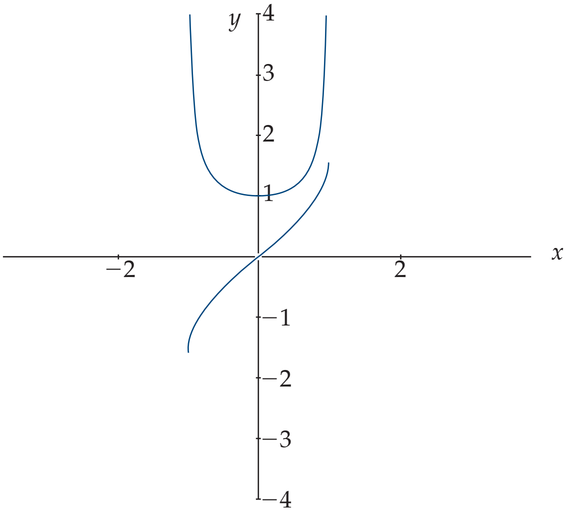
Hagamos $\theta = \operatorname{arcsen} y$, tenemos entonces $y = \operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{1 - y^2}$, o sea

$$\cos(\operatorname{arcsen} y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Si cambiamos la variable y por la variable x, obtenemos la fórmula

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para toda $x \in (-1, 1)$. En la siguiente figura se muestran las gráficas de la función arcsen x y la de su derivada. Identifique cada una de ellas.



6.11.1.2 Derivada de arccos x

La función $g(x) = \arccos x$ tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$, y es la inversa de la función $f(x) = \cos x$, restringida al intervalo $[0, \pi]$. En el intervalo abierto $(0, \pi)$, la derivada de la función $f(x) = \cos x$ es diferente de cero, pues $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. Restrinjamos $f(x) = \cos x$ a este intervalo para aplicar el teorema anterior. Entonces, en todo punto $y_0 \in (-1, 1)$ se tiene

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \\ \arccos'(y) &= \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos y)}. \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, haciendo $\theta = \operatorname{arccos} y$, tenemos $y = \cos\theta$, por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - y^2},$$

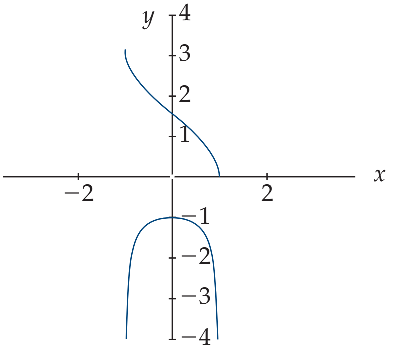
o sea

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arccos} y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Cambiando la variable y por la variable x, obtenemos la fórmula

$$\operatorname{arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para toda $x \in (-1, 1)$. En la siguiente figura identifique las gráficas de la función arccos x y la de su derivada.



6.11.1.3 Derivadas de arctan x, arccot x, arcsec x y arccsc x

La función $g(x) = \arctan x$ tiene como dominio el conjunto de los reales, pues es la inversa de la función $f(x) = \tan x$, restringida al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. En este intervalo tenemos

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

por lo que $f'(x) \neq 0$ para toda $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces, podemos aplicar el teorema anterior, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \\ \arctan'(y) &= \frac{1}{\tan'(\arctan y)} \\ &= \frac{1}{\sec^2(\arctan y)}. \end{aligned}$$

Hagamos $\theta = \arctan y$, tenemos entonces $y = \tan\theta$. De la relación

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

obtenemos, al dividir ambos miembros entre $\cos^2\theta$:

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$$

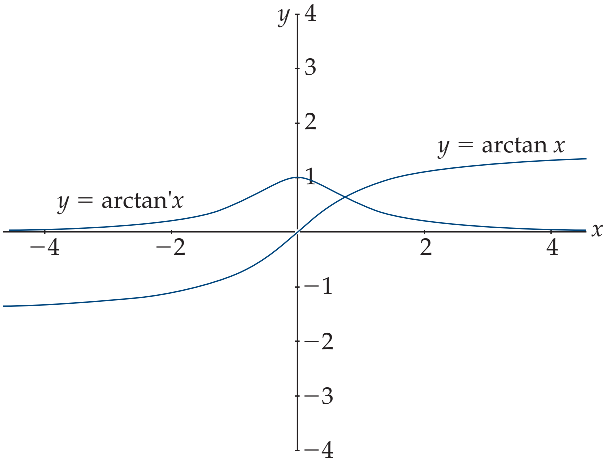
Por tanto, tenemos

$$\sec^2(\arctan y) = 1 + \tan^2(\arctan y)$$
$$\sec^2(\arctan y) = 1 + y^2$$

Cambiemos la variable y por x, para finalmente escribir

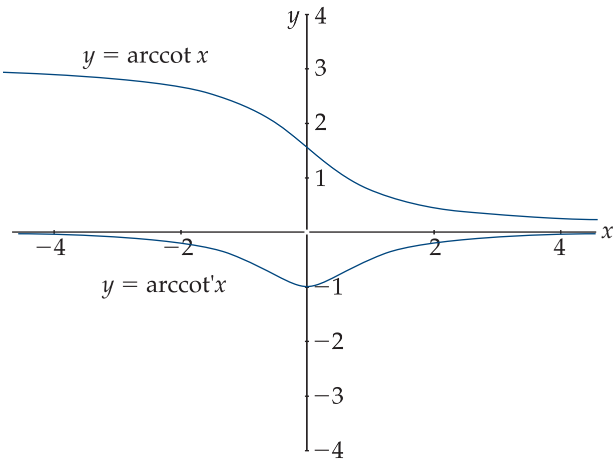
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

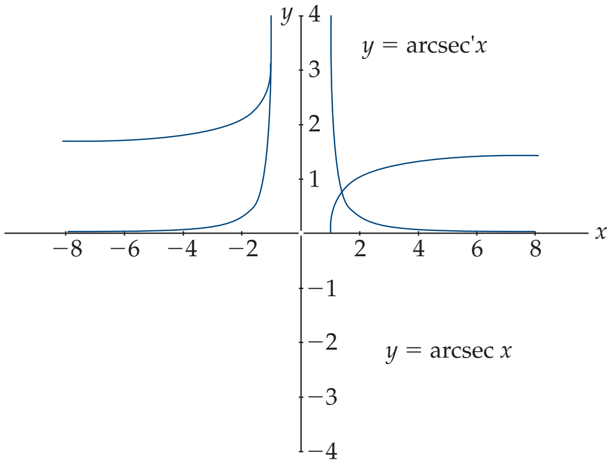
Esta fórmula vale para toda $x \in \mathbb{R}$.

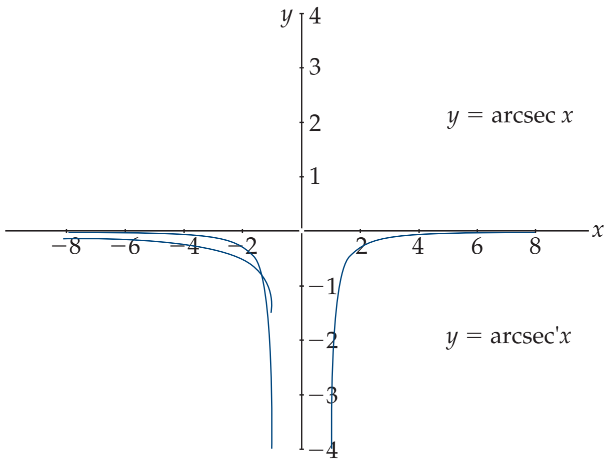


Como ejercicio para el lector, deduzca las siguientes fórmulas para las demás funciones arco:

$$\text{arccot}'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$
$$\text{arcsec}'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$\text{arccsc}'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$







6.12 Derivadas sucesivas

Si una función f es derivable en un subconjunto de puntos de su dominio, es posible definir la **función derivada** como la función

$$f': x \mapsto f'(x)$$

El dominio de f' es el conjunto de puntos donde f es derivable. A su vez, la función f' puede ser derivable en algunos puntos de su dominio. Si x es un punto donde f' es derivable, la derivada de f' en x es representada por nuestra acostumbrada notación $(f')\,(x)$, aunque también la denotaremos por $f''(x)$ o bien por cualquiera de los símbolos

$$f^{(2)}(x),\ \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\,.$$

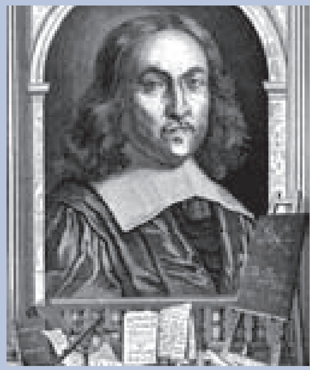
Llamaremos **segunda derivada** de f en x a la derivada $f''(x)$, o bien **derivada de orden dos** de f en x.

De manera análoga, definimos la **derivada de orden tres** de f en x como la derivada de la función segunda derivada f'', siempre y cuando esta sea derivable en x. A esta derivada también la llamaremos **tercera derivada** de f en x y será denotada por cualquiera de los símbolos

$$f'''(x), f^{(3)}(x),\ \frac{d^3 f}{dx^3}(x)\,.$$

Continuando con procesos análogos, para todo entero positivo n definimos la **derivada de orden** n de f en un punto x. Para lo cual, se requiere tener definida la función derivada de orden $n-1$, $f^{(n-1)}$ y que sea derivable en x. A la derivada de orden n de f en un punto x la denotaremos por cualquiera de los símbolos

Pierre de Fermat (1601-1665)



Abogado y matemático francés, nacido en Beaumont de Lomagne, cerca de Montauban. Su padre lo envió a estudiar derecho a Toulouse, donde pasó toda su vida ejerciendo esta profesión, aunque en sus momentos de ocio se dedicó a las matemáticas.

Quizá la celebridad de Fermat se deba a sus contribuciones en la teoría de números. Una de sus famosas conjeturas, llamada “el último teorema de Fermat”, establece que para cada entero positivo $n > 2$ es imposible encontrar tres enteros x, y, z que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$. Esta conjetura fue demostrada apenas en 1994, por el matemático inglés Andrew Wiles, quien lo hizo probando otra conjetura sobre curvas elípticas, misma que a su vez implicaría la veracidad de lo que por siglos fue un gran reto para los matemáticos de todo el mundo. Fermat también contribuyó en otros campos de la matemática, como la geometría analítica y la teoría de probabilidades.

Es posible considerar una de las declaraciones más importantes de Fermat, como el principio fundamental de la geometría analítica: “cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva”. Sin duda, este es uno de los enunciados más significativos desarrollados en toda la historia de las matemáticas.

Fermat fue pionero en la génesis del cálculo diferencial e integral, gracias a la creación de su famoso método para máximos y mínimos, que en el lenguaje moderno se traduce en determinar los puntos donde la derivada se anula.

$$f^{(n)}(x),\ \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

Cuando $n > 1$, diremos que $f^{(n)}(x)$ es una **derivada de orden superior** de f en x.

6.12.1 Derivada de orden k de x^n

Sea n un entero positivo. Calculemos las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^n$. Si $n = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, para todo entero positivo $k \geq 2$ se tiene $f^{(k)}(x) = 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

Para la función $f(x) = x^2$, se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \\ f^{(2)}(x) &= 2 \\ f^{(k)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

para $k \geq 3$ y toda $x \in \mathbb{R}$.

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que, en general, se tiene:

Si $n \geq 2$ y $f(x) = x^n$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f^{(2)}(x) &= n(n-1)\,x^{n-1} \\ f^{(k)}(x) &= n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}\,(2 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. El caso particular $k = n$, se reduce a

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, $f^{(k)}(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y toda $k > n$.

La fórmula $f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}\,(2 \leq k \leq n)$, también se escribe

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}k!x^{n-k} \end{aligned}$$

es decir

$$f^{(k)}(x) = \binom{n}{k} k\,!\,x^{n-k}\,(2 \leq k \leq n).$$

Donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

6.12.2 Derivada de orden k de sen x

Es fácil calcular las siguientes derivadas sucesivas.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \\ f'(x) &= \cos x \\ f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Estas relaciones se cumplen para toda $x \in \mathbb{R}$. Puesto que $f(x) = \operatorname{sen} x = f^{(4)}(x)$, las siguientes derivadas sucesivas se obtienen sin ningún esfuerzo, solo es cuestión de saber contar. Por ejemplo, analizando la lista anterior, podemos escribir $f^{(12)}(x) = \operatorname{sen} x$ y $f^{(16)}(x) = \operatorname{sen} x$. Por tanto, también tenemos $f^{(13)}(x) = \cos x$ y $f^{(17)}(x) = \cos x$. Con un cálculo aritmético simple, es posible deducir que $f^{(30)}(x) = -\operatorname{sen} x$, o bien, $f^{(31)}(x) = -\cos x$. Como ya se habrá dado cuenta, la función que resulta para $f^{(k)}(x)$ depende del residuo que se obtiene de la división de k entre 4. En otras palabras, para todo entero positivo k, escribimos

$$k = 4q + r.$$

El residuo r puede tomar los valores 0, 1, 2 o 3. Si este es cero (k es múltiplo de 4), $f^{(k)}(x) = \operatorname{sen} x$; si $k = 1$, entonces $f^{(k)}(x) = \cos x$, etcétera. El lector puede verificar con facilidad las fórmulas

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \operatorname{sen} x,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Estas fórmulas se pueden unificar como

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos x,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

que también podemos escribir en forma elegante como

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ n = 0, 1, 2,$$

6.12.3 Derivada de orden k de cos x

Para la función $f(x) = \cos x$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f^{(2)}(x) &= -\cos x \\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Como en el caso de la función seno, de la relación $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$, podemos deducir el patrón de comportamiento de la sucesión de derivadas $f^{(k)}(x)$. De qué función se trata $f^{(k)}(x)$, depende del residuo que se obtenga al dividir k entre 4. Las derivadas de orden impar serán sen x o $-$ sen x y las de orden par serán cos x o $-$ cos x. Más precisamente tenemos

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\operatorname{sen} x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$f^{(2n)}(x) = (-1)^{n}\cos x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Estas fórmulas, que puede verificar el lector, se escriben en forma unificada como

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos x - \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x, \, n = 0, 1, 2, \ldots$$

o también

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \, n = 0, 1, 2, \ldots$$

6.12.4 Derivada de orden k de $f(x) = a^x$ y $\operatorname{Exp}(x) = e^x$

Si $a > 0$, la función exponencial $f(x) = a^x$ puede escribirse $f(x) = a^x = e^{(\log a)x}$. Así, por la regla de la cadena, tenemos

$$f'(x) = e^{(\log a)x}\log a = (\log a)a^x.$$

De esta relación, obtenemos

$$f^{(2)}(x) = (\log a)^2 a^x.$$

De donde, inductivamente se obtiene

$$f^{(n)}(x) = (\log a)^n a^x$$

para todo entero positivo n.

Para el caso particular $a = e$, tenemos $\log e = 1$, por lo que obtenemos la fórmula

$$\operatorname{Exp}^{(n)}(x) = e^x.$$

Un hecho interesante es que la función exponencial es la única función definida en $\mathbb{R}$, cuya derivada de cualquier orden es ella misma, con la condición adicional de que la función en cero tome el valor 1. Todas las funciones de la forma $f(x) = ke^x$, también satisfacen $f^{(n)}(x) = ke^x$ para todo entero positivo n. La condición $f(0) = 1$ solo la cumple $\operatorname{Exp}(x) = e^x$.

La notable fórmula $\operatorname{Exp}^{(n)}(x) = e^x$, que también escribimos

$$\frac{d^n}{dx^n}\, e^x = e^x$$

hace que la función ocupe un lugar especial no sólo en la familia de las funciones elementales sino en la matemática misma.

6.12.5 Derivada de orden k de $\log x$

Como sabemos

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}.$$

Gottfried Wilhelm (1646-1716)



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo, matemático, jurista, lógico y político alemán. Entre sus principales aportaciones a la ciencia destacan la creación y el desarrollo del cálculo diferencial e integral, honor que comparte con Isaac Newton.

En 1666, Leibniz escribió *De arte combinatoria, ensayo de un joven estudiante*, obra en la cual intentó crear un método general con el que todas las verdades de la razón deberían reducirse a una especie de cálculo, con lo que trató de establecer la lógica simbólica, que Boole inventaría hacia mediados del siglo XIX. Leibniz es considerado un pionero en el desarrollo de la lógica matemática.

Hacia 1671 escribió su primera obra sobre mecánica e inventó una máquina de calcular, con el fin de evitar que los astrónomos perdieran demasiado tiempo haciendo sus cálculos aritméticos.

Una de las diferencias notables entre el cálculo de Newton y el de Leibniz fue la notación. Leibniz creó una notación que, si bien fue criticable por carecer de significado preciso, resultó muy eficaz en el desarrollo del cálculo, en particular para la resolución de ecuaciones diferenciales, tema que se desarrolla a la par con el cálculo.

Así que las derivadas sucesivas de la función $\log x$, son derivadas de funciones racionales. Las siguientes derivadas son fáciles de obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log x &= \frac{1}{x}\\
\frac{d^2}{dx^2}\log x &= \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\\
\frac{d^3}{dx^3}\log x &= -\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^3}\\
\frac{d^4}{dx^4}\log x &= \frac{d}{dx}\frac{2}{x^3} = -\frac{6}{x^4}.
\end{aligned}$$

Se invita al lector a que establezca la fórmula para el caso general

$$\frac{d^n}{dx^n}\log x.$$

6.13 Fórmula de Leibniz

Como ya sabemos, la derivada de un producto de dos funciones fg en un punto x, está dada por

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En notación funcional, esta fórmula se escribe

$$(fg)'(x) = (f'g + fg')(x),$$

o sea

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Calculemos la segunda derivada de fg. Usando notación funcional, tenemos

$$\begin{aligned}
(fg)'' &= (f'g + fg')'\\
&= (f'g)' + (fg')'\\
&= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'')\\
&= f''g + f'g' + f'g' + fg''\\
&= f''g + 2f'g' + fg'.
\end{aligned}$$

Ahora, calculemos la tercera derivada

$$\begin{aligned}
(fg)^{(3)} &= (f''g + 2f'g' + fg'')'\\
&= (f''g)' + 2(f'g')' + (fg'')'
\end{aligned}$$

$$= (f^{(3)}g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g'' + fg^{(3)})$$
$$= f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}.$$

Continuando con este proceso, es posible obtener la fórmula para la derivada de orden n

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g^{(1)}) + \frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}g^{(2)} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(1)}{(n-1)!}f^{(1)}g^{(n-1)} + fg^{(n)}.$$

Los coeficientes de la expresión anterior son los binomiales, por tanto, la fórmula se puede escribir en notación sigma como

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

En esta fórmula convenimos que $f^{(0)}$ representa la función f.

La expresión anterior es conocida como **fórmula de Leibniz** y tiene una forma similar al desarrollo binomial de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Ejemplo 30

Hallemos la derivada de orden n de la función $h(x) = e^x$ sen x. Para tal efecto, apliquemos la fórmula de Leibniz haciendo $f(x) = e^x$ y $g(x) =$ sen x. Sabemos que

$$f^{(k)}(x) = e^x \text{ y } g^{(k)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Por tanto, de la fórmula de Leibniz obtenemos

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\\ \frac{d^n}{dx^n}(e^x \operatorname{sen} x) &= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k} e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\\ &= e^x\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 31

Usando la fórmula de Leibniz calculemos la derivada de orden n de la función $h(x) =$ sen x cos x. Hagamos $f(x) =$ sen x y $g(x) =$ cos x. En este caso, para todo entero positivo k, tenemos:

$$f^{(k)}(x) = \operatorname{sen}^{(k)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \text{ y } g^{(k)}(x) = \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Por consiguiente, de la fórmula de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\\ \frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen} x\cos x) &= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(x + \frac{(n-k)\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$h(x) = \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

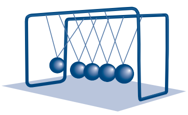
Como ejercicio para el lector, se pide que obtenga la fórmula

$$h^{(k)}(x) = 2^{k-1} \operatorname{sen}\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

para todo entero positivo k. De hecho, la fórmula vale también para $k = 0$.
Comparando ambas fórmulas, obtenemos

$$2^{k-1}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{(n-k)\pi}{2}\right).$$

6.14 Problemas y ejercicios



I. Halle la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$

2. $f(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$

3. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

4. $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$

5. $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$

6. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{3t^2 + 1}{t - 1}$

9. $f(v) = \dfrac{v^3 - 2v}{v^2 + v + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

11. $f(x) = \dfrac{2}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3\left(x^2 - 1\right)} + (x^2 - 1)(1 - x)$

13. $f(v) = \dfrac{v^5}{v^3 - 2}$

14. $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

15. $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 1}$

16. $f(v) = \dfrac{v^2 - v + 1}{a^2 - 3}$

17. $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{\sqrt{\pi}}$

18. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + t + 1}$

19. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 3t + 6}$

20. $f(x) = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$

21. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$

22. $f(x) = \dfrac{3}{\left(1 - x^2\right)\left(1 - 2x^3\right)}$

23. $f(x) = \dfrac{ax + bx^2}{am + bm^2}$

24. $f(m) = \dfrac{ax + bx^2}{am + bm^2}$

25. $f(x) = \dfrac{a^2b^2c^2}{\left(x - a\right)\left(x - b\right)\left(x - c\right)}$

26. $f(x) = (x^2 + 1)^4$

27. $f(x) = (1 - x)^{20}$

28. $f(x) = (1 + 2x)^{30}$

29. $f(x) = (1 - x^2)^{10}$

30. $f(x) = (5x^3 + x^2 - 4)^5$

31. $f(x) = (x^3 - x)^6$

32. $f(x) = \left(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6\right)^6$

33. $f(t) = \left(t^3 - \dfrac{1}{t} + 3\right)^4$

34. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

35. $f(x) = \left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$

36. $f(x) = (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)^4$

37. $f(v) = \dfrac{(v+4)^2}{v+3}$

38. $f(v) = \left(\dfrac{v}{1-x}\right)^m$

39. $f(v) = \left(\dfrac{x}{1-v}\right)^m$

40. $f(t) = \dfrac{t^3}{(1-t)^2}$

41. $f(x) = \dfrac{x^{10}+1}{1-x}$

42. $f(x) = x^{9.9} + x^{10.1}$

43. $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$

44. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

45. $f(x) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$

46. $f(x) = (\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$

47. $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$

48. $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$

49. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$

50. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

51. $f(x) = (1 + 2\sqrt{x})^4$

52. $f(x) = \sqrt[3]{xk^4}$

53. $f(x) = (\sqrt{x^3} + x)(x - \sqrt[5]{x})$

54. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

55. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$

56. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$

57. $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

58. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$

59. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

60. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

61. $f(x) = x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

63. $f(v) = \dfrac{1}{v - \sqrt{a^2 + v^2}}$

64. $f(x) = a\sqrt{x} - \dfrac{b}{\sqrt{x}}$

65. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$

66. $f(x) = \sqrt{\dfrac{a}{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{a}}$

67. $f(x) = \sqrt{\dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a}}$

II. Realice los siguientes ejercicios.

68. Sabiendo que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

halle una fórmula para

$$g(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \frac{nx^{n+1} - 1}{x - 1}$$

69. Derive la función

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{1!(n+2)} + \frac{x^3}{2!(n+3)} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{(p-1)!(n+p)}\right]$$

III. Derive las siguientes funciones.

70. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

71. $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$

72. $f(x) = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x$

73. $f(x) = \frac{x}{1 - \cos x}$

74. $f(x) = \tan x + \cot x$

75. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

76. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

77. $f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \tan x}$

78. $f(x) = \frac{1}{4}\tan^4 x$

79. $f(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

80. $f(x) = 3\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^3 x$

81. $f(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

82. $f(x) = x\sec^2 x - \tan x$

83. $f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$

84. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

85. $f(x) = a\cos\frac{x}{3}$

86. $f(x) = 3\operatorname{sen}(3x + 5)$

87. $f(x) = \tan\frac{x+1}{2}$

88. $f(x) = \sqrt{1 + 2\tan x}$

89. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

90. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

91. $f(x) = \cos^3 4x$

92. $f(x) = \sqrt{\tan\frac{x}{2}}$

93. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{1 + x^2}$

94. $f(x) = \cot\sqrt[3]{1 + x^2}$

95. $f(x) = (1 + \operatorname{sen}^2 x)^4$

96. $f(x) = \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

97. $f(x) = \cos^2\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

98. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 3x)$

99. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x^2)$

100. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

101. $f(x) = \tan(\tan x))$

IV. Deduzca las fórmulas siguientes.

102. $(\operatorname{sen}^n x \cos nx)' = n\operatorname{sen}^{n-1} x\cos(n+1)x$

103. $(\operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} nx)' = n\operatorname{sen}^{n-1} x\operatorname{sen}(n+1)x$

104. $(\cos^n x \operatorname{sen} nx)' = n\cos^{n-1} x\cos(n+1)x$

105. $(\cos^n x \cos nx)' = -n\cos^{n-1} x\operatorname{sen}(n+1)x$

V. Resuelva lo que se le pide.

106. Partiendo del hecho de que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + h) + \cdots + \operatorname{sen}(x + nh) = \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{nh}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}h}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$$

Obtenga una fórmula para la suma

$$\cos x + \cos(x + h) + \cdots + \cos(x + nh)$$

VI. Derive las siguientes funciones.

107. $f(x) = \arctan x^2$

108. $f(x) = (\arctan x)^2$

109. $f(x) = \arctan(\tan x)$

110. $f(x) = \tan(\arctan x)$

111. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$

112. $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$

113. $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$

114. $f(x) = \dfrac{x \tan x - \cos x}{\log x}$

115. $f(x) = x \log x$

116. $f(x) = x^n \log x$

117. $f(x) = \dfrac{\log x}{x^n}$

118. $f(x) = \log [\cos x]$

119. $f(x) = \cos (\log x)$

120. $f(x) = \log (\operatorname{sen} x)$

121. $f(x) = \log (\operatorname{sen}^2 x)$

122. $f(x) = \log (\operatorname{sen} x^2)$

123. $f(x) = \log^2 (\operatorname{sen} x)$

124. $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}}$

125. $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$

126. $f(x) = \log (\log x)$

127. $f(x) = \log (\log (\log x))$

128. $f(x) = e^{3x^2 + 1}$

129. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

130. $f(x) = e^{x \cos(x)}$

131. $f(x) = \log^2 (1 + e^x)$

132. $f(x) = x \tan x + \log \cos x - \dfrac{x^2}{2}$

133. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

134. $f(x) = xe^x$

135. $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$

136. $f(x) = e^x \tan \dfrac{x}{2}$

VII. Resuelva lo que se le pide.

137. Las funciones

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ y } \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

se llaman respectivamente *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*. Halle sus derivadas y compare los resultados con las derivadas

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x \text{ y } \frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

138. Encuentre las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, todas hiperbólicas, definidas como

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

139. Halle la derivada de $f(x) = \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

VIII. Recuerde que, por definición, $v(x)^{u(x)} = e^{u(x) \log v(x)}$. También tenemos que $u = \log_a v$ significa $a^u = v$, así que $u \log a = \log v$, o sea $\log_a v = \dfrac{\log v}{\log a}$. Derive las siguientes funciones.

140. $f(x) = x^x$

141. $f(x) = x^{x^2}$

142. $f(x) = e^{e^x}$

143. $f(x) = e^{x^x}$

144. $f(x) = x^{x^x}$

145. $f(x) = (e^x)^x$

146. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

147. $f(x) = \operatorname{sen}(x^{\cos x})$

148. $f(x) = \operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})$

149. $f(x) = e^{x^{\cos x}}$

150. $f(x) = (e^x)^{\cos x}$

151. $f(x) = \log_a b^x \qquad (a, b > 0)$

152. $f(x) = \log_x x$

153. $f(x) = \log_{e^x} x$

154. $f(x) = \log_{ax} x \qquad (a > 0)$

155. $f(x) = \log_x e^x$

156. $f(x) = \log_{u(x)} v(x)$

157. $f(x) = \log \log \log x$

158. Halle las derivadas de las siguientes funciones y compare los resultados.

a) $f(x) = \cos^2 x$
b) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$

159. Halle las derivadas de las siguientes funciones y compare los resultados.

a) $f(x) = \tan^2 x$
b) $g(x) = \sec^2 x$

160. Halle las derivadas de las siguientes funciones y compare los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$
b) $g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

c) $h(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

d) $F(x) = \cos 2x$

e) $G(x) = 2\cos^2 x - 1$

f) $H(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 4x}{2}}$

161. Compare las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2} \operatorname{arcsen} \dfrac{2x}{1 + x^2}$

b) $g(x) = 2 \arctan x$

162. Compare las derivadas de las siguientes funciones.

a) $F(x) = \dfrac{1}{4} \arctan \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{3 + 5 \cos x}$

b) $G(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2} \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}\right)$

163. Compare las derivadas de las siguientes funciones.

a) $F(x) = \log \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

b) $G(x) = \log\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right)$

164. Sea f definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$.

165. Sea $\phi(x)$ discontinua en $x = 0$ tal que no existe $\lim_{x \to 0} \phi(x)$. Supongamos que ϕ está acotada en alguna vecindad de este punto. Definimos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x\phi(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f(x)$ es continua en cero, pero no derivable en ese punto.

166. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, demuestre que

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

167. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, demuestre que

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(x) - af(a)}{x - a} = f(a) + af'(a)$$

168. Recordemos que una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x y es impar si $f(-x) = -f(x)$. Demostrar que la derivada de una función par es impar, mientras que la derivada de una función impar es par.

169. Halle una fórmula para la segunda derivada de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

170. Halle una fórmula para la tercera derivada de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

171. Halle una fórmula para la derivada de

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

172. Halle una fórmula para la segunda derivada de

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

173. Demuestre que, en general, $(fg)' \neq f'g'$

IX. La derivada de $g(x) = \log f(x)$ es igual a $\frac{f'}{f}$, esta expresión se llama *derivada logarítmica* de f (que es la derivada de su logaritmo). A menudo es más fácil calcular la derivada de g que la derivada de f, debido a que los productos que aparecen en f se convierten en sumas para g. La derivada de f se puede recobrar simplemente multiplicando por f la derivada de g:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f'(x) = f(x)g'(x)$$

sea

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))'$$

Este proceso se llama *derivación logarítmica*.

Usando derivación logarítmica, encuentre la derivada de f en cada uno de los siguientes casos

174. $f(x) = (x-1)(x-2)\ \ldots\ (x-10)$

175. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\ \ldots\ \operatorname{sen} nx$ (n entero positivo)

176. $f(x) = \dfrac{(1-x)^{\frac{3}{2}}(\ -1)^2}{\sqrt{1+2x^2}\ (x^3-2)}$

177. $f(x) = \dfrac{u_1(x)\ u_2(x)\ldots u_n(x)}{v_1(x)\,v_2(x)\ldots v_m(x)}$

178. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

179. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre $f^{(4)}(x)$ para toda x.

X. Sea k un entero positivo. Obtener las derivadas de orden k de las siguientes funciones.

180. $f(x) = (a - bx)^m$

181. $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$

182. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

183. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

184. $f(x) = \operatorname{sen} ax$

185. Sea $f(x) = x^{-n}$ donde n es un entero positivo. Demuestre que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}\, x^{-n-k}$$

186. Sea $f(x) = x^6 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demuestre que existen las derivadas sucesivas $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$. Pruebe también que no existe $f^{(4)}(0)$.

187. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es no derivable en $x = 0$.

188. Sea la función $f(x) = |x^3|$. ¿Es derivable en $x = 0$? ¿Es f dos veces derivable en $x = 0$?

189. Responda las mismas preguntas planteadas en el problema anterior para la función $f(x) = |x^5|$.

190. Averiguar si la función $f(x) = e^{-|x|}$ es derivable en $x = 0$.

191. Sea $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = (0)$.

¿Es continua en $x = 0$? ¿Es derivable en ese mismo punto?

192. Sea f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pruebe que f es derivable en $x = 1$. ¿Es f' continua en $x = 1$?

193. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3x - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Obtenga $f'(x)$ y diga si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas.

194. Sea $f(x) = |\operatorname{sen} x|$. Demuestre que f es no derivable en $x = 0$. ¿Existen otros valo-

res de x para los cuales la función sea no derivable?

XI. Sean f y g dos funciones cualesquiera. La función

$$\max(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

en cada x es igual al mayor de los valores $f(x)$ y $g(x)$. Similarmente, la función

$$\min(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

es igual al menor de los valores $f(x)$ y $g(x)$.

195. Bosqueje la gráfica de la función

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|}{2}$$

y calcule su derivada. ¿En qué puntos no es derivable?

196. Haga lo mismo que en el problema anterior para la función

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x + |\operatorname{sen} x - \cos x|}{2}$$

197. Sea $f(x) = x|x|$. Grafique y calcule la derivada de la función

$$F(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} = \frac{x\,|x| + x^2}{2}$$

198. Pruebe que la función

$$f(x) = \frac{x^3 + |x|^3}{2}$$

es dos veces derivable y calcule ambas derivadas. Grafique la función.

199. Grafique y halle la derivada de la función

$$\min(x^3, x^2) = \frac{x^3 - x^2 - |x^3 - x^2|}{2}$$

CAPÍTULO 7

LA DERIVADA APLICADA AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES



7.1 Tangente de una curva

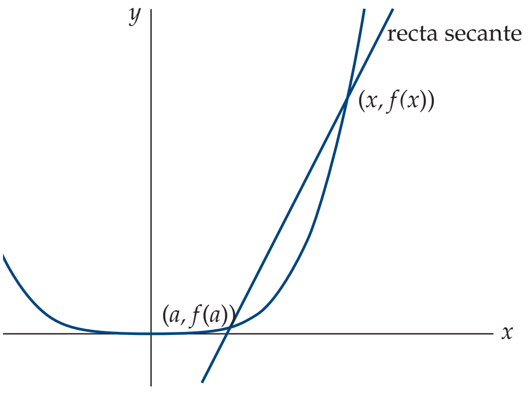
Por definición, como ya vimos, la derivada de una función f en un punto a es la razón de cambio instantánea de la función respecto de su variable y está dada por el límite.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

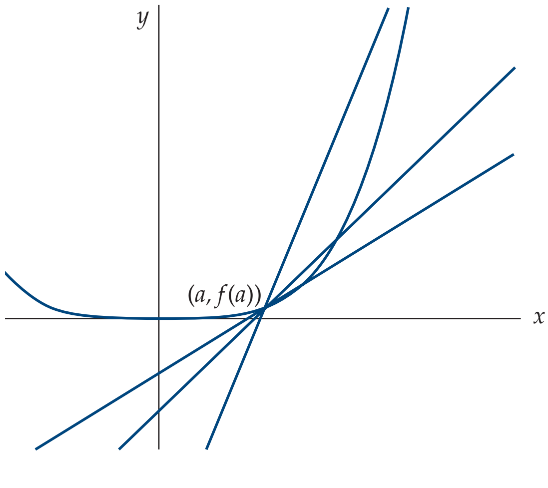
El cociente de diferencias

$$m(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

la cual, además de ser la razón de cambio promedio, también podemos interpretarla como la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f, que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$, como lo muestra la siguiente figura.



Para cada x tenemos una recta secante; al variar x varía la recta secante. Debido a que la pendiente de esta depende del punto x, es preferible denotar la pendiente m por $m(x)$. La derivada de f en a es el límite de estas pendientes $m(x)$ cuando x tiende al punto a. En la siguiente figura ilustramos algunas de las rectas secantes.



Cuando el punto x tiende al punto a, el punto $(x, f(x))$ tiende al punto $(a, f(a))$ y las rectas secantes tienden a una determinada posición, vale decir que tienden a una recta. A esta la llamaremos recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Definición

La **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} m(x).$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente es

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ejemplo 1

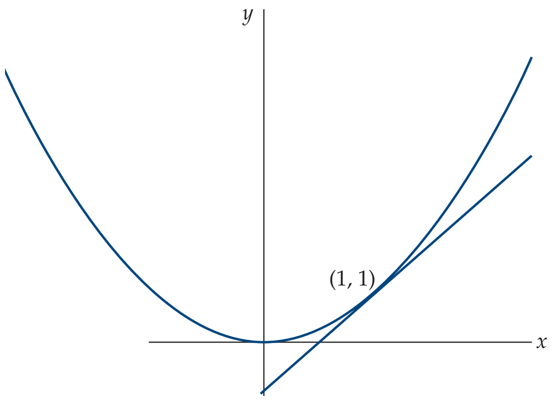
Hallemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

En este caso $a = 1$ y $f'(1) = 2$, por lo que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es

$$y = 2(x - 1) + 1,$$

o sea

$$y = 2x - 1.$$



En general, puesto que la derivada de $f(x) = x^2$ en un punto arbitrario a está dada por $f'(a) = 2a$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $(a, f(a))$ está dada por

$$y = 2a(x - a) + a^2,$$

o sea

$$y = 2ax - a^2.$$

Ejemplo 2

Sea n un entero positivo, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^n$ en un punto arbitrario (a, a^n).

La pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (a, a^n) está dada por la derivada $f'(a) = na^{n-1}$. Entonces, la ecuación de esta tangente es

$$y = na^{n-1}(x - a) + a^n,$$

o sea

$$y = na^{n-1}x - na^n + a^n$$

$$y = na^{n-1}x + (1 - n)a^n.$$

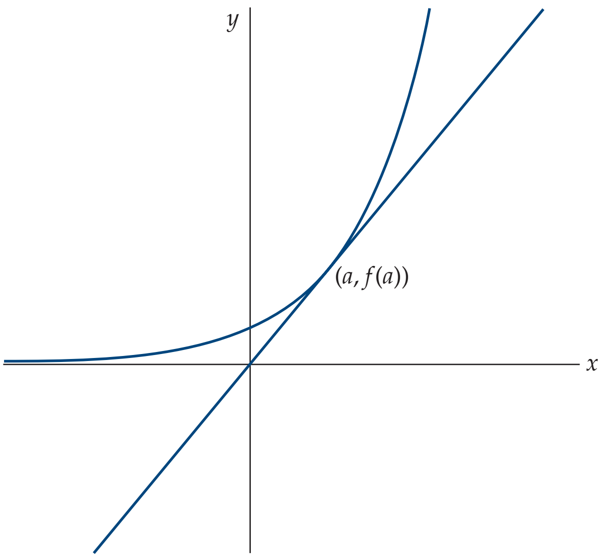
Ejemplo 3

Sea $f(x) = e^x$. La derivada en cualquier punto a está dada por $f'(a) = e^a$, así que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto (a, e^a) es

$$y = e^a(x - a) + e^a,$$

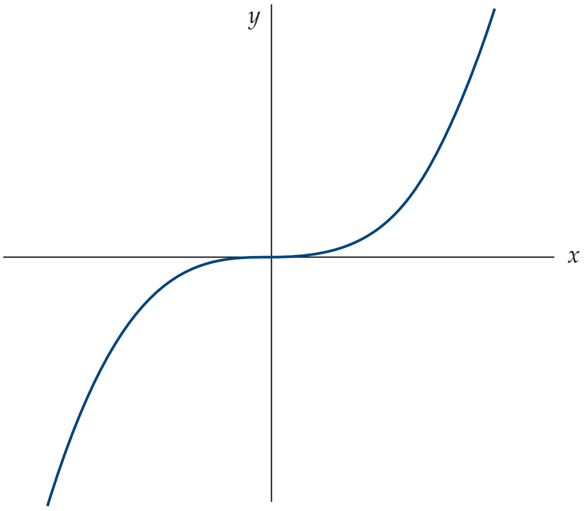
o sea

$$y = e^a x + e^a(1 - a).$$



Ejemplo 4

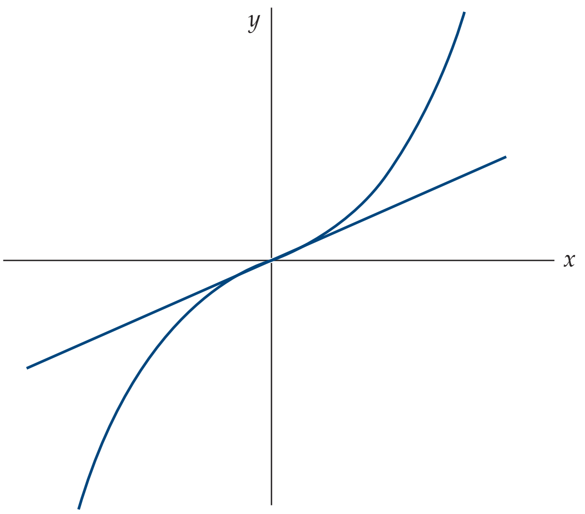
Sea $f(x) = x^3$. Determinemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(0, 0)$. En el punto $a = 0$, la derivada vale cero, por lo que se trata de la recta horizontal que pasa por el origen. La ecuación de esta recta es $y = 0$.



Observe que en este caso la recta tangente cruza a la curva en el punto de tangencia.

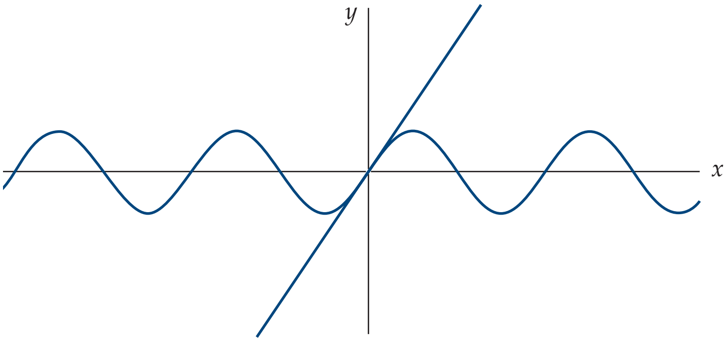
Ejemplo 5

Sea $f(x) = x^3 + x$. La gráfica de esta función es muy similar a la del ejemplo anterior, sin embargo en el punto $a = 0$, la derivada vale 1, por lo que la recta tangente en el punto (0, 0) tiene pendiente 1 y su ecuación es $y = x$. Como en el caso anterior, la recta tangente en (0, 0) cruza a la gráfica en ese punto.



Ejemplo 6

Sea $f(x) = sen\ x$. Puesto que la derivada de f en el punto $a = 0$ es $f'(a) = \cos a = \cos 0 = 1$, la recta tangente a la gráfica en el punto (0, 0) tiene pendiente 1, por lo que su ecuación es $y = x$. Esta recta corta a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\ x$ en el punto (0, 0).



Ejemplo 7

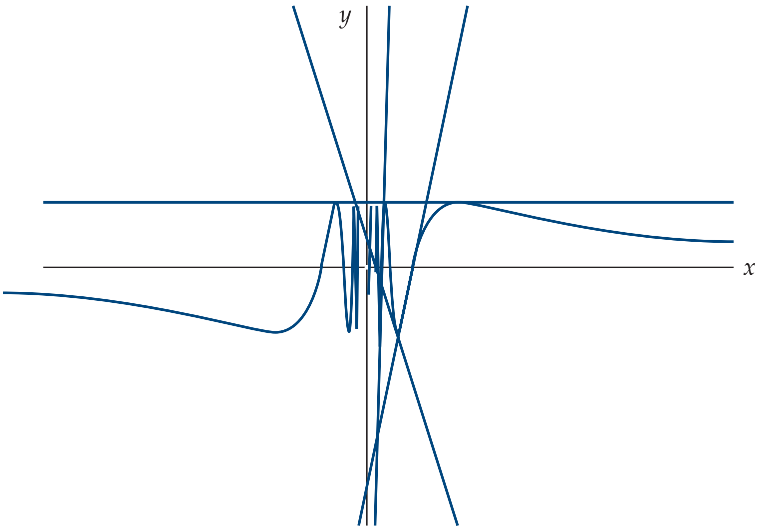
Sea

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Esta función es no derivable en $a = 0$, ni siquiera es continua, por lo que no tiene recta tangente en el punto $(0, 0)$. En los demás puntos a, la derivada está dada por $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}\cos\dfrac{1}{a}$, por esa razón en los puntos $(a, f(a))$, con $a \neq 0$, la recta tangente tiene por ecuación

$$y = -\frac{1}{a^2}\cos\frac{1}{a} \cdot (x - a) + \operatorname{sen}\frac{1}{a}.$$

En la siguiente gráfica se ilustran algunas de estas tangentes.



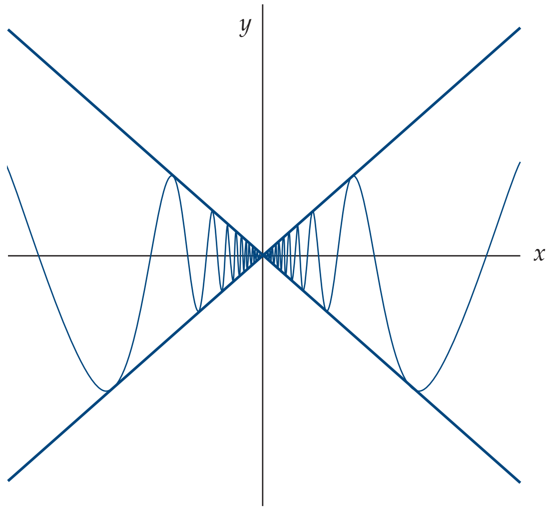
En los dos ejemplos siguientes analizamos las funciones $x \text{ sen } \frac{1}{x}$ y $x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}$. Dichas funciones las estudiamos en el capítulo anterior, sin embargo ahora las analizamos con mayor profundidad.

Ejemplo 8

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Esta función, a diferencia de la del ejemplo anterior es continua en $a = 0$ y es no derivable en este punto (como ya analizamos en el ejemplo 27 del capítulo 6), por lo que tampoco tiene recta tangente en el punto (0, 0).



En los demás puntos a, la derivada está dada por $f'(a) = -\,\text{sen}\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\cos\frac{1}{a}$. Por su parte, la recta tangente en los puntos $(a, f(a))$ tiene por ecuación

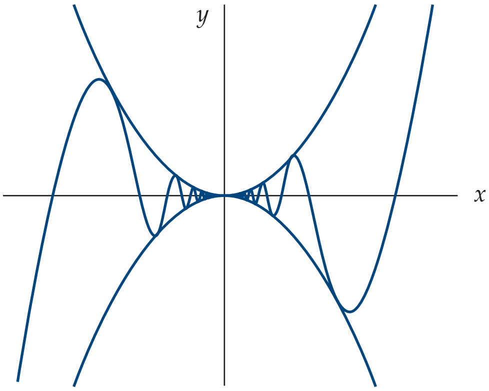
$$y = f'(a)(x - a) + \text{sen}\frac{1}{a}.$$

Ejemplo 9

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Esta función es continua en $a = 0$ y también es derivable en ese punto. En el ejemplo 26 del capítulo 6 obtuvimos $f'(0) = 0$, por lo que la recta tangente en el punto (0, 0) tiene por ecuación $y = 0$.

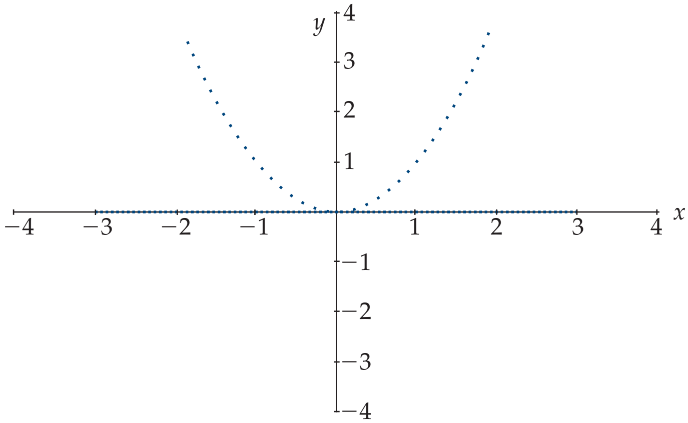


Es interesante comparar las gráficas de las funciones x sen $\frac{1}{x}$ y x^2 sen $\frac{1}{x}$. En la primera de estas, la función sen $\frac{1}{x}$ está "modulada" por $y = |x|$ y $y = -|x|$, mientras que en la segunda lo está por las parábolas $y = x^2$ y $y = -x^2$. Cerca del cero, la parábola comprime más a la función sen $\frac{1}{x}$, así, en cierto sentido, "suaviza" la gráfica de sen $\frac{1}{x}$, mientras que $y = |x|$ y $y = -|x|$, aunque la comprimen, no la suavizan. Por esta razón, la gráfica de la función x^2 sen $\frac{1}{x}$ tiene tangente en (0, 0), pero no así la gráfica de x sen $\frac{1}{x}$. En términos estrictos, debemos hablar de las funciones dadas por esas fórmulas para $x \neq 0$ y que toman el valor cero en $x = 0$.

Ejemplo 10

Ya vimos en el ejemplo 27 del capítulo 6 que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$



Es discontinua en todos los reales diferentes de cero, por lo que no es derivable en esos puntos. El único punto de continuidad es $x = 0$, de hecho en este la función es derivable y $f'(0) = 0$, así que esta función tiene definida su recta tangente en el punto (0, 0). La recta tangente en este punto tiene por ecuación $y = 0$, se trata de la recta que coincide con el eje de las abscisas. Es interesante notar que aun cuando no es una curva suave, la gráfica de esta función tiene definida su recta tangente en el punto (0, 0).

7.2 Máximos y mínimos

Una de las aplicaciones de la derivada es a la resolución de problemas de optimización, en especial cuando estas se traducen en la determinación de los valores máximos y mínimos de alguna función. Por esta razón, estudiaremos algunos conceptos y resultados relacionados con el comportamiento de las funciones, así como con sus valores máximos y mínimos.

Definición

Sea f una función definida en algún intervalo I con interior no vacío; este puede ser abierto, cerrado o semiabierto. Decimos que f tiene un **valor máximo local** o un **valor máximo relativo** en un punto a de I, si existe un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo punto $x \in I$ que pertenezca a $(a - r, a + r)$. De forma similar, f tiene un **valor mínimo local** o un **valor mínimo relativo** en a, si existe $(a - r, a + r)$ tal que $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in I$ que pertenezca a $(a - r, a + r)$. El punto a puede ser interior o extremo del intervalo I. La función f tiene un **valor máximo global** o un **valor máximo absoluto** en a si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in I$. Finalmente, f tiene un **valor mínimo global** o un **valor mínimo absoluto** en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in I$.

Nota

Los conceptos anteriores no se excluyen lógicamente. De hecho, si una función tiene un valor máximo absoluto en un punto, entonces tiene un valor máximo relativo en ese mismo punto. De la misma manera, en todo punto donde una función tiene un mínimo absoluto, también tiene un mínimo relativo. Nuestra definición permite que una función pueda tener un máximo local y un mínimo local en un mismo punto, este es el caso del siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

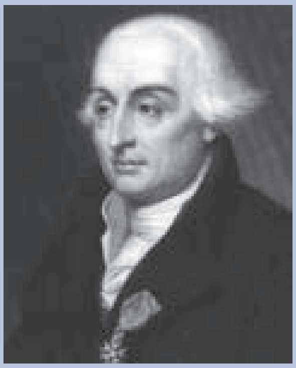
Toda función constante tiene un valor máximo global y un mínimo global en cada punto de su dominio.

Ejemplo 12

La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo global en el punto $a = 0$. En efecto,

$$0 \leq x^2 \text{ para toda } x \text{ real.}$$

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813)



Astrónomo y matemático francés. Durante su época escolar llegó a sus manos una obra del astrónomo Edmund Halley (quien dio su nombre a un cometa), hecho que despertó su interés por la matemática. En julio de 1754 publicó, bajo la forma de una carta escrita en italiano, su primer trabajo matemático sobre una analogía entre el teorema del binomio y las derivadas sucesivas del producto de funciones. Un mes antes de ser publicado, Lagrange envió a Euler el documento escrito en latín.

A finales de 1754 hizo descubrimientos importantes respecto al problema de la tautócrona, los cuales contribuyeron de forma sustancial al cálculo de variaciones. Lagrange envió a Euler sus resultados de la tautócrona, en los que incluyó, además, su método de máximos y mínimos, un mes más tarde Euler respondió comentando lo impresionado que estaba con sus aportaciones. A los 19 años, Lagrange tenía el puesto de profesor de matemáticas en la Escuela de Artillería Real de Turín. Lagrange publicó diversas obras que contemplaban una amplia variedad de temas, entre ellos cálculo de variaciones, cálculo de probabilidades, teoría de la cuerda vibrante, integración de ecuaciones diferenciales, métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales y el estudio de las órbitas de Júpiter y Saturno.

Entre 1772 y 1788, Lagrange reformuló la mecánica clásica de Isaac Newton para simplificar fórmulas y facilitar los cálculos, la cual recibió el nombre de mecánica lagrangiana o mecánica analítica. También en este periodo escribió su gran tratado de mecánica analítica.

Con el advenimiento de la Revolución Francesa, Lagrange tuvo oportunidad de desarrollar, por encargo, un sistema de pesas y medidas, que derivó en el sistema métrico decimal. En 1797, publicó la primera teoría de funciones de una variable real. Lagrange era de complexión débil, carácter nervioso y tímido, evitaba la controversia, lo que permitió a otros adjudicarse cosas que él había hecho.

O sea

$$f(0) \leq f(x) \text{ para toda } x \text{ real.}$$

7.2.1 Primer criterio para máximos y mínimos

En el capítulo 5 (Límite y continuidad) vimos que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo global y un valor mínimo global. Ahora, estudiaremos la naturaleza de esos puntos cuando la función es derivable en ellos.

Teorema (Primer criterio para máximos y mínimos)

Sean $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$ donde f alcanza un valor máximo o un valor mínimo local. Si f es derivable en x_0, entonces, $f'(x_0) = 0$.

Demostración

Supongamos el caso en el que f alcanza un valor máximo en x_0. La prueba del otro caso es muy similar y se deja como ejercicio para el lector.

Por definición de la derivada de f en x_0 se tiene

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Por otra parte, dado que f tiene un valor máximo en x_0, existe un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ tal que se cumple $f(x) \leq f(x_0)$ para toda $x \in [a, b]$ que pertenezca a este intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$. Como el punto x_0 pertenece al intervalo abierto (a, b), podemos elegir el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ que esté completamente contenido en el intervalo abierto (a, b). Si x_0 fuese uno de los extremos a o b, no podría hacerse esto.

Entonces, supongamos que el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ está contenido en (a, b).

De esta forma, tenemos que para toda $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ se cumple $f(x) \leq f(x_0)$. Por tanto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ si } x_0 < x < x_0 + r$$

y

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ si } x_0 - r < x < x_0.$$

Luego, los límites laterales satisfacen las desigualdades

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

y

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Pero, dado que f es derivable en x_0, ambos límites laterales deben ser iguales

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La única manera de conciliar las dos desigualdades es que ambos límites sean iguales a cero:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,.$$

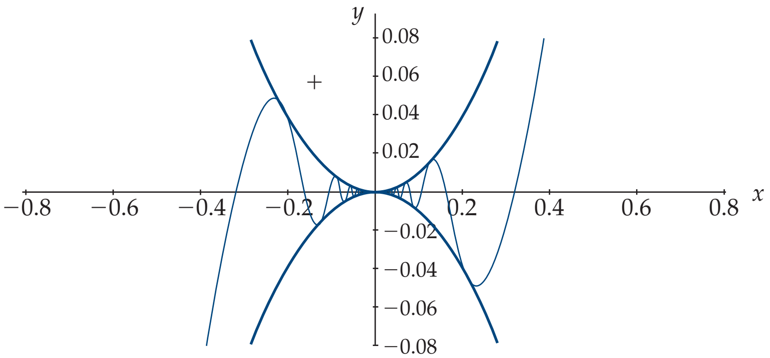
Esto prueba el teorema.

Aunque resulte ociosa nuestra aclaración, cabe precisar que en el primer criterio para máximos y mínimos es muy importante la hipótesis de que la función sea derivable en el punto x_0, pues en caso contrario ni siquiera tendría sentido hablar de $f'(x_0)$. Por ejemplo, la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$, tiene un valor mínimo global en $x_0=0$, pero en ese punto no se cumple $f'(x_0)=0$.

La condición $f'(x_0)=0$ es necesaria, pero no suficiente para que f tenga un máximo o un mínimo. Es decir, se puede cumplir la condición $f'(x_0)=0$ sin que f tenga un máximo o un mínimo en x_0. Por ejemplo, la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3$, no tiene ni máximo ni mínimo en $x_0=0$, sin embargo $f'(0)=0$. Un ejemplo más interesante es la función $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

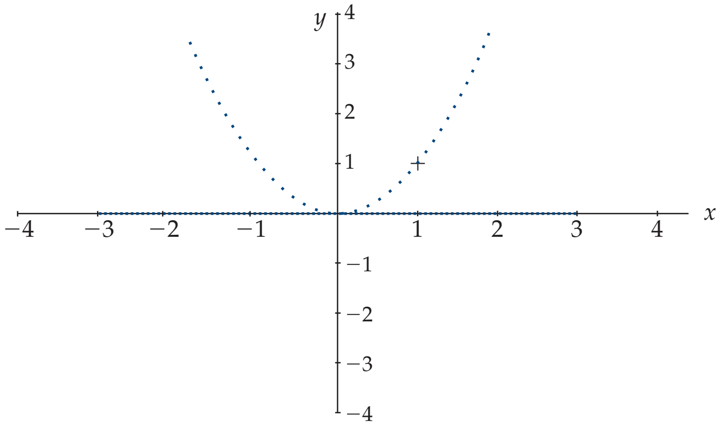
$$F(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{si } x\neq 0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$$

Como ya vimos en el capítulo 6, esta función es derivable en $x_0=0$ y $F'(0)=0$, sin embargo F no tiene ni máximo ni mínimo en este punto.



Otra función interesante es

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional}\\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}$$



la cual conocimos y analizamos en el capítulo 6. Esta función tiene un mínimo en $x_0 = 0$, de hecho tiene un mínimo en cada punto irracional; sin embargo, $x_0 = 0$ es el único punto donde f es derivable, así que de todos los puntos en donde la función tiene un mínimo, $x_0 = 0$ es el único donde la derivada vale cero.

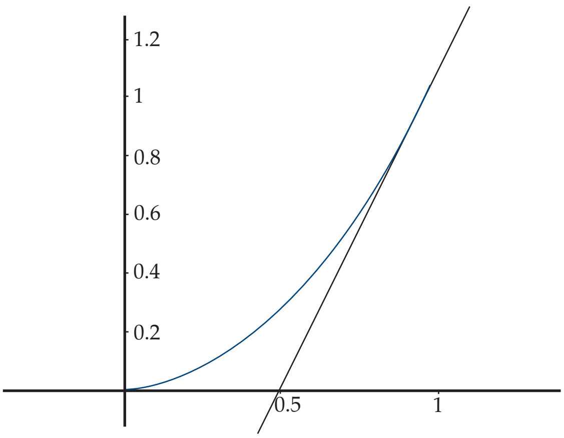
Los puntos donde la derivada tiene el valor cero, son de tal importancia en el estudio de las funciones que los distinguiremos dándoles un nombre especial.

Definición

Decimos que x_0 es **punto crítico** de una función f si $f'(x_0) = 0$.

Según el teorema anterior, si una función f tiene un máximo local o un mínimo local en un punto x_0 interior de su dominio, entonces x_0 es un punto crítico.

En el teorema anterior es muy importante la hipótesis de que el punto x_0 donde la función f alcanza un valor máximo o un valor mínimo sea interior del intervalo $[a, b]$. Si x_0 es un extremo de este intervalo, la función puede tener un máximo o un mínimo en x_0 sin que necesariamente se cumpla $f'(x_0) = 0$. Por ejemplo, la función $f:[0, 1]\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ tiene un valor máximo en $x = 1$, pero su derivada en ese punto es igual a 2.



El siguiente teorema es una versión mejorada del primer criterio para máximos y mínimos, pues ahora también se consideran los extremos del intervalo.

Teorema

Sea $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $x_0 \in [a, b]$. Supóngase que f tiene un máximo o un mínimo en x_0.

i) Si $x_0 \in (a, b)$ y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.
ii) Si $x_0 = a$ y f tiene derivada por la derecha $f'(a)$ entonces $f'(a) \leq 0$ cuando $f(a)$ es un valor máximo y $f'(a) \geq 0$ cuando $f(a)$ es un valor mínimo.
iii) Si $x_0 = b$ y f tiene derivada por la izquierda $f'(b)$ entonces $f'(b) \leq 0$ cuando $f(b)$ es un valor mínimo y $f'(b) \geq 0$ cuando $f(b)$ es un valor máximo.

La demostración es completamente similar a la del teorema anterior.

7.3 Teoremas del valor medio

Hemos llegado a la parte más importante del cálculo diferencial, a los teoremas con los que culmina la teoría sobre la derivada que hemos desarrollado a lo largo de los capítulos previos.

Los teoremas que estableceremos en esta sección son el recurso para el estudio de las funciones. Todos ellos se desprenden de dos básicos, el que hemos llamado primer criterio para máximos y mínimos de la sección anterior y el teorema de Rolle que estudiaremos ahora. Ambos tienen enunciados muy simples y son fáciles de recordar y aceptar (aun sin demostración) pues tienen una interpretación geométrica que responde cabalmente a nuestra intuición.

El teorema de Rolle es el pilar e inicio de una amplia gama de resultados que nos permiten conocer las funciones. Por ejemplo, estos resultados son el recurso de quienes programan las calculadoras científicas para que grafiquen funciones o para que hallen los valores de las funciones en puntos particulares. Por ejemplo, con una calculadora de $10.00 que se consigue en cualquier tienda de artículos escolares, incluso con los vendedores del Metro de la Ciudad de México, calculadoras que solo realizan las cuatro operaciones básicas, suma, resta multiplicación y división, usted podrá calcular sin dificultad el valor de la función $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ en $x = \dfrac{3}{2}$, pero, ¿cómo calcularía $\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}$ o $e^{1.25}$ con una de estas calculadoras?, por supuesto, al menos obtener una aproximación, que es lo que nos proporcionan las calculadoras científicas o software sofisticado de matemáticas de las computadoras de escritorio. Después de estudiar este capítulo usted descubrirá estos misteriosos métodos que se utilizan. Enunciemos y probemos el primer teorema.

7.3.1 Teorema (de Rolle)

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Michel Rolle (1652-1719)

Matemático francés célebre por el importante teorema del cálculo que ahora lleva su nombre. Sin embargo, Rolle fue un fuerte opositor al cálculo, pues lo describía como una colección de ingeniosas falacias. Probó su famoso teorema con técnicas algebraicas, el cual dio a conocer en 1691. Rolle también introdujo la notación $\sqrt[n]{x}$ para la raíz de orden n de x y publicó un tratado de álgebra dedicado a la teoría de ecuaciones.

Demostración

Probemos que f siempre tiene un valor extremo (máximo o mínimo), el cual alcanza en un punto interior del intervalo $[a, b]$, es decir en un punto del intervalo abierto (a, b). Del primer criterio para máximos y mínimos se seguirá que en ese punto la derivada vale cero. Dada la condición $f(a) = f(b)$, pueden ocurrir dos cosas, la primera de ellas es que la función sea una constante, en cuyo caso $f'(x) = 0$ para toda $x \in [a, b]$ y ciertamente habrá un punto $x_0 \in (a, b)$, donde la derivada vale cero. El segundo caso es cuando f es no constante. Entonces en algún punto la función tomará un valor mayor o menor que $c = f(a) = f(b)$. Supongamos que f toma un valor mayor que c en algún punto de (a, b). Entonces, siendo f continua, alcanza un valor máximo en el intervalo $[a, b]$, y necesariamente en un punto del intervalo (a, b). Si la función toma un valor menor que c, entonces f alcanza un valor mínimo en un punto de (a, b). En cualquiera de los casos tendremos que hay un punto donde la derivada toma el valor cero. Hemos probado el teorema.

7.3.2 Teorema (del valor medio de Lagrange)

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración

Definamos $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta función cumple con las condiciones del teorema de Rolle, pues es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b); además, es claro que $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$, por lo que $F(a) = F(b)$. Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Como para toda $x \in (a, b)$ se tiene

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de la condición $F'(x_0) = 0$ obtenemos

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

o sea

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

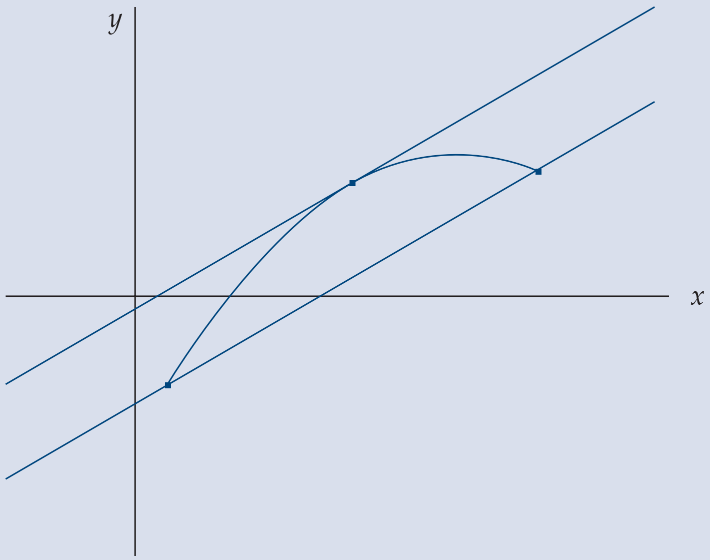
Esto prueba el teorema.

Nota

El miembro derecho de la fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

es igual a la pendiene de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así que el teorema dice que hay un punto $(x_0, f(x_0))$ sobre la gráfica de f donde la tangente es paralela a la secante.



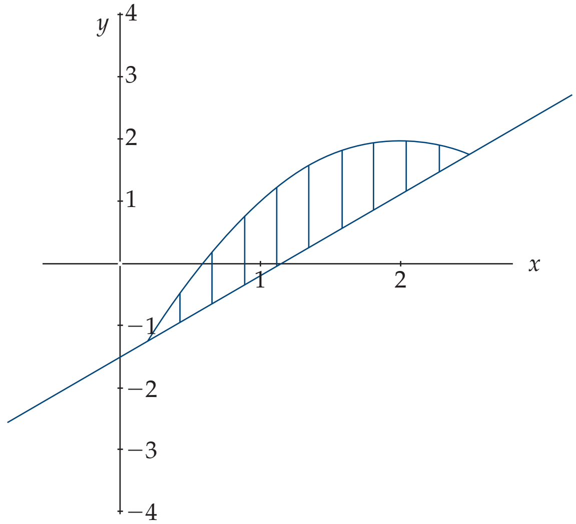
Observemos también que la secante tiene por ecuación

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

así que

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

a la cual hemos aplicado el teorema de Rolle, no es otra cosa que la "distancia" entre la función y la secante.



La relación

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

también es posible escribirla de las siguientes formas

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

y

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b - a).$$

La primera de estas dos fórmulas es la forma clásica con la que se recuerda el teorema del valor medio: *la diferencia de los valores en los extremos* $f(b) - f(a)$ *es igual a la derivada* $f'(x_0)$ *en algún punto intermedio* $a < x_0 < b$, *multiplicada por la longitud* $b - a$ *del intervalo*.

La segunda fórmula establece una relación entre los valores $f(b)$ y $f(a)$; el valor $f(b)$ puede calcularse sumando al valor $f(a)$ la longitud del intervalo multiplicado por la derivada de la función en algún punto intermedio. Esta idea se retomará y generalizará más adelante, en lo que llamaremos el desarrollo de Taylor.

7.4 Más criterios para máximos y mínimos

7.4.1 Criterio de la primera derivada

Como ya sabemos, cuando una función f es derivable en un intervalo (a, b), es posible asegurar que en todos los puntos de ese intervalo donde tenga un valor máximo local o un valor mínimo local, su derivada es igual a cero. Los valores máximos o mínimos locales o absolutos reciben el nombre de **valores extremos** de la función. Es importante insistir que en cada punto donde la derivada se anula, la función no necesariamente tiene un valor extremo, como lo hemos ilustrado antes con algunos ejemplos. Lo único posible de afirmar es que si la función tiene un valor extremo en un punto de (a, b), entonces ese punto tiene que ser crítico. Por tanto, si deseamos determinar los puntos del intervalo (a, b) donde la función tiene un máximo local o un mínimo local, es suficiente restringir nuestra búsqueda al conjunto de puntos críticos de la función en el intervalo (a, b).

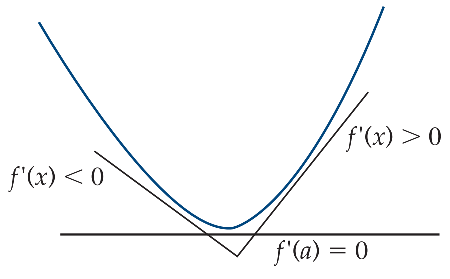
De acuerdo con lo antes expuesto, es conveniente contar con criterios de discriminación, mismos que nos permitan determinar de entre todos los puntos críticos aquellos donde la función alcanza valores extremos. Ahora, con el teorema del valor medio estamos en posibilidad de establecer un teorema de discriminación.

7.4.2 Teorema (criterio de la primera derivada)

Sean f una función derivable en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico de f, es decir $f'(x_0) = 0$. Si en alguna vecindad $(x_0 - r, x_0 + r)$ de x_0 se cumple:

$$f'(x) < 0 \text{ para toda } x_0 - r < x < x_0$$

y $f'(x) > 0$ para toda $x_0 < x < x_0 + r$



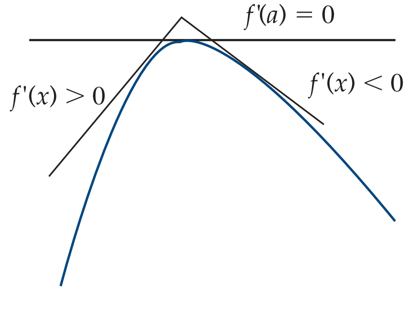
entonces f tiene un mínimo local en x_0. De igual modo, si se cumple

$$f'(x) > 0 \text{ para toda } x_0 - r < x < x_0$$

y

$$f'(x) < 0 \text{ para toda } x_0 < x < x_0 + r$$

entonces f tiene un máximo local en x_0.



Demostración

Probemos la primera parte del teorema (la segunda se prueba de forma similar). Mostraremos que $f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in (x_0 - \gamma, x_0 + r)$.

Por hipótesis $f'(x) < 0$ para toda $x_0 - r < x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para toda $x_0 < x < x_0 + r$. Sea x tal que $x_0 - r < x < x_0$. Por el teorema del valor medio aplicado a f en el intervalo $[x, x_0]$, existe un punto $x_1 \in (x, x_0)$ tal que

$$f(x_0) - f(x) = f'(x_1)(x_0 - x).$$

Pero $f'(x_1) < 0$; por tanto, $f(x_0) - f(x) = f'(x_1)(x_0 - x) < 0$, es decir

$$f(x_0) < f(x).$$

Sea ahora $x_0 < x < x_0 + r$. Por el mismo teorema del valor medio, existe $x_2 \in (x_0, x)$ tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_2)(x - x_0).$$

En este caso tenemos $f'(x_2) > 0$, por tanto $f(x) - f(x_0) = f'(x_2)(x - x_0) > 0$. Esto implica

$$f(x) > f(x_0).$$

Combinando lo probado, entonces se cumple

$$f(x) > f(x_0)$$

para toda $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ con $x \neq x_0$. Esto prueba el teorema.

7.4.3 Criterio de la segunda derivada

En la práctica, el criterio de la primera derivada se aplica analizando la fórmula para $f'(x)$ en puntos "cercanos" al punto crítico x_0, tanto a la derecha como a la izquierda de ese punto. Para determinar el signo de la primera derivada alrededor de un punto crítico puede no ser una tarea fácil, en cuyo caso podemos acudir al siguiente teorema.

Teorema (criterio de la segunda derivada)

Sea f una función dos veces derivable en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico de f, es decir $f'(x_0) = 0$.

a) Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0.

b) Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0.

Demostración

Probemos el inciso a), la prueba del inciso b) es completamente similar. Por definición

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Como $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, se tiene

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

para toda $x \neq x_0$ en alguna vecindad $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x_0. De esto se sigue que para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f'(x_0) > 0$ si $x > x_0$ y $f'(x_0) < 0$ si $x < x_0$. Por el criterio de la primera derivada se sigue que f tiene un mínimo en x_0. Esto prueba el teorema.

Nota

En la prueba del teorema anterior no utilizamos la hipótesis de que f fuese dos veces derivable en *todo* el intervalo (a, b), solo utilizamos el hecho de que existe la segunda derivada *en el punto* x_0. Con lo cual, tenemos un mejor teorema.

7.4.4 Teorema (criterio mejorado de la segunda derivada)

Sea f una función derivable en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico de f. Supongamos que existe $f''(x_0)$.

c) Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0.

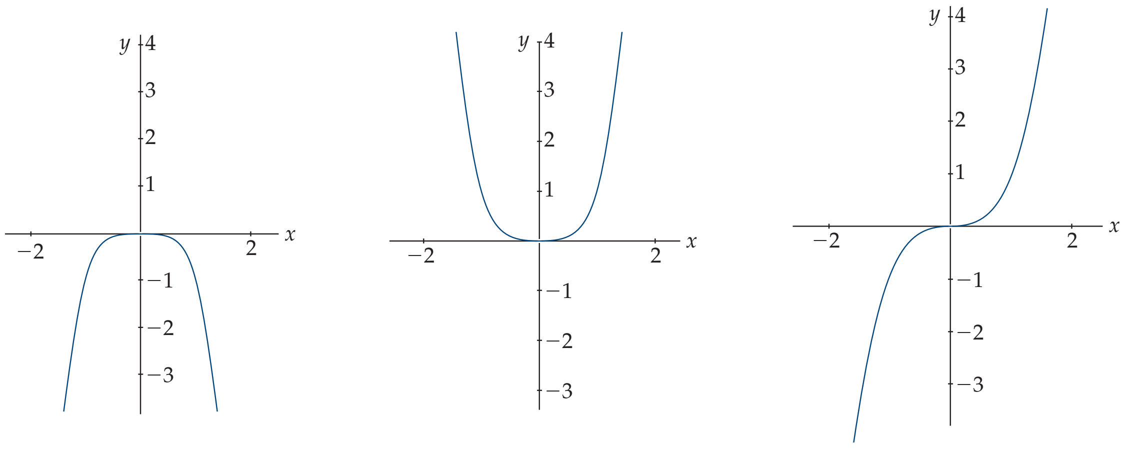
d) Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0.

Nota

Una pregunta natural sería: ¿qué podemos decir cuando $f''(x_0) = 0$? La respuesta es: "nada". Esto significa que puede ocurrir cualquier cosa cuando $f''(x_0) = 0$. Más precisamente, bajo esta condición es posible que la función tenga un máximo local en x_0, que tenga un mínimo local en x_0 o bien que no tenga ni máximo ni mínimo, esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13

Sean las funciones $f(x) = -x^4$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = x^3$. En todos los casos $x_0 = 0$ es un punto crítico, es decir, se cumple $f'(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$ y $h'(x_0) = 0$; además, $f''(x_0) = g''(x_0) = h''(x_0) = 0$. Sin embargo, f tiene un máximo, g tiene un mínimo y h no tiene ni máximo ni mínimo, en $x_0 = 0$.



Otra situación que vale la pena comentar es que podemos tener una función f derivable tal que en un punto crítico x_0 no exista la segunda derivada $f''(x_0)$. En este caso pueden presentarse diferentes fenómenos, como se muestra en los siguientes ejemplos.

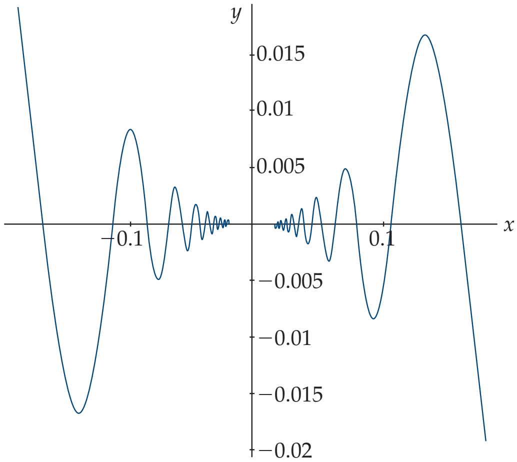
Ejemplo 14

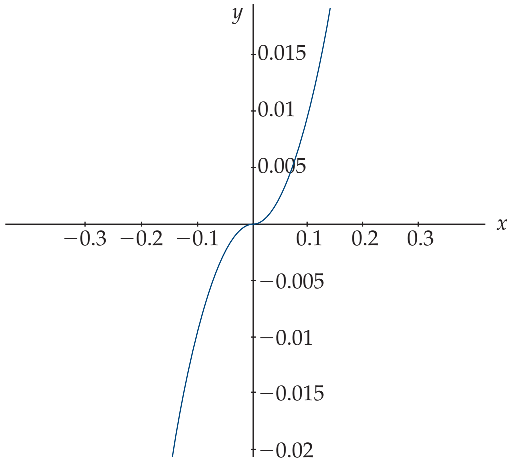
Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ambas funciones son derivables en $x = 0$, y se tiene $f'(0) = g'(0) = 0$, pero no tienen segunda derivada en ese punto. Además, ninguna de las dos funciones tiene máximo o mínimo en $x = 0$.





Ejemplo 15

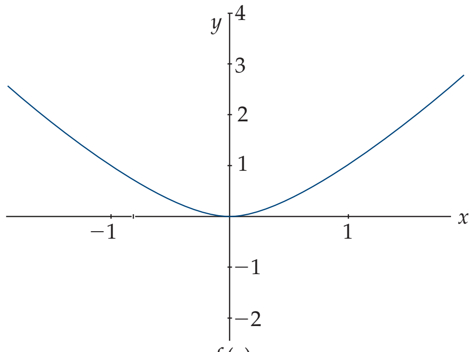
La función

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}} = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{3}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

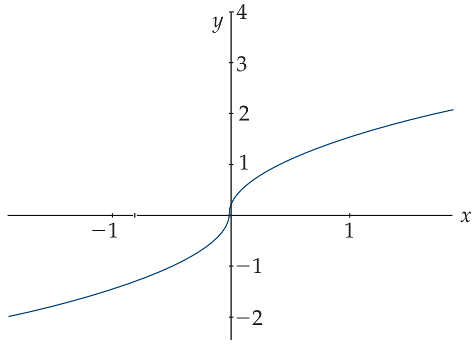
tiene un punto crítico en $x = 0$, de hecho

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

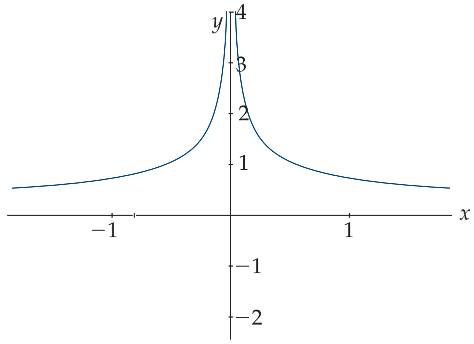
la función f tiene un mínimo en $x = 0$ y no tiene segunda derivada en ese punto, aunque para los puntos diferentes de 0, sí existe la segunda derivada, la cual está dada por $f''(x) = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ para toda $x \neq 0$.



$f(x)$

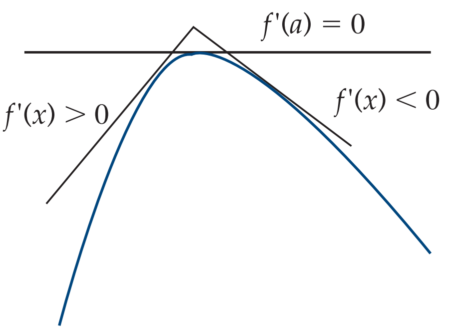


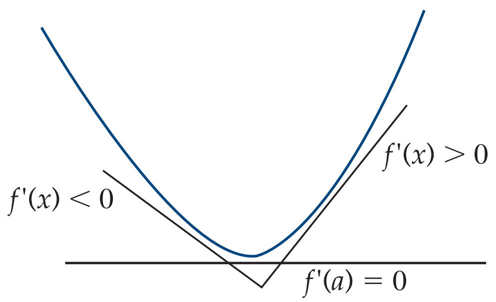
$f'(x)$



$f''(x)$ para $x \neq 0$

Si deseamos averiguar si una función f tiene un máximo o un mínimo en un punto crítico a, con seguridad el criterio de la segunda derivada es preferido sobre el criterio de la primera derivada, pues para este último se requiere analizar el signo de $f'(x)$ alrededor de a, en tanto que el criterio de la segunda derivada requiere que hallemos el signo de $f''(a)$, ni siquiera requerimos el valor de $f''(a)$, solo necesitamos saber si es positivo o negativo. El criterio de la primera derivada suele ser el recurso cuando falla el criterio de la segunda. El criterio de la segunda derivada puede fallar ya sea porque no exista $f''(x_0)$ o porque sea igual a cero. Dada la evidencia geométrica que solemos darle al criterio de la primera derivada es natural pensar que este criterio es seguro, que siempre podemos acudir a él.





Si bien puede resultar un tanto difícil determinar el signo de la derivada en alguna vecindad del punto crítico, no pensamos que el criterio de la primera derivada pueda fallar, basta asegurarse que la derivada sea positiva para puntos cercanos a la izquierda de a y negativa para puntos cercanos a la derecha.

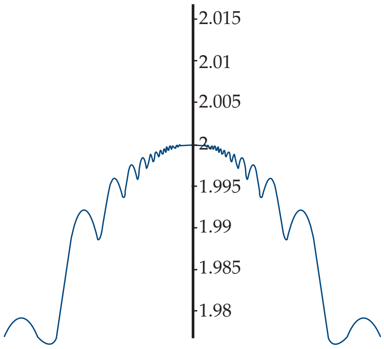
Pero esto no necesariamente es cierto, es decir, una función puede tener un valor máximo en un punto crítico a y sin embargo ser falso que exista una vecindad del punto a tal que la derivada

sea positiva en los puntos de la vecindad a la izquierda de a y negativa en los puntos de la vecindad a la derecha de a. Esto lo ilustramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2-\dfrac{x^2}{1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)} & \text{si } x\neq 0 \\ 2 & \text{si } x=0 \end{cases}$$



Esta función tiene un punto crítico en $a = 0$. En efecto, de la desigualdad

$$0\leq\left|\frac{x}{1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right|\leq|x|$$

la cual vale para todo real x, se sigue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}}{x}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}\\&=0\end{aligned}$$

Es decir $f'(0) = 0$. Además con un poco de labor algebraica podemos hallar

$$f'(x)=-2\frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}+x\left(1+\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1+\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x}\right)^2}$$

para todo real $x + 0$. De aquí se desprende que no existe la segunda derivada.

Por otra parte, es fácil probar que la función tiene una máximo en $a = 0$. En efecto, para toda $x \neq 0$ se tiene

$$2-\frac{x^2}{1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)} \leq 2 = f(0)$$

para todo real x. Esto significa que $f(0) = 2$ es el valor máximo absoluto de f. Sin embargo, la función derivada toma valores positivos y valores negativos en puntos arbitrariamente cerca y a la derecha del cero. En efecto, para todo natural n se tiene

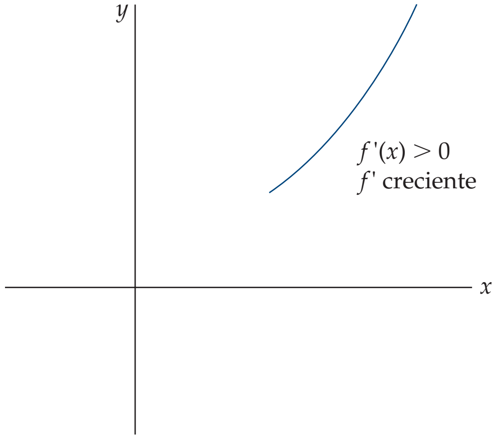
$$f'\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{2}{(2n+1)\pi} < 0 \quad y \quad f'\left(\frac{1}{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{4}{9}-\frac{16}{3\pi(4n+3)} > 0.$$

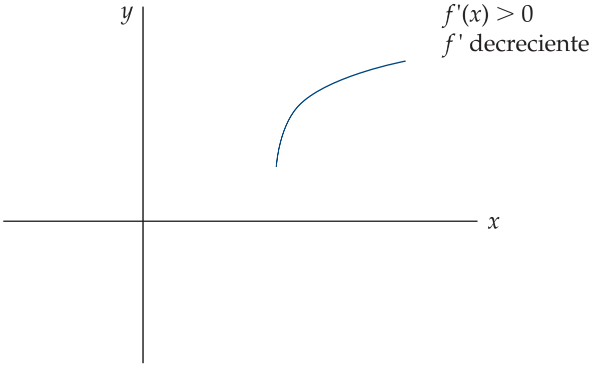
Esto implica que no es posible encontrar una vecindad del cero tal que en los puntos de la vecindad y a la derecha del cero la derivada sea negativa. Se deja como ejercicio para el lector que halle dos sucesiones de puntos a la izquierda del cero que converjan a cero tal que la función tome valores negativos en los puntos de una sucesión y tome valores positivos en los puntos de la otra. Entonces en este caso falla el criterio de la primera derivada y también el de la segunda.

7.5 Concavidad y puntos de inflexión

7.5.1 Concavidad

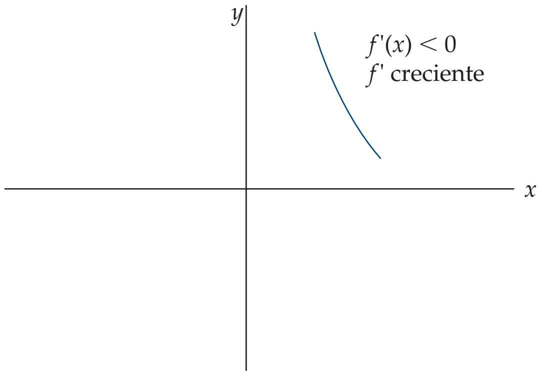
Supongamos que tenemos una función f derivable en un intervalo $I = [a, b]$. Sabemos que si la derivada f' es positiva en el intervalo I, entonces f es creciente en I, de hecho f es estrictamente creciente. De igual modo, si f' es negativa en I, entonces f es estrictamente decreciente en I. En el caso de que f sea creciente podemos esperar dos aspectos de la gráfica.

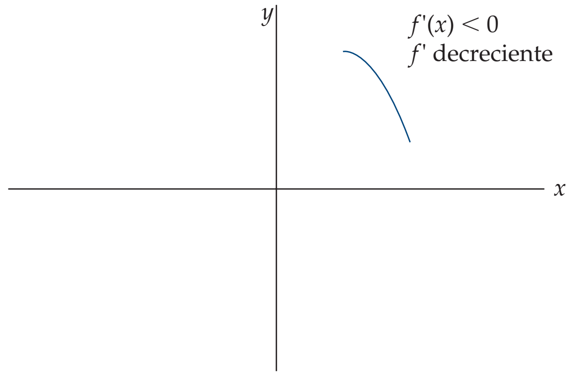




En el primer caso, la derivada es positiva y creciente; en el segundo caso, la derivada es positiva decreciente, como podemos deducir de la interpretación geométrica de la derivada.

Por otra parte, cuando la derivada es negativa, también se presentan dos casos, como se aprecia en la siguiente figura.





En el primer caso, la derivada es negativa y creciente (al crecer x, $f'(x)$ se hace menos negativa); en el segundo caso, la derivada es negativa y decreciente (al crecer x, $f'(x)$ se hace más negativa).

En conclusión, *cuando la derivada es creciente (sea positiva o negativa) la gráfica "se dobla hacia arriba"*, mientras que *cuando la derivada es decreciente la gráfica "se dobla hacia abajo"*. Esto motiva la siguiente definición.

Definición

Sea f una función derivable en un intervalo $[a, b]$. Decimos que f es:

a) **Cóncava hacia arriba** en $[a, b]$ si f' es creciente en $[a, b]$.

b) **Cóncava hacia abajo** en $[a, b]$ si f' es decreciente en $[a, b]$.

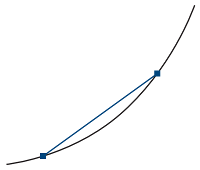
Nota sobre terminología

Algunos autores llaman **convexidad** a la concavidad hacia arriba y simplemente **concavidad** a la concavidad hacia abajo. Es decir, f es **convexa** en $[a, b]$ si f' es creciente en $[a, b]$ y es **cóncava** en $[a, b]$ si f' es decreciente en ese intervalo.

7.5.1.1 Definición alternativa de concavidad

De manera más general, la concavidad de una función suele establecerse sin acudir a la derivabilidad de la función, de esta manera la concavidad o convexidad queda establecida en términos geométricos, o mejor dicho, en términos algebraicos. Para los propósitos de este libro hemos adoptado la definición en términos de la derivada, lo que nos permitrá establecer con facilidad los criterios para su estudio. De cualquier manera, solo en calidad de comentario, presentaremos a continuación la "definición algebraica" de concavidad hacia arriba.

Geométricamente, una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo $[a, b]$ si cualquier secante de la curva en el intervalo $[a, b]$ queda por arriba de la curva en ese intervalo (véase la siguiente figura).



Es decir, si para cualesquiera puntos $\alpha < \beta$ del intervalo $[a, b]$, el segmento de recta que une los puntos $(\alpha, f(\alpha))$ y $(\beta, f(\beta))$ queda por arriba de la gráfica de f en ese intervalo. Dado que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(\alpha, f(\alpha))$ y $(\beta, f(\beta))$ es

$$y = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha)$$

esta definición queda como sigue:

Una función f es **cóncava hacia arriba** en un intervalo $[a, b]$ si para cualesquiera puntos $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$ y toda $x \in (\alpha, \beta)$ se cumple la desigualdad

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha) > f(x).$$

Esta desigualdad también se escribe

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Si invertimos la desigualdad anterior, obtenemos la definición de concavidad hacia abajo.

A continuación estableceremos un teorema que nos permitirá determinar la concavidad de una función (definida en términos de la derivada) cuando es dos veces derivable en un intervalo. Este criterio para la concavidad es consecuencia directa de la relación entre el signo de la derivada y la monotonía de una función, ahora aplicado a la derivada misma. Por ejemplo, si la segunda derivada f'' es positiva en un intervalo, entonces la primera derivada f' es creciente, por tanto la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo. Asimismo, si f'' es negativa entonces f' es decreciente y la función es cóncava hacia abajo.

Teorema

Si una función f es dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$ y f'' es positiva en ese intervalo, entonces la función es cóncava hacia arriba. Por otra parte, si f'' es negativa en $[a, b]$, entonces la función es cóncava hacia abajo en $[a, b]$.

Un recurso nemotécnico muy popular para recordar este teorema consiste en imaginar una vasija con agua. Si el recipiente se orienta de manera que su concavidad queda hacia arriba entonces retiene el agua (f'' positiva), si se orienta con su concavidad hacia abajo la vasija derrama el agua (f'' negativa).

7.5.2 Punto de inflexión

Una función f puede tener diferentes concavidades en diversos intervalos contenidos en su dominio. Por ejemplo, puede haber dos intervalos cerrados adyacentes, digamos $[a, c]$ y $[c, b]$, teniendo f un tipo de concavidad en uno de ellos y otro tipo de concavidad en el otro. El punto

c, común a los dos intervalos, se llama *punto de inflexión* de la función. Entonces, un punto de inflexión es uno donde "cambia" la concavidad. Por definición de concavidad, la derivada de la función será creciente en uno de los intervalos, mientras que en el otro será decreciente, así que el punto de inflexión es uno donde la derivada "pasa" de ser creciente a decreciente o de decreciente a creciente. En el primer caso, la derivada tendrá un máximo en el punto de inflexión, mientras que en el segundo caso la derivada tendrá un mínimo en ese mismo punto. Así que en los puntos de inflexión la derivada tiene un valor extremo.

Nota

Como comentamos en el párrafo anterior, si una función g es derivable en un intervalo y tiene un punto de inflexión en un punto c del intervalo, entonces la función derivada g' tiene un máximo o un mínimo, esto es consecuencia del hecho de que si en una vecindad $(c - r, c + r)$ de un punto c una función es creciente en $(c - r, c]$ y decreciente en $[c, c + r)$ entonces la función tiene un máximo en c y si la función es decreciente en $(c - r, c]$ y creciente en $[c, c + r)$ entonces la función tiene un mínimo en c. Sin embargo, puede ocurrir, por ejemplo, que una función tenga un máximo en un punto c y que no exista una vecindad $(c - r, c + r)$ tal que la función sea creciente $(c - r, c]$ y decreciente en $[c, c + r)$. Un ejemplo de este caso es el de la función del ejemplo 16 de la sección 7.4:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{x^2}{1 + \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como ya hemos comentado antes, esta función tiene un máximo en $x = 0$ pero no es monótona ni a la derecha ni a la izquierda de este punto. Esto quiere decir que los puntos de inflexión no pueden definirse en términos de los máximos o mínimos de la derivada. *La condición de que la derivada tenga un máximo o un mínimo en un punto c es una condición necesaria para que en c tenga un punto de inflexión, pero no es suficiente*:

$$(c \text{ es punto de inflexión de } g) \Rightarrow (g' \text{ tiene un máximo o un mínimo en } c)$$

$$(g' \text{ tiene un máximo o un mínimo en } c) \nRightarrow (c \text{ es punto de inflexión de } g)$$

Definición

Sea f una función derivable en un intervalo $[a, b]$. Un punto $a < c < b$ es **punto de inflexión** de f si existe un vecindad $(c - r, c + r)$ de c tal que f es cóncava hacia arriba en $(c - r, c)$ y cóncava hacia abajo en $(c, c + r)$, o bien es cóncava hacia abajo en $(c - r, c)$ y cóncava hacia arriba en $(c, c + r)$.

Si una función derivable tiene un máximo o un mínimo en un punto interior de su dominio, necesariamente su derivada vale cero. Con base en lo antes expuesto obtenemos el siguiente teorema.

Teorema

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$. Si f tiene un punto de inflexión en un punto $a < c < b$, entonces $f''(c) = 0$.

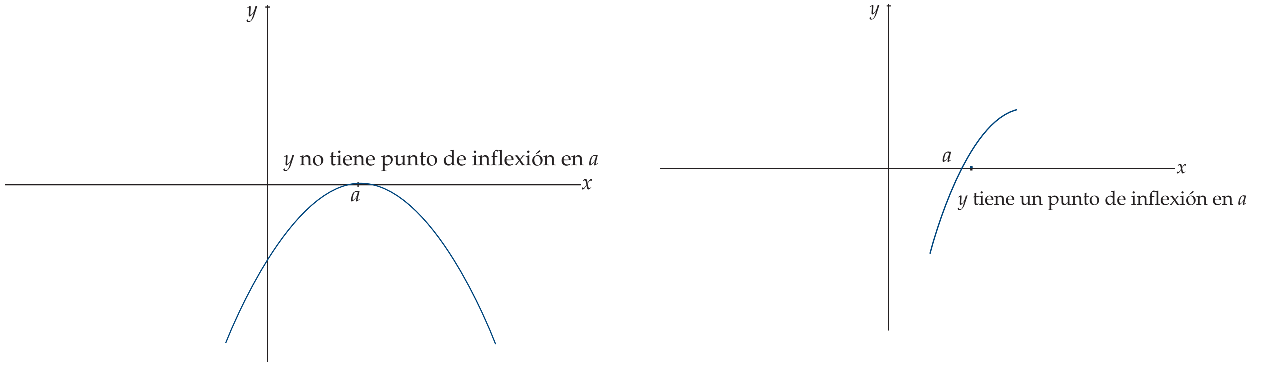
Este teorema nos da una condición *necesaria* para que una función que es dos veces derivable tenga un punto de inflexión en un punto interior de su dominio, por supuesto la condición no es suficiente. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$ entonces $f''(x) = 12x^2$ para todo real x; en particular se tiene $f''(0) = 0$, pero f no tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Si deseamos determinar los puntos de inflexión de una función que es dos veces derivable en un intervalo abierto, el teorema anterior nos sugiere como estrategia restringir la búsqueda al conjunto de puntos donde la segunda derivada es cero. Esta estrategia podemos complementarla con el siguiente teorema, el cual es inmediato.

Teorema

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$. Sea $a < c < b$ tal que $f''(c) = 0$. Si existe una vecindad $(c - \delta, c + \delta)$ de c tal que $f''(x)$ tiene signos diferentes en los intervalos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$, entonces f tiene un punto de inflexión en c.

Para finalizar esta sección, hacemos hincapié en que no basta que f'' se anule en un punto c para que este sea un punto de inflexión de f, sino que la gráfica de la segunda derivada f'' debe cruzar el eje de las abscisas. Los dos teoremas anteriores de alguna manera nos recuerdan esta situación.



Gráfica de la segunda derivada f''

Ejemplo 17

Sea la función $f(x) = x^5$. Así pues, $f''(x) = 20x^3$ y $f'''(x) = 60x^2$; por tanto, $f''(0) = 0$. Es fácil ver que f tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Sea ahora $g(x) = x^4$, tenemos entonces $g''(x) = 12x^2$ y $g'''(x) = 24x$. Por consiguiente, también tenemos $g''(0) = 0$, pero g no tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Nota

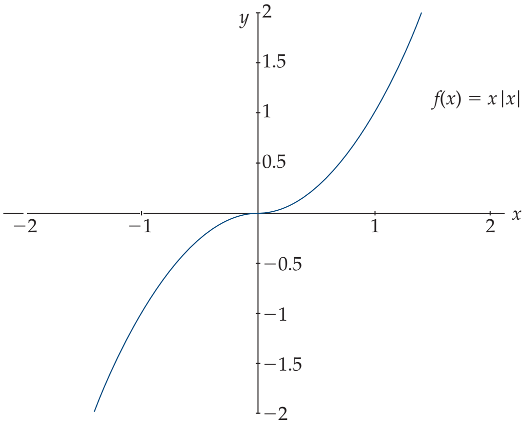
Si f es una función derivable en un intervalo $[a, b]$ y f tiene un punto de inflexión en $a < c < b$, es posible que no exista la segunda derivada de f en c, en cuyo caso no es aplicable la estrategia anterior, simplemente porque no existe $f''(c)$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18

Sea la función

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x\,|x|$$

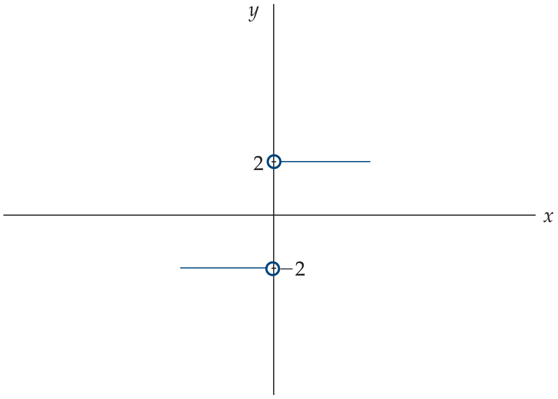


Tenemos, entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

o sea $f'(x) = 2|x|$. Por tanto, f' es decreciente a la izquierda de 0 y creciente a la derecha de 0, así que f tiene un punto de inflexión en ese punto, pero no existe $f''(0)$. Para los demás puntos $x \neq 0$ tenemos

$$f''(x) = 2\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



7.6 Bosquejando gráficas de funciones

Los teoremas sobre el signo de la derivada y la monotonía de una función, así como los criterios de máximos y mínimos o de concavidades y puntos de inflexión son un excelente recurso para describir los aspectos cualitativos de la gráfica de una función. Estos teoremas nos ayudan a tener una idea clara de la forma que puede tener la gráfica de una función. Quizá con algunos puntos sobre la gráfica, como son los valores extremos locales o las intersecciones con los ejes

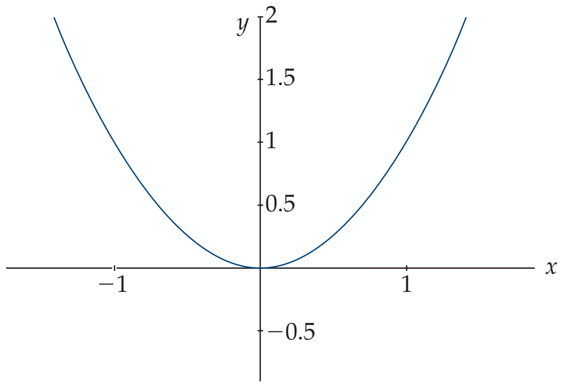
coordenados, en conjunto con el análisis del comportamiento de la función cuando $x \to \pm\infty$, podemos hacer un buen bosquejo de su gráfica. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 19

La función $f(x) = x^2$ es derivable en todos los reales; además, dado que la derivada $f'(x) = 2x$ es estrictamente creciente, la función es cóncava hacia arriba. Esto también lo podemos deducir del hecho de que $f''(x) = 2 > 0$ para toda x real, de lo cual también deducimos que en $x = 0$, que es el único punto donde la derivada se anula, la función tiene un mínimo. Asimismo, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty .$$

La información anterior nos permite bosquejar su gráfica.



Ejemplo 20

La función $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1$ es derivable en todos los reales y su derivada está dada por $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$. Así que los puntos críticos de f son $x = 1$ y $x = 2$. De la factorización de $f'(x)$ deducimos que $f'(x) > 0$ para $x > 2$ y también para $x < 1$. Por otra parte, $f'(x) < 0$ para $1 < x < 2$. De la expresión de la segunda derivada $f''(x) = 6x - 9 = 3(2x-3)$, tenemos que $f''(x) < 0$ si $x < \frac{3}{2}$ y $f''(x) > 0$ si $x > \frac{3}{2}$. Del análisis anterior de los signos concluimos que f es:

- creciente en los intervalos $[2, +\infty)$ y $(-\infty, 1]$
- decreciente en el intervalo $[1, 2]$
- cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ y
- cóncava hacia arriba en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

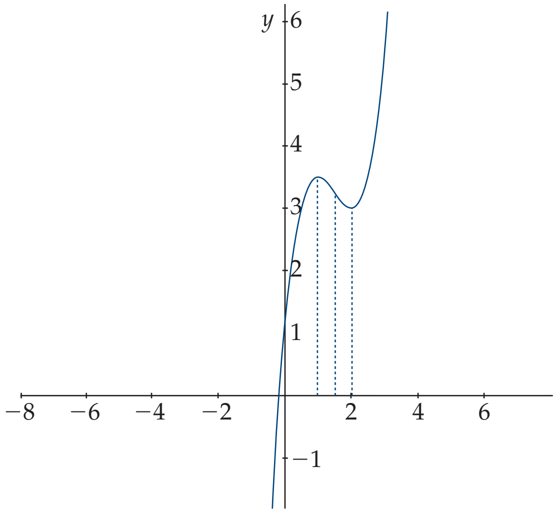
Asimismo, concluimos que f tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 2$ y que tiene un único punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$. Aunque los cortes con el eje x no son fáciles de determinar, pues son las raíces de la ecuación cúbica $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1 = 0$, el corte con el eje de las ordenadas lo obtenemos haciendo $x = 0$, con lo cual se obtiene el punto $(0, 1)$. Además, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1\right) = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1\right) = -\infty$$

La información anterior nos permite obtener un bosquejo de la gráfica.



Ejemplo 21

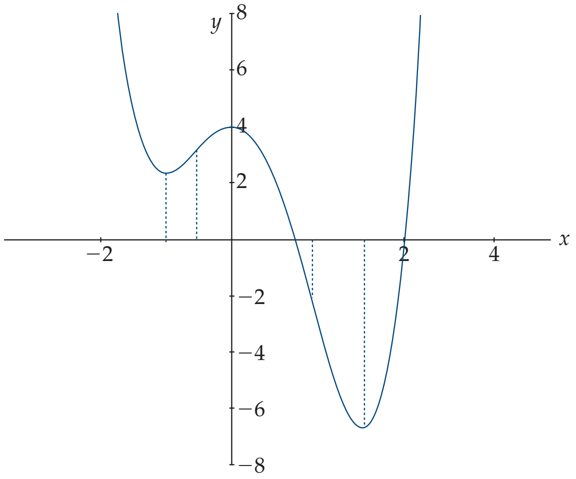
Sea la función $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 4$. Esta función, como toda función polinomial, es derivable en todos los reales, de hecho tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$. Las primeras dos derivadas están dadas por

$$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 8x = 4x(x+1)(x-2)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8x - 8 = 4(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3})(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3})$$

Del análisis del signo de la expresión $f'(x) = 4x(x+1)(x-2)$ se sigue que $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$ son los puntos críticos de f y que $f'(x)$ es positiva tanto para $x > 2$ como para $-1 < x < 0$, mientras que $f'(x)$ es negativa para $0 < x < 2$ y para $x < -1$. Por tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, 2]$ y es creciente en los intervalos $[-1, 0]$ y $[2, +\infty)$. De este mismo análisis se sigue que f alcanza valores mínimos en los puntos $x_1 = -1$ y $x_3 = 2$. Mientras que en el punto $x_2 = 0$, f tiene un máximo.

De la fórmula para la segunda derivada, $f''(x) = 4\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$, se sigue que $f''(x) > 0$ para $x < \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ y para $x > \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ y que $f''(x) < 0$ para $\frac{1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{3}$. Por consiguiente, los puntos $x_4 = \frac{1-\sqrt{7}}{3} \approx -0.548$ y $x_5 = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1.215$ son puntos de inflexión de f, además de que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $x < \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ y $x > \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $\frac{1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{3}$.



7.7 Funciones con derivada cero y funciones idénticas

Un hecho trivial es que toda función constante tiene derivada cero, lo que no es trivial es el recíproco de esta afirmación. Podría pensarse que si una función es constante sería fácil dar cuenta de ello, pero nada está más lejos de la realidad. La prueba de este recíproco tuvo que esperar hasta este momento, en el cual ya contamos con una herramienta de gran utilidad: el teorema de valor medio. De esto trata el siguiente teorema.

Teorema

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ derivable, tal que $f'(x) = 0$ para toda $x \in [a, b]$. Entonces, f es una función constante.

Demostración

Probemos que para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 en $[a, b]$, se tiene $f(x_1) = f(x_2)$. De aquí, podemos concluir que la función es una constante.

Sean pues $x_1, x_2 \in [a, b]$. Supongamos $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio aplicado al intervalo $[x_1, x_2]$, tenemos que existe $x_1 < x_0 < x_2$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Pero $f'(x) = 0$ para toda $x \in [a, b]$, en particular tenemos $f'(x_0) = 0$, luego

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

o sea

$$f(x_2) = f(x_1).$$

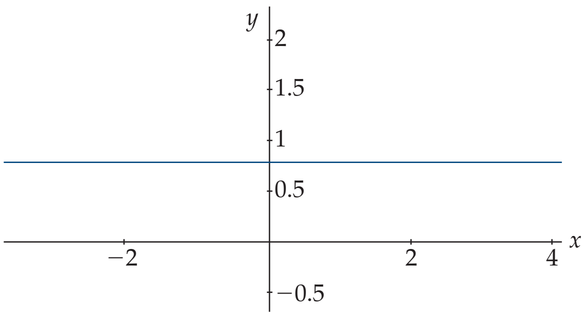
De aquí se sigue que f es constante, pues si tomamos x_1 fija, por ejemplo $x_1 = a$, y $x_2 = x$, cualquier punto de $[a, b]$, tenemos $f(x) = f(a)$ para toda $x \in [a, b]$. Esto prueba el teorema.

Ejemplo 22

La función f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \arctan\frac{3+\cos x+\operatorname{sen} x}{3+\cos x-\operatorname{sen} x} - \arctan\frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos x}$$

es una constante. Se deja como ejercicio para el lector comprobar que $f'(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Del teorema anterior, podemos concluir que esta función es una constante. Este es un buen ejercicio para el lector, ya que pondrá en práctica su destreza en los procesos de derivación; sin embargo, el mensaje más importante de este ejemplo es que una función puede ser una constante sin que ello sea evidente. En la siguiente figura se muestra la gráfica de esta función. ¿De qué función constante se trata? No intente averiguarlo a partir de la figura, difícilmente obtendrá la respuesta, ya que lo que logre obtener será con toda seguridad, impreciso. Hay una manera segura de averiguar cuál es ese valor constante, lo cual se deja como ejercicio para el lector.



Del teorema anterior tenemos como corolario otro importante teorema.

Teorema

Si f y g son funciones tales que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo I, entonces existe una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ para toda $x \in I$. En particular, si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo y toman el mismo valor en un punto, entonces las funciones son idénticas.

Demostración

La función $F = f - g$ cumple $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para toda $x \in I$, luego F es constante en I, o sea, existe c tal que $F(x) = f(x) - g(x) = c$ para toda $x \in I$. Por tanto, $f(x) = g(x) + c$ para toda $x \in I$. Si además existe un punto $a \in I$ tal que $f(a) = g(a)$, entonces tendremos $c = 0$, por lo que se tendrá $f(x) = g(x)$ para toda $x \in I$. Esto prueba el teorema.

Ejemplo 23

Sean las funciones g y h dadas por

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$$

y

$$h(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}\right).$$

Estas funciones tienen la misma derivada.

Se deja como ejercicio para el lector obtener las derivadas

$$g'(x) = h'(x) = \frac{1}{2}\frac{3\cos x + 1}{3\cos x + 5}.$$

Por el teorema anterior, g y h difieren en una constante; es decir, existe una constante c tal que $g(x) = h(x) + c$ para toda x. ¿Cuánto vale esta constante c? Podemos determinar el valor de c hallando los valores de g y h en un mismo punto, por ejemplo, es fácil ver que $g(0) = 0$ y $h(0) = 0$, así que ambas funciones toman el mismo valor en $x = 0$, por tanto, las funciones son idénticas, lo cual no es obvio. Así pues, tenemos

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}\right) = h(x).$$

para toda x. Pero ahora veamos un fenómeno que le va a sorprender con toda seguridad. Si tomamos $x = 2\pi$, tenemos

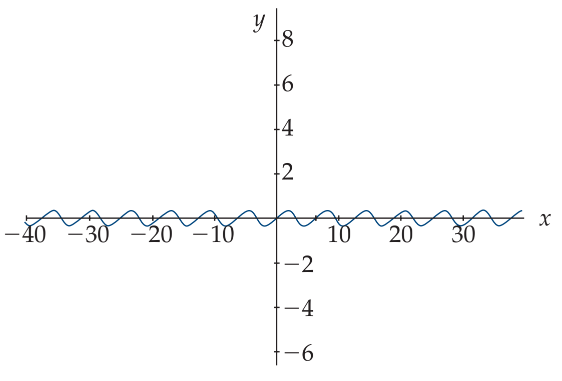
$$\begin{aligned} g(2\pi) &= \frac{1}{2}(2\pi) - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{2\pi}{2}\right) \\ &= \pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\pi\right) \\ &= 2\pi - \arctan 0 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

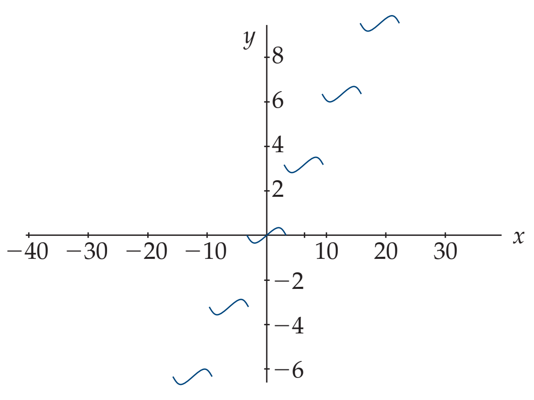
Sin embargo

$$\begin{aligned} h(2\pi) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{3 + \cos 2\pi}\right) \\ &= \arctan 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así que las funciones g y h no son iguales, pues sus valores al menos difieren en el punto 2π. ¿Esto contradice el teorema anterior?

Para entender el fenómeno que ocurre en este momento, le presentamos las gráficas de ambas funciones.





La explicación es muy simple: el teorema que establece que una función es una constante si su derivada es cero en todos los puntos de su dominio, requiere que el *dominio sea un intervalo*. En consecuencia, el teorema que establece la igualdad de las funciones, excepto por una constante aditiva, cuando tienen la misma derivada, es un resultado que vale bajo la hipótesis de que la igualdad de las derivadas vale en un intervalo. Si el dominio no es un intervalo, sino que es la unión de intervalos ajenos, entonces existirá una constante para cada uno de los que componen el dominio.

Nuestras funciones son idénticas en el intervalo $(-\pi, \pi)$, pero por ejemplo, en el intervalo $(\pi, 3\pi)$, se tiene $g(x) = h(x) + \pi$. En general, la diferencia $g(x) - h(x)$ será una constante en cada intervalo de la forma $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$, una constante diferente para cada uno de estos intervalos. Por esta razón, la derivada de la diferencia en cada intervalo es cero para todo punto de intervalo. En consecuencia, también es cero para todo punto de la unión de todos los intervalos abiertos de la forma $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$. Se deja como ejercicio para el lector probar que

$$g(x) = h(x) + n\pi, \text{ para toda } x \in ((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi).$$

7.8 Derivada de funciones monótonas

En el capítulo 2 se definieron los conceptos de función creciente y función decreciente. Ahora, estudiaremos la relación entre la derivada y estos conceptos que se refieren al comportamiento de las funciones. Para iniciar, recordemos que una función f es

1. **Creciente** en un conjunto A si para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. **Estrictamente creciente** en un conjunto A si para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.
3. **Decreciente** en un conjunto A si para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. **Estrictamente decreciente** en un conjunto A si para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función es **monótona** si es de cualquiera de las categorías anteriores.

Nota

Observe que por la definición lógica de las desigualdades $<$ y $\leq$, toda función estrictamente creciente es creciente, pues si se satisface la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ también se satisface la desigualdad $f(x_1) \leq f(x_2)$. Sin embargo, no toda función creciente lo es en el sentido estricto. De igual modo, toda función estrictamente decreciente es decreciente, pero no toda función decreciente es estrictamente decreciente. Por otra parte, hay funciones que son crecientes y decrecientes a la vez, este es el caso de las funciones constantes.

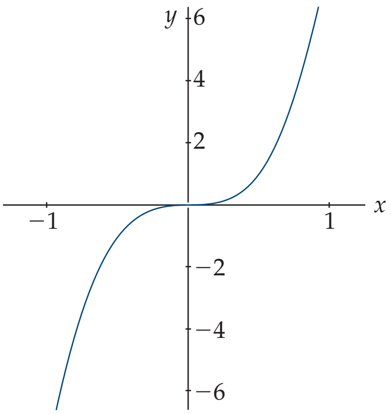
A continuación mostramos algunos ejemplos que ilustran diversas situaciones relacionadas con el concepto de monotonía de funciones.

Ejemplo 24

En cualquier conjunto, una función constante es creciente y decreciente, pero no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

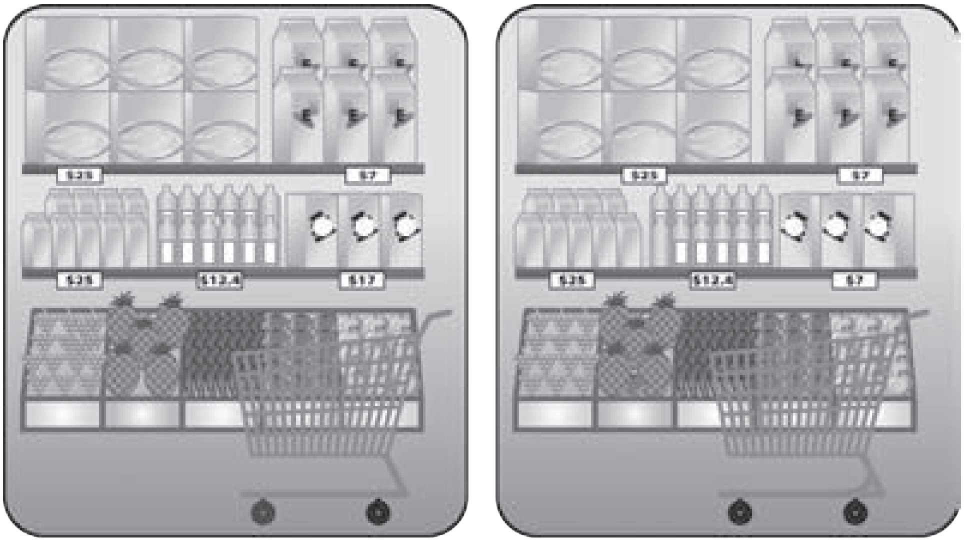
Ejemplo 25

La función $f(x) = x^3$ es creciente, de hecho es estrictamente creciente.

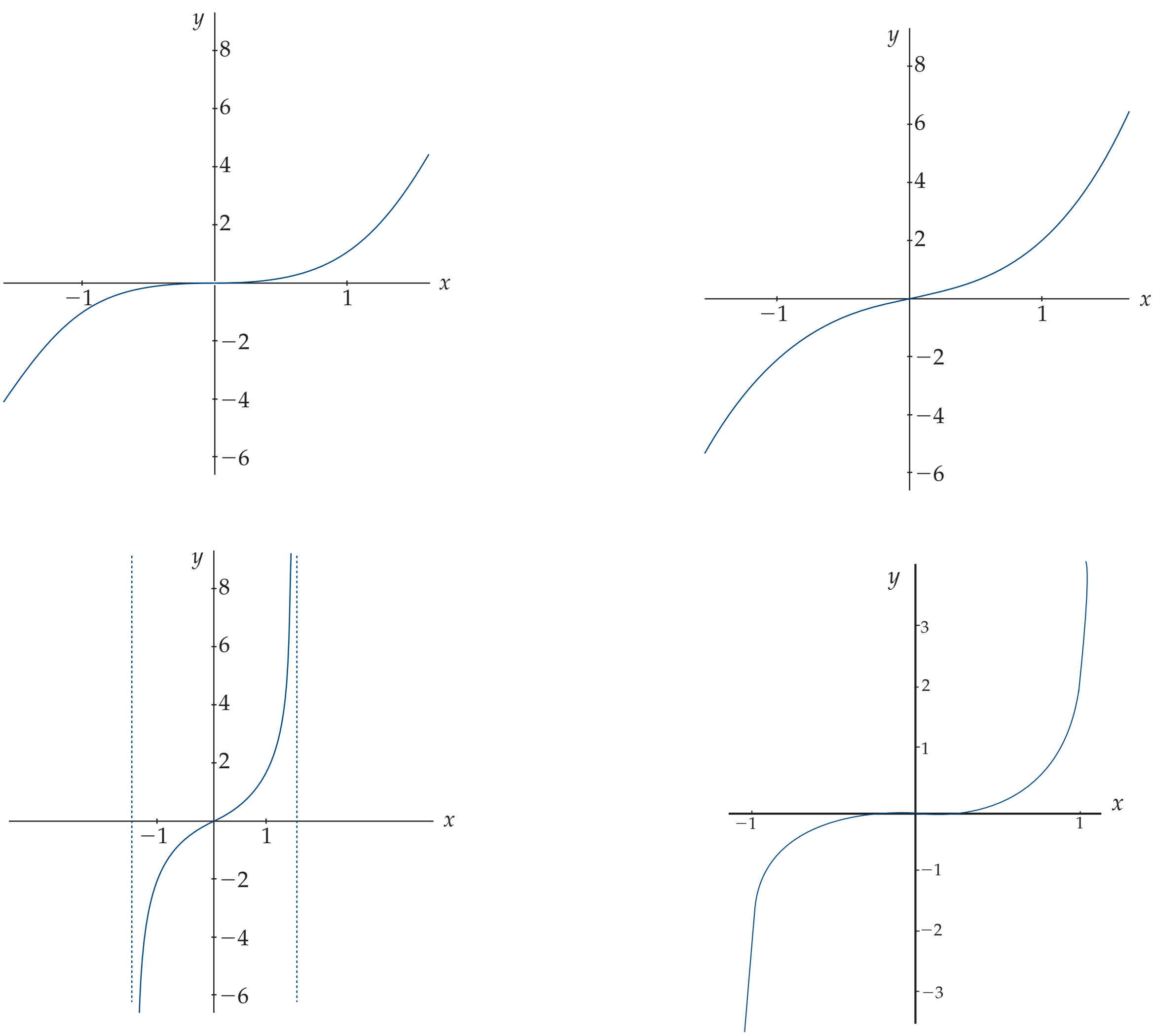


Ejemplo 26

Las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + x$ y $h(x) = \tan x$, $k(y) = \tan x^3$ son estrictamente crecientes, sus gráficas tienen un aspecto similar, pero por supuesto tienen diferencias esenciales. Este ejemplo puede compararse con las tiras cómicas que suelen publicarse en las páginas de entretenimiento de los periódicos, que consisten en hallar las diferencias entre dos dibujos, por ejemplo



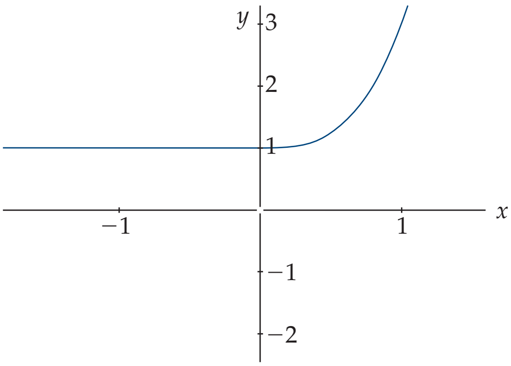
Con base en lo antes expuesto, halle las diferencias cualitativas entre las siguientes cuatro gráficas; su aspecto es muy similar, pero tienen diferencias esenciales.



La derivada puede ayudarle a encontrar algunas diferencias cualitativas de fondo. Diga a qué función corresponde cada gráfica.

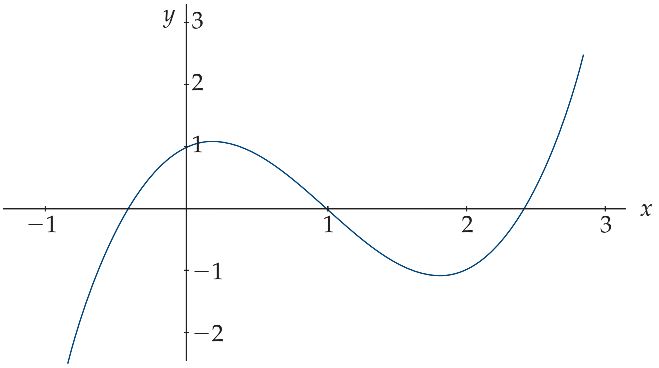
Ejemplo 27

La función $f(x) = x^3 + |x|^3 + 1$ es creciente pero no estrictamente creciente.



Ejemplo 28

La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ no es ni creciente ni decreciente.

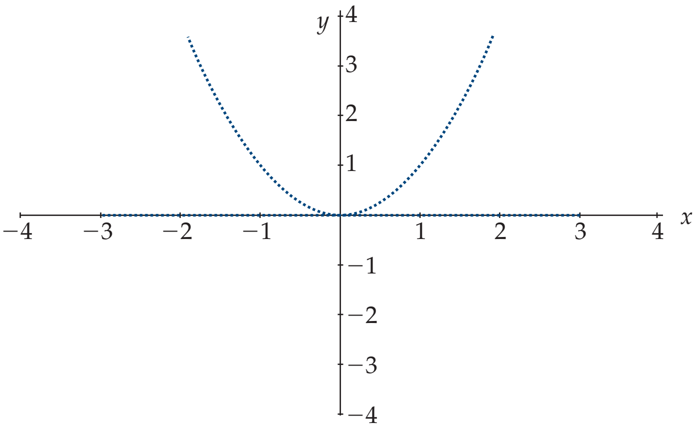


Esta función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}]$ y $[1 + \sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}]$. Los puntos donde cambia el tipo de monotonía, se determinan más adelante.

Ejemplo 29

Una vez más retomamos la multicitada función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$



Dicha función no es creciente ni decreciente y no hay ningún intervalo donde sea creciente o donde sea decreciente.

Teorema

Sea f derivable en un intervalo I. Si f es creciente en I, entonces $f'(x_0) \geq 0$ para toda $x_0 \in I$.

Demostración

Sea $x_0 \in I$. Por definición de derivada en x_0, tenemos $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Para probar que $f'(x_0) \geq 0$, consideremos el cociente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dado que f es creciente en I, para $x > x_0$ se cumple $f(x) - f(x_0) \geq 0$, por consiguiente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x} \geq 0$$

pues el denominador $x - x_0$ es positivo. Por otra parte, si $x < x_0$, tenemos $x - x_0 < 0$ y $f(x) - f(x_0) \leq 0$, por lo que otra vez

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 .$$

Así que la desigualdad anterior se cumple para toda $x \neq x_0$, independientemente de que x sea mayor o menor que x_0. De aquí podemos concluir que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 .$$

O sea $f'(x_0) \geq 0$.

El teorema anterior afirma que si una función es creciente en un intervalo I, entonces su derivada será mayor o igual que cero en ese mismo intervalo. Podría pensarse que si pedimos que la función sea estrictamente creciente entonces se tendrá que la derivada es positiva, pero esto es falso, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 30

La función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente y su derivada $f'(x) = 3x^2$ es positiva en $x \neq 0$ y $f'(0) = 0$. Así que no se cumple $f'(x) > 0$ para toda x.

Dado que toda función estrictamente creciente es creciente, entonces el siguiente teorema es un caso particular del anterior. Lo enunciamos por separado para enfatizar el hecho de que el crecimiento estricto a lo más nos permite afirmar que la derivada es no negativa.

Teorema

Sea f derivable en I. Si f es estrictamente creciente en I, entonces $f'(x) \geq 0$ para toda $x \in I$.

Para probar los dos teoremas anteriores, solo usamos la definición de derivada; sus recíprocos requieren del teorema del valor medio.

Teorema

Sea f una función tal que $f'(x) \geq 0$ para toda x en un intervalo I, entonces f es creciente en I.

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio aplicado al intervalo $[x_1, x_2]$, existe $x_1 < x_0 < x_2$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Pero, $f'(x_0) \geq 0$ y $x_2 - x_1 > 0$; por tanto, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ o sea $f(x_2) \geq f(x_1)$. Esto prueba el teorema.

El siguiente teorema es muy similar al anterior y la prueba es casi idéntica; sin embargo, lo enunciamos por separado, ya que constituye el recíproco de un enunciado que establece que si una función es estrictamente creciente entonces su derivada es positiva, lo cual es falso, como lo muestra el contraejemplo $f(x) = x^3$.

Teorema

Sea f una función tal que $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo I, entonces f es estrictamente creciente en I.

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$, aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_1, x_2]$, existe $x_1 < x_0 < x_2$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$. Pero $f'(x_0) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, lo cual implica $f(x_2) - f(x_1) > 0$, o sea $f(x_2) > f(x_1)$.

7.9 Más sobre los teoremas del valor medio

7.9.1 Teorema (del valor medio de Cauchy)

Sean f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un punto $a < x_0 < b$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) - f'(x_0)\, [g(b) - g(a)].$$

Demostración

Definamos la función F:$[a, b] \to 0$ como

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - f(x)[g(b) - g(a)].$$

Esta función, como f y g, es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Además

$$\begin{aligned} F(a) &= [f(b) - f(a)]\, g(a) - f(a)\, [g(b) - g(a)] \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(b), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F(b) &= [f(b) - f(a)]\, g(b) - f(b)\, [g(b) - g(a)] \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(b). \end{aligned}$$

Por lo que $F(a) = F(b)$. Por el teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Pero para toda $x \in (a, b)$, se tiene

$$F'(x) = [f(b) - f(a)]\, g'(x) - [g(b) - g(a)]\, f'(x).$$

Así que x_0 satisface

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0)-[g(b)-g(a)]\,f'(x_0)=0.$$

O sea

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0)=[g(b)-g(a)]\,f'(x_0).$$

Que es lo que deseábamos probar.

Nota

Si $g(b)\neq g(a)$, la relación anterior la podemos escribir

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Esta forma de escribir la conclusión del teorema del valor médico de Cauchy es la base del siguiente famoso teorema, muy útil para el cálculo práctico de límites.

7.9.2 Teorema (regla de l'Hospital)

Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I, que contiene en su interior un punto a donde $f(a)=0$ y $g(a)=0$. Supóngase que f y g son derivables en I, excepto posiblemente en a. Así que no necesariamente existen $f'(a)$ y $g'(a)$. Supónganse $g'(x)\neq 0$ para toda $x\neq a$, de modo que el cociente $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe para todo $x\neq a$. Si existe

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces existe

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

y además

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración

Primero mostremos que $g(x)\neq 0$ para toda $x\neq a$, así que está definido el cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)}.$$

En efecto, por el teorema del valor medio, para cada $x\neq a$ existe x_0 entre a y x, tal que

$$g(x)-g(a)=g'(x_0)(x-a).$$

Guillaume François Antoine, marquis de l'Hospital (1661-1704)



Matemático francés, conocido quizá por su famosa regla para calcular límites que conducen a formas indeterminadas $\frac{0}{0}$. Es considerado el autor del que se cree es el primer libro de cálculo diferencial: *l'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (*Análisis de los infinitamente pequeños para el entendimiento de las líneas curvas*). Este libro contiene las notas de su profesor Johann Bernoulli, a quien según la historia, contrató por 300 francos al año para que le enseñara matemáticas. Parte del trato que entablaron l'Hospital y Bernoulli era que este último le comunicara sus descubrimientos, mismos que l'Hospital presenta en su libro. En esta obra aparece la famosa regla para el cálculo de límites antes citada, de ahí que lleve su nombre. Después de la muerte de l'Hospital, Bernoulli revela el trato contraído con el marqués y declara que muchos de los resultados que l'Hospital publicó eran suyos (de Bernoulli). En 1922, se encontraron algunos escritos que confirman que ciertamente Bernoulli tenía razón. Algunos opinan que aun cuando l'Hospital reconoce la deuda académica que tiene con Leibniz, Jacob Bernoulli y Johann Bernoulli, declaran que las ideas fundamentales que publica en su libro son suyas; sin embargo, otros opinan que la historia difundida acerca de que l'Hospital quiso adjudicarse el crédito del descubrimiento de la multicitada regla para el cálculo de límites es falsa, pues argumentan que además de que l'Hospital publicó su libro en forma anónima, reconoce en su introducción la ayuda de Bernoulli y nunca declara que dicha regla hubiera sido descubierta por él.

Como $g(a) = 0$, tenemos entonces

$$g(x) = g'(x_0)(x - a).$$

Pero $g'(x_0) \neq 0$, así que $g(x) \neq 0$. Ahora bien, por el teorema de Cauchy, para cada $x \neq$ a existe un punto entre a y x que llamaremos $t(x)$ (obviamente el punto depende de x), tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}.$$

O sea

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}.$$

Como $t(x)$ está entre a y x, cuando $x \to a$ también $t(x) \to a$. Entonces, dado que existe

$$\lim_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

se sigue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esto prueba el teorema.

Ejemplo 31

Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$. Ambas funciones están definidas y son derivables en cualquier intervalo abierto que contenga al cero. Además, en este punto $f(0) = g(0) = 0$. Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

entonces, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Hemos recuperado el hecho $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ que probamos en el capítulo 5.

Ejemplo 32

Del ejemplo anterior se sigue

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \frac{1 - \cos x}{x} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1 + \cos x} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1 + \cos x} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1 + \cos x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \operatorname{sen} x \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.
\end{aligned}$$

Así pues, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0\cdot$$

Ejemplo 33

De manera similar al ejemplo 32, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(x\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(x\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0} x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\\
&= 0\cdot 1\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 34

Como en los dos ejemplos anteriores, en este tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 35

Sean $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = x$. Estas funciones cumplen con las condiciones de la regla de l´Hospital en el punto $a = 0$. Entonces, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1\,.$$

El teorema del valor medio de Cauchy es una generalización del teorema del valor medio de Lagrange; de igual modo, el siguiente teorema es otra generalización de Lagrange, aunque en otro sentido.

7.9.3 Teorema (de Taylor orden 2)

Sea f:$[a, b] \to \mathbb{R}$. Se supone que existe f' y es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. También, se supone que existe f'' en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(x_0)}{2}(b - a)^2.$$

Demostración

Definamos la función F:$[a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - A(b - x)^2$$

donde A es la constante

$$A = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b - a)}{(b - a)^2}.$$

Este valor de la constante A garantiza la condición $F(a) = F(b)$. En efecto, tenemos

$$F(b) = f(b) - f(b) - f'(b)(b - b) - A(b - b)^2 = 0$$

y

$$\begin{aligned} F(a) &= f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - A(b - a)^2 \\ &= f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b - a)}{(b - a)^2}(b - a)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

así que $F(a) = F(b) = 0$.

Ahora bien, es claro que F es continua en $[a, b]$, ya que f y f' son continuas en $[a, b]$, además f es derivable en $[a, b]$ y f' es derivable en $[a, b]$, por tanto, F es derivable en (a, b). Por el teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Pero, para toda $x \in (a, b)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f'(x) - f''(x)(b - x) + f'(x) + 2A(b - x) \\ &= -f''(x)(b - x) + 2A(b - x). \end{aligned}$$

Así que

$$-f''(x_0)(b - x_0) + 2A(b - x_0) = 0.$$

Como $x_0 \neq b$, podemos dividir entre $b - x_0$, con lo que obtenemos

$$-f''(x_0) + 2A = 0.$$

O sea

$$\frac{f''(x_0)}{2} = A.$$

Si sustituimos el valor de A:

$$\frac{f''(x_0)}{2} = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}.$$

De donde obtenemos, finalmente,

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = \frac{f''(x_0)}{2}(b-a)^2$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(x_0)}{2}(b-a)^2.$$

Esto prueba el teorema.

7.9.4 Teorema (de Taylor orden 3)

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$. Se supone que existen f' y f'' y son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se supone que también existe f''' en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(b-a)^3$$

Demostración

Definamos la función $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - A(b-x)^3$$

donde A es la constante

$$A = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f''(a)(b-a)^2}{(b-a)^3}.$$

Como en la demostración anterior, es fácil verificar aquí que $F(b) = F(a) = 0$. Otra vez, el valor $F(a) = 0$ está garantizado por la forma en la que se eligió la constante A.

La función F es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), por lo que satisface las condiciones del teorema de Rolle. Por tanto, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$.

Pero para toda $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) - \frac{1}{2}\left[f^{(3)}(x)(b-x)^2 + f''(x)2(b-x)(-1)\right] - 3A(b-x)^2(-1) \\ &= -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) - \frac{1}{2}f^{(3)}(x)(b-x)^2 + f''(x)(b-x) + 3A(b-x)^2 \end{aligned}$$

o sea

$$F'(x) = -\frac{1}{2}f^{(3)}(x)(b-x)^2 + 3A(b-x)^2.$$

Así que

$$-\frac{1}{2}f^{(3)}(x_0)(b-x_0)^2 + 3A(b-x_0)^2 = 0.$$

Después de dividir entre $(b-x_0)^2$ y despejar A, obtenemos

$$A = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

Sustituyendo la expresión para A:

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f''(a)(b-a)^2}{(b-a)^3} = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

De donde finalmente obtenemos

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(b-a)^3.$$

Esto prueba el teorema.

7.9.5 Teorema (de Taylor de orden *n*)

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$. Supongamos que existen las derivadas $f', f'', \ldots f^{(n)}$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y son continuas. Asimismo, supongamos que existe $f^{(n+1)}$ en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Demostración

La demostración del caso general es totalmente similar a la de los casos particulares anteriores; sin embargo, ahora nos enfrentamos a un problema de derivación para el cual es muy importante contar con una buena notación matemática. Asimismo, en este podemos observar que la notación sigma para la suma resulta especialmente útil.

Entonces, procedamos como en los casos anteriores. Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = f(b) - \left[f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3 + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(b-x)^{n+1} \right]$$

Donde A es una constante. Observe la similitud entre esta fórmula que define F y la fórmula del teorema. Usando notación sigma, la función F se puede expresar como

$$F(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}.$$

Como todas las funciones $f', f'', \ldots f^{(n)}$ son continuas en $[a, b]$, F resulta continua en $[a, b]$. Además, $f', f'', \ldots f^{(n)}$ son derivables en $[a, b]$, excepto $f^{(n)}$, que es derivable en el abierto (a, b); entonces, F es derivable en (a, b). Además, $F(b) = 0$. Si elegimos el valor de A como

$$A = \frac{f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{(b-a)^{n+1}}$$

también tenemos $F(a) = 0$. Así que $F(b) = F(a) = 0$. De esta forma, se cumplen las hipótesis del teorema del Rolle y por tanto existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$.

Así pues, obtengamos la derivada de la función

$$F(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^{k} - A(b - x)^{n+1}$$

para lo cual será muy útil la notación sigma. De esta forma, tenemos

$$F'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}_{(x)}}{k!}(b - x)^{k} - \frac{f^{(k+1)}_{(x)}}{(k-1)!}(b - x)^{k-1} \right] + A(n+1)(b - x)^{n}.$$

Separemos las sumatorias

$$F'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}_{(x)}}{k!}(b - k)^{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)(x)}}{(k-1)!} \; (b - k)^{k-1} + A(n+1)(b - x)^{n}$$

Cambiemos el índice de la segunda sigma y separemos algunos términos de ambas sigmas:

$$F'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}_{(x)}}{k!}(b - k)^{k} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^{n}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}_{(x)}}{k!}(b - k)^{k} + f'(x) + A(n+1)(b - x)^{n}.$$

Entonces, la expresión se simplifica como

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^{n} + A(n+1)(b - x)^{n}.$$

Evaluando en x_0 e igualando a cero obtenemos

$$-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(b - x_0)^{n} + A(n+1)(b - x_0)^{n} = 0.$$

Como $b \neq x_0$, entonces

$$-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} + A(n+1) = 0.$$

De donde obtenemos

$$A = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}.$$

Recordemos que

$$A = \frac{f(b) - \left[f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^{n} \right]}{(b - a)^{n+1}},$$

entonces, tenemos

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = \frac{f(b) - \left[f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^{n} \right]}{(b - a)^{n+1}}.$$

De donde finalmente obtenemos

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!}(b - a)^{n + 1}.$$

Esta fórmula también se escribe

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!}(b - a)^{n + 1}$$

en donde estamos usando las convenciones $f^{(0)}(x) = f(x)$ y $0! = 1$.

7.10 Polinomio de Taylor

Si en la expresión del teorema de Taylor

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

reemplazamos b por la variable x, la expresión se escribe

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n + 1)!}(x - a)^{n + 1}$$

Definición

A la expresión anterior se le llama el **desarrollo de Taylor** de f alrededor del punto a.

Al polinomio

$$T(a, n, x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se le llama el **polinomio de Taylor** de f de **orden** n en el punto a.

El polinomio de Taylor de orden n es de grado menor o igual que n, no necesariamente es de grado n.

Los polinomios de Taylor de una función f alrededor de un punto a, son funciones polinomiales que se aproximan a la función en una vecindad del punto. En general, se tiene que a mayor grado mejor aproximación y, también, a mayor cercanía de los puntos x a x_0, mayor aproximación. El error que se comete al tomar el polinomio de Taylor en una vecindad del punto x_0, en lugar de la función f, está dado por el término $\frac{1}{(n + 1)!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}$. Este error depende de n y de la distancia de x a x_0.

Aun cuando hemos definido el polinomio de Taylor haciendo referencia al teorema de Taylor, el polinomio de Taylor de orden n de una función f en un punto a

$$T(a, n, x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x - a)^n$$

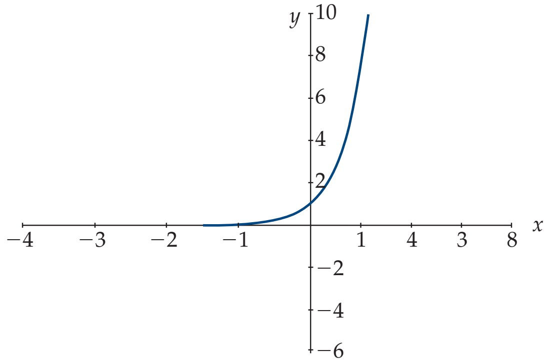
queda definido cuando f es n veces derivable en a. No es necesario que f sea $n + 1$ veces derivable en a ni mucho menos en una vecindad de este punto. Esta condición solo fue requerida para establecer el teorema de Taylor, que también podemos llamar teorema del valor medio. No obstante que las condiciones sobre f ahora son más débiles, el polinomio de Taylor tiene interesantes propiedades.

Ejemplo 36

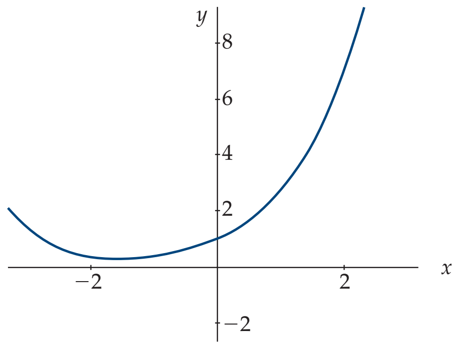
Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo entero positivo n y toda x real, en particular $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Entonces, para n dada y cada x existe $x_0 = x_0(x)$ tal que

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

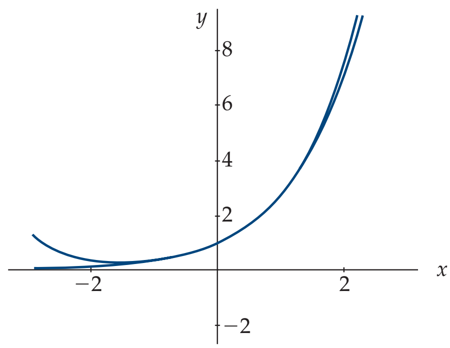
En la figura siguiente se muestran las gráficas de la función exponencial $f(x) = e^x$ y del polinomio de Taylor de grado 4, $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$, con el fin de mostrar en qué medida el polinomio se aproxima a la exponencial.



$y = e^x$



$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4$



$y = e^x$

$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

Ejemplo 37

Si $f(x) = \text{sen}\, x$, entonces

$$f^{(n)}_{(x)} = \begin{cases} \text{sen}\, x, \text{ si } n = 4k \\ \cos x, \text{ si } n = 4k+1 \\ -\text{sen}\, x, \text{ si } n = 4k+2 \\ -\cos x, \text{ si } n = 4k+3 \end{cases}$$

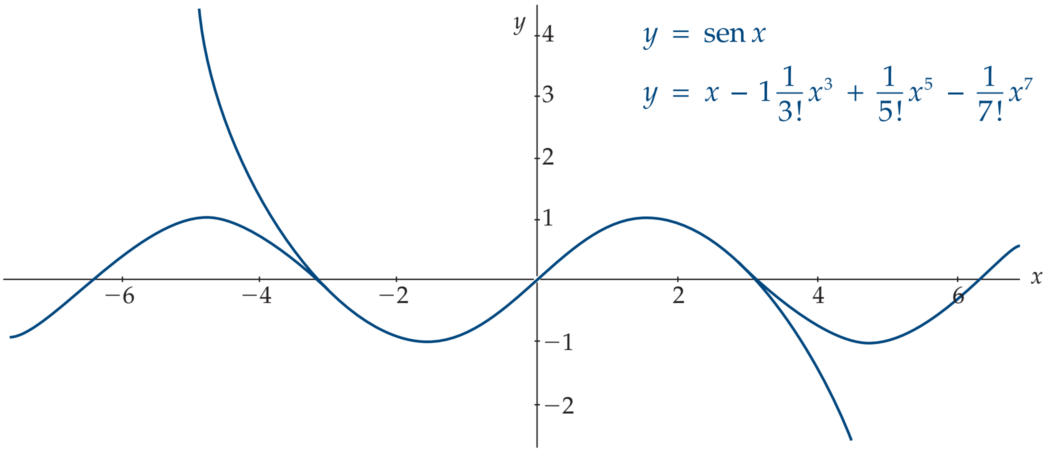
En particular

$$f_{(0)}^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 4k \\ 1, \text{ si } n = 4k+1 \\ 0, \text{ si } n = 4k+2 \\ -1, \text{ si } n = 4k+3 \end{cases}$$

Entonces, si n es un entero positivo impar, digamos $n = 2k - 1$, existe $x_0 = x_0(x)$ entre 0 y x, tal que

$$f(x) = \operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + (-1)^k \frac{\operatorname{sen} x_0}{(2k)!}x^{2k}.$$

En la gráfica siguiente se presenta la función sen x y su polinomio de Taylor de grado 7 alrededor del cero.



Ejemplo 38

Si $f(x) = \cos x$, entonces

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ si } n = 4k \\ -\operatorname{sen} x, \text{ si } n = 4k+1 \\ -\cos x, \text{ si } n = 4k+2 \\ \operatorname{sen} x, \text{ si } n = 4k+3 \end{cases}$$

En particular

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 4k \\ 0, \text{ si } n = 4k+1 \\ -1, \text{ si } n = 4k+2 \\ 0, \text{ si } n = 4k+3 \end{cases}$$

Entonces, si n es un entero positivo par, digamos $n = 2k$, existe $x_0 = x_0(x)$ entre 0 y x, tal que

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + (-1)^k \frac{\operatorname{sen} x_0}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Para referencias futuras, recordamos los polinomios de Taylor de las funciones e^x, sen x y cos x en el punto $a = 0$, por lo que es necesario tenerlos presentes.

- Para e^x: $T(0, n, x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$
- Para sen x: $T(0, 2k-1, x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$
- Para cos x: $T(0, 2k, x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$.

7.10.1 Orden de aproximación del polinomio de Taylor

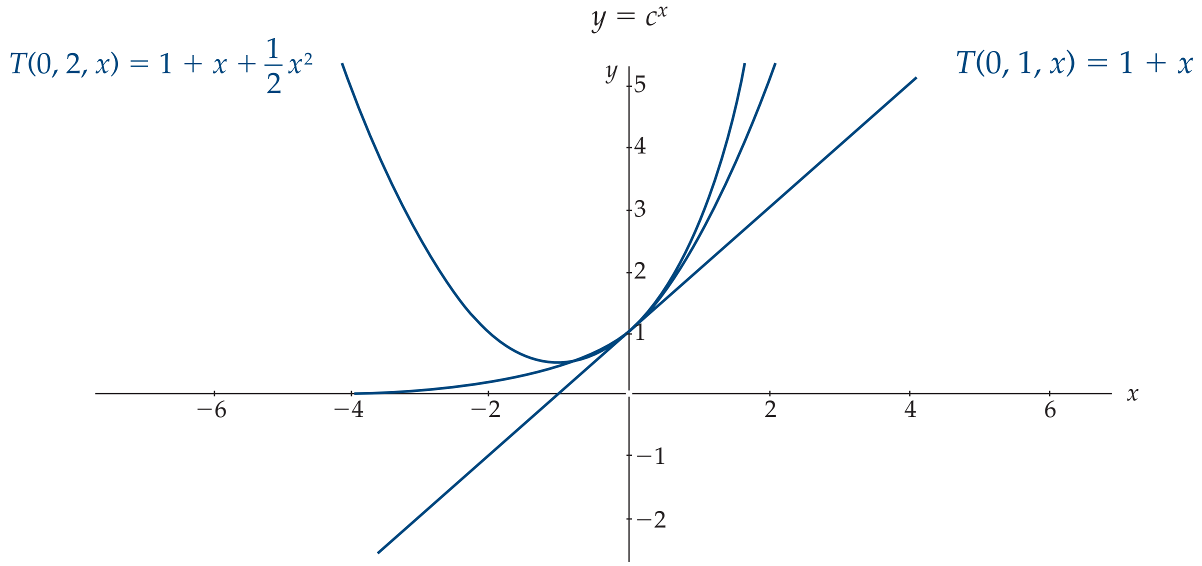
Como ya lo hemos mencionado antes, el polinomio de Taylor de una función en un punto puede considerarse una aproximación de la función en una vecindad del punto. La gráfica siguiente representa la función exponencial e^x, así como de sus polinomios de Taylor en el punto $a = 0$.

$$T(0, 1, x) = 1 + x$$

y

$$T(0, 2, x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

de grados 1 y 2, respectivamente.



En general, el polinomio de Taylor $T(a, 1, x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ de una función f en un punto a, corresponde a la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. El polinomio de Taylor de segundo orden

$$T(a, 2, x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

en general es de segundo grado, por lo que representa una parábola, también tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Este polinomio se aproxima mejor a f que el polinomio de orden 1. Vamos a precisar qué significa mejor aproximación, mediante el concepto de orden de aproximación.

7.10.1.1 Aproximación de primer orden

Puesto que

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - T(a,1,x)}{x - a} &= \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\end{aligned}$$

y dado que por definición

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(a,1,x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]}{x - a} = 0.$$

Así que el polinomio de Taylor de primer orden

$$T(a, 1, x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

no solo tiene la propiedad de que $f(x) - T(a, 1, x)$ tiende a cero cuando x tiende al punto a, sino que la diferencia $f(x) - T(a, 1, x)$, aun dividida entre $x - a$, tiende a cero

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x - a)\right]}{x - a} = 0.$$

Debido a este límite, decimos que el polinomio $T(a, 1, x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es una **aproximación de primer orden** de f en el punto a.

7.10.1.2 Aproximación de segundo orden

Estudiemos ahora el cociente

$$\frac{f(x) - T(a,2,x)}{(x - a)^2} = \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2]}{(x - a)^2}$$

Aplicando la regla de l´Hospital tenemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2]}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-[f'(a)+f''(a)(x-a)]}{2(x-a)}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-f''(a)\right].$$

Ahora bien, por definición de $f''(a)$, se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = f''(a),$$

por tanto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2]}{(x-a)^2} = 0\cdot$$

Esto quiere decir que $T(a, 2, x)$ es una **aproximación de orden** 2 de f en a.

7.10.1.3 Aproximación de orden n

Aplicando sucesivamente la regla de l´Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T(a,n,x)}{(x-a)^n}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n\right]}{(x-a)^n}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-\left[f^{(n-1)}(a)+f^{(n)}(a)(x-a)\right]}{n!(x-a)}$$
$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-f^{(n)}(a)\right]$$

Por consiguiente

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n\right]}{(x-a)^n} = 0$$

Debido al límite anterior diremos que el polinomio de Taylor $T(a, n, x)$ es una **aproximación de orden** n de f en el punto a.

7.11 Criterio de la *n*-ésima derivada

El criterio de la segunda derivada establece que si una función f es dos veces derivable en un punto a y sus derivadas satisfacen $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$, entonces f tiene un mínimo local en a si $f''(a) < 0$ y un máximo local en a si $f'(a) > 0$. Por otra parte, si $f''(a) = 0$ entonces f no necesariamente tiene

máximo o mínimo en a. De hecho, no se puede afirmar nada en ese sentido, es decir, puede ocurrir que f tenga máximo, mínimo o nada en a, como lo ilustran las funciones $f_1(x) = -x^4$, $f_1(x) = x^4$ y $f_1(x) = x^3$; para todas estas, la primera y la segunda derivadas se anulan en cero. Sin embargo, con la propiedad del polinomio de Taylor, analizada en la sección anterior, podemos establecer un criterio para estos casos en los que la segunda derivada se anula en el punto en cuestión.

Teorema

Sea f una función n veces derivable en un punto a interior de su dominio. Supongamos

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces

a) Si n es par, $f(a)$ es un máximo local si $f^{(n)}(a) < 0$ y es un mínimo local si $f^{(n)}(a) > 0$.

b) Si n es impar, $f(a)$ no es ni un máximo local ni un mínimo local.

Demostración

Puesto que todas las derivadas de f hasta el orden $n - 1$ se anulan en a, el polinomio de Taylor de f de orden n en a queda como

$$T(a, n, x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n .$$

Entonces, por el teorema anterior tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(a,n,x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Es decir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n}{(x - a)^n} = \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right] = 0.$$

O sea

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} .$$

Dado que $f^{(n)}(a) \neq 0$, la relación anterior implica que en una vecindad I de a, el cociente

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n}$$

tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$. Esta es la información que nos va a permitir averiguar sobre la naturaleza del punto a. En efecto, si n es par, entonces $(x - a)^n$ será positivo para toda $x \neq a$, independientemente de si x es mayor o menor que a. Por tanto, la diferencia $f(x) - f(a)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$ para toda x en la vecindad I, con $x \neq a$. Esto significa que $f(x) < f(a)$ para toda $x \in I$ con $x \neq a$ cuando $f^{(n)}(a) < 0$ y $f(x) > f(a)$ para toda $x \in I$ con $x \neq a$ cuando $f^{(n)}(a) > 0$. Esto prueba el inciso 1.

Ahora, probemos el inciso 2. Si n es impar, entonces $(x - a)^n$ será positivo para $x > a$ y negativo para $x < a$. Por tanto, dado que el cociente $\frac{f(x) - (f(a))}{(x - a)^n}$ debe tener el signo de $f^{(n)}(a)$, entonces

$f(x) - f(a) < 0$ para x que se encuentren de un lado de a y $f(x) - f(a) > 0$ para x que se encuentren del otro lado de a. Así que f no tiene ni máximo ni mínimo local en a. Esto prueba el teorema.

7.11.1 Dos situaciones donde no aplica el criterio de la *n*-ésima derivada

El criterio de la n-ésima derivada requiere que la función tenga derivada de algún orden en a diferente de cero. Hay dos razones lógicas por las que esto puede no ocurrir y por las que no es aplicable este criterio:

- la función tiene derivadas en a solo hasta un cierto orden y todas son cero

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ y no existe } f^{(n)}(a).$$

- la función tiene las derivadas de todos los órdenes en a, pero no hay alguna diferente de cero

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ para todo entero positivo } k.$$

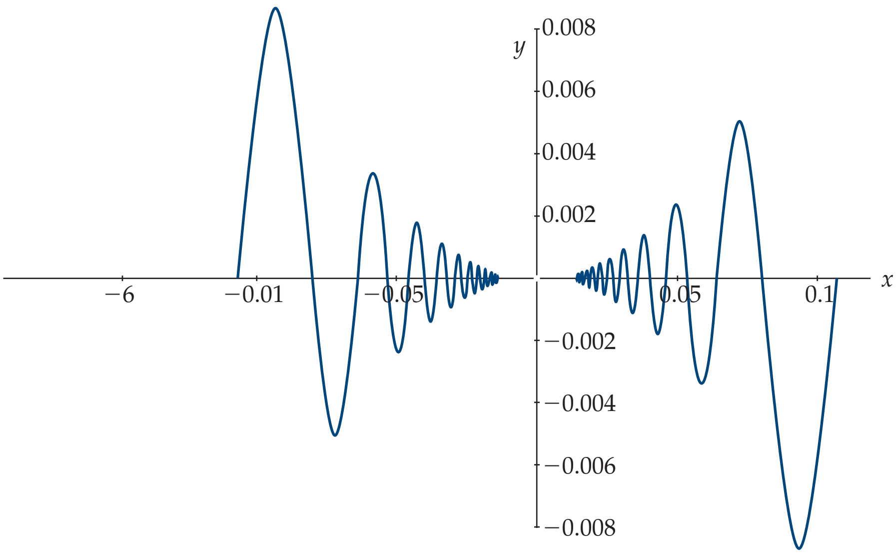
Los siguientes ejemplos ilustran que se pueden suscitar ambas situaciones.

Ejemplo 39

Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es 2 veces derivable en $x = 0$, de hecho $f'(0) = f''(0) = 0$, pero no existe la derivada de orden 3 en $x = 0$. Se deja como ejercicio para el lector que verifique esta información.

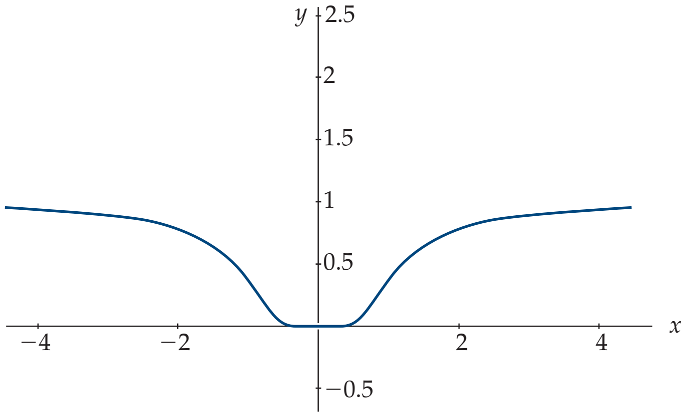


Ejemplo 40

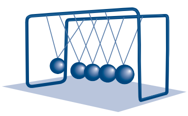
Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$, de hecho $f^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k, por tanto no es aplicable el criterio de la n-ésima derivada para alguna n; sin embargo, la función tiene un mínimo absoluto en ese punto. Se deja como ejercicio para el lector la prueba de las afirmaciones.



7.12 Problemas y ejercicios



I. Halle la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ de abscisa indicada, para cada una de las siguientes funciones. Algunas de estas tangentes son verticales, se sugiere obtener la gráfica con algún equipo de cómputo.

1. $f(x) = x^2 + 1, \quad a = 1$

2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,, \quad a = 1$

3. $f(x) = x\,|\,x\,| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \; a = 0$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}\,, \; a = 0$

5. $f(x) = e^{-x^2}, \quad a = 0$

6. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}\,, \quad a = \pi$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad a = 0$

II. Determine los puntos donde las gráficas de las siguientes funciones *no tienen tangente*. Considere que en algunos puntos, las gráficas tienen una especie de pico.

8. $f(x) = \sqrt{|\,x\,|}$

9. $f(x) = \operatorname{sen}\,|x|$

10. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

11. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|}{2}$

12. $f(x) = \text{máx}(\cos x, \text{sen } x) =$
$$\frac{\cos x + \text{sen } x + |\cos x - \text{sen } x|}{2}.$$

13. $f(x) = \text{máx}(x, x^2)$
$$= \frac{x + x^2 + |x - x^2|}{2}.$$

14. $f(x) = \text{máx}(x^2, \cos x) =$
$$\frac{x^2 + \cos x + |x^2 - \cos x|}{2}.$$

15. $f(x) = |x + 1| + 1.$

III. Indique si las gráficas de las siguientes funciones tienen tangente en el punto indicado.

16. $f(x) = |x^3| = x^2\,|x|$, punto (0, 0)

17. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$, punto (0, 0)

18. $f(x) = |\cos x|$, punto (0, 0)

19. $f(x) = |\tan x|$, punto (0, 0)

20. $f(x) = |x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}|$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, punto (0, 0)

21. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, punto (0, 0)

22. $f(x) = \dfrac{x^3 + |x^3|}{2}$, punto (0, 0)

23. Pruebe que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ se cortan en los puntos que tienen abscisas $x_1 = \dfrac{\sqrt{\sqrt{17} - 1}}{2}$ y $x^1 = -\dfrac{\sqrt{\sqrt{17} - 1}}{2}$, respectivamente y muestre que las tangentes a las curvas en estos puntos son perpendiculares. Una vez resuelto el problema algebraicamente se recomienda hacer las gráficas en una computadora.

24. Pruebe que las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ se cortan perpendicularmente en el punto que tiene abscisa $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}}$.

IV. Indique si las siguientes funciones toman valores máximos o mínimos en los intervalos indicados. Cuando sea el caso, determine esos valores y los puntos donde se alcanzan. Observe que los intervalos no necesariamente son cerrados.

25. $f(x) = x^3, -1 < x \leq 1$

26. $f(x) = |x|, -1 \leq x \leq 2$

27. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}, -\infty, x, \infty$

28. $f(x) = \text{sen } x, 0 < x < \pi$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0, 0 \leq x \leq 1$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 2, 0 \leq x \leq 1$

V. Determine los valores máximos y mínimos, locales y absolutos, así como los puntos donde se alcanzan estos valores extremos, de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

31. $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad -1 \leq x \leq 1$

32. $f(x) = x^4 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$

33. $f(x) = x^2 (1 - x)^2, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

34. $f(x) = \text{sen}^2 x, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

35. $f(x) = x \text{ sen } \dfrac{1}{x}, \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2\pi}$

36. $f(x) = \text{sen } x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

37. $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

38. Halle los valores mínimos locales de la función $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ y los puntos donde se alcanzan.

39. Halle los valores mínimos locales de la función $f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2$ y los puntos donde se alcanzan.

VI. Encuentre el máximo absoluto de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

40. $f(x) = 1 - \text{sen}^3 x, \qquad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

41. $f(x) = \cos^2 x + \text{sen } x, \qquad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

42. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad 1 \leq x \leq 4$

43. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad 1 \leq x \leq 3.1$

44. Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$, en el intervalo $-1 \leq x \leq 3$.

45. Pruebe que la función $T(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \sqrt{4+(3-x)^2}$ tiene un mínimo absoluto y que lo alcanza en un único punto x, el cual satisface la ecuación

$$\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{4+(3-x)^2}}$$

46. Sea $f(x) = x^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Pruebe que esta función es dos veces derivable en $x = 0$ y que además $f'(0) = f''(0) = 0$. Asimismo, compruebe que esta función tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. Este valor mínimo también se alcanza en una infinidad de puntos alrededor de $x = 0$. Se sugiere bosquejar la gráfica con lápiz y papel y después comparar con lo que se obtiene con una computadora.

47. Aplique el teorema de Rolle a la función $f(x) = x(x^2 - 4)$ en los intervalos $[0, 1]$ y $[-1, 1]$.

48. Algunos estudiantes que se inician en álgebra elemental cometen el error de escribir $(x + a)^n = x^n + a^n$, donde n es un entero positivo. Pruebe que si $a \neq 0$ y n es par, el único valor de x para el cual esta igualdad es cierta es $x = 0$.

Ayuda: suponga que la igualdad vale para un valor $x = x_0$ y aplique el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^n + a^n - (x + a)^n$ en un intervalo adecuado.

49. Sea $f(x) = x^n$ donde n es un entero positivo par. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica en un punto arbitrario $(a, f(a)) = (a, a^n)$. Usando el teorema de Rolle pruebe que esta tangente no tiene más puntos comunes con la gráfica.

50. Generalice el resultado del problema anterior. Pruebe que si la derivada $f'(x)$ es estrictamente creciente, entonces toda recta tangente no tiene otro punto común con la gráfica además del punto de tangencia.

VII. Para cada una de las siguientes funciones, halle un punto $(a, f(a))$ en el intervalo que se indica, tal que la tangente a la gráfica en ese punto sea paralela a la cuerda que une los extremos de la misma, en otras palabras aplique el teorema del valor medio de Lagrange.

51. $f(x) = x^2, \quad [0, 1]$

52. $f(x) = x^3, \quad [-1, 1]$

53. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

54. $f(x) = e^x, \quad [0, 1]$

55. $f(x) = x^3 + x, \quad [0, 1]$

56. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad [0, 10]$

57. Pruebe que si una función f es dos veces derivable en un intervalo (a, b) y que en este intervalo f tiene tres raíces, entonces $f''(x) = 0$ para algún punto $x \in (a, b)$.

58. Suponga que f es continua en un intervalo (α, β) y derivable en ese intervalo, excepto, posiblemente, en un punto $a \in (\alpha, \beta)$. Suponga que existe el límite

$$\lim_{x \to a} f'(x)$$

Pruebe que f entonces es derivable en a y además $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$.

59. La derivada del polinomio $p(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ es un polinomio de grado 4. Sin calcular $p'(x)$, compruebe que este polinomio tiene cuatro raíces reales, cada una de ellas en los respectivos intervalos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 4)$.

60. Generalice el resultado del problema anterior a un polinomio de grado n, con n raíces reales diferentes $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n)$.

61. Sea r cualquier real. Pruebe que $f(x) = x^3 - 3x + r$ no puede tener dos raíces en el intervalo $[0, 1]$.

62. Pruebe que la función $f(x) = e^x - 10x$ no se puede anular en más de dos puntos.

63. Pruebe que la función $f(x) = e^x - 10x^2$ no se puede anular en más de tres puntos.

64. Pruebe que la ecuación $x^2 - \cos x = 0$ tiene al menos dos raíces, pero que no puede tener tres; por tanto, tiene exactamente dos raíces.

65. Pruebe que la ecuación $x^6 + 15x^2 - 60x + 1 = 0$ no puede tener tres raíces reales.

66. Pruebe que la ecuación $x^5 + 10x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ no puede tener más de cuatro raíces reales, independientemente de los valores de a, b y c.

67. Pruebe que si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales tales que

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

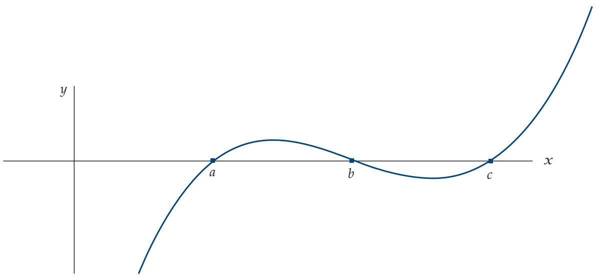
entonces existe $x \in [0, 1]$, tal que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

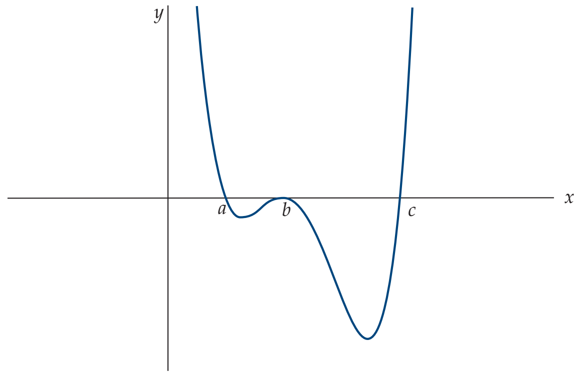
68. Suponga que f es n veces derivable en un intervalo y que se anula en $n + 1$ puntos diferentes. Pruebe que $f^{(n)}(x)$ se anula en al menos un punto.

69. Cada una de las siguientes figuras muestra la gráfica de la derivada f' de una función f. Determine los puntos donde f tiene máximos o mínimos locales.

a)



b)



VIII. Calcule los siguientes límites.

70. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

71. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

72. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x^3}$

73. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^4 + 5x^3 + 2x}$

74. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

75. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$

76. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$

77. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x - \tan 2x}{\tan 4x - \tan 5x}$

78. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \operatorname{sen} x^2}$

79. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

80. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$

81. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} 2x - 2\operatorname{arcsen} x}{x^3}$

82. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos x}{x^4}$

83. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$

84. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

85. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

86. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4}\right)$

87. Pruebe que el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$$

no puede calcularse con la regla de l'Hospital. Calcule este límite.

IX. Para cada una de las siguientes funciones, determine los intervalos donde es creciente y los intervalos donde es decreciente.

88. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

89. $f(x) = x^3$

90. $f(x) = x^3 - x$

91. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

92. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

93. $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

94. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

95. $f(x) = \sqrt{|x|}$

96. $f(x)\sqrt{1 + x^2}$

97. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^4$

98. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

99. $f(x) = e^{-x}$

100. $f(x) = e^{-x^2}$

101. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

102. $f(x) = \log(1 + x)$

103. $f(x) = \frac{\log x}{x}$

104. Pruebe de la desigualdad $\operatorname{sen} x \leq x$. Pruebe que $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ es creciente. Usando el hecho de que $f(0) = 0$, deduzca que se tiene $\operatorname{sen} x \leq x$ para todo $x \geq 0$.

105. Pruebe que $x \leq \tan x$ para toda $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

106. Sean las funciones

$$f(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \operatorname{sen} x$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \operatorname{sen} x$$

Pruebe las desigualdades

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

para toda $x \geq 0$.

107. Imitando la prueba de los dos problemas anteriores, pruebe las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

108. Generalice los resultados de los dos problemas anteriores.

109. Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe una constante k tal que $f(x) = ke^x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Ayuda: derive la función $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

110. Pruebe que la derivada de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}\right)$$

es idéntica a cero. Esta función es constante en cada uno de los intervalos que componen su dominio. Determine estos intervalos y los valores constantes. Después de que realice los cálculos puede graficar la función con una computadora para verificar su resultado.

111. Pruebe que la función

$$f(x) = \arctan\frac{3 + \cos x + \operatorname{sen} x}{3 + \cos x - \operatorname{sen} x} - \arctan\frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}$$

es una constante y halle su valor.

112. Pruebe que la función

$$F(x) = \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} - \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$$

es una constante y halle su valor.

113. Exprese el polinomio $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en potencias de $x - 3$, es decir en la forma

$$f(x) = b_0 + b_1(x-2) + b_2(x-2)^2$$

114. Exprese el polinomio $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ en potencias de $x - 1$.

115. Exprese el polinomio $f(x) = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$ en potencias de $x + 2$. Obtendrá un resultado muy simple.

116. Exprese el polinomio $f(x) = x^4 - 12x^3 + 55x^2 - 114x + 90$ en potencias de $x - 3$ y deduzca que se cumple $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

117. Halle el polinomio de Taylor de la función de orden n de la función $f(x) = \log(x+1)$ alrededor del punto $a = 0$.

118. Halle el polinomio de Taylor de orden 5, de la función $f(x) = \tan x$ alrededor $a = 0$.

119. Halle el polinomio de Taylor de orden $2n + 1$ de la función sen $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ alrededor de $a = 0$.

X. Para cada uno de los siguientes incisos, estime la diferencia entre la función y el polinomio de Taylor indicado, esta diferencia es el error que se tiene si tomamos el polinomio de Taylor como aproximación de la función. Recordemos que $T(a, n, x)$ representa el polinomio de Taylor de orden n alrededor de a, en la variable x.

120. $f(x) = e^x$, $T(0, n, x)$

121. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $T(0, n, x)$

122. $f(x) = \cos x$, $T(0, n, x)$

123. Estime el error cuando se toma el polinomio $T(0, 4, x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ como aproximación de e^x, para $0 < x < 1$. Con el polinomio anterior, calcule una aproximación de $\sqrt{e}$ y determine el número de decimales correctos.

124. Calcule una aproximación de $\sqrt[4]{e}$ con tres decimales correctos.

125. Calcule una aproximación de sen1 (1 radián), con cinco decimales correctos.

CAPÍTULO 8

APLICACIONES DE LA DERIVADA



8.1 Introducción

En este capítulo retomaremos algunos de los ejemplos que se plantearon en el capítulo 6 y que se utilizaron para motivar los conceptos de razón de cambio y de derivada; ahora, los analizaremos con mayor detalle, en particular el problema del movimiento de un objeto en el campo gravitacional de la Tierra, como es el caso del tiro vertical. Una de las aplicaciones clásicas de la derivada, que también estudiaremos aquí, es en la resolución de problemas de máximos y mínimos, que llamaremos problemas de optimización.

8.2 Caída libre y lanzamiento de proyectiles

8.2.1 Velocidad y aceleración en movimiento rectilíneo

Uno de los conceptos más importantes que aporta la derivada es el de velocidad instantánea. Esta no puede concebirse sin el paso al límite, que no es un concepto algebraico, sino más bien analítico. Si un cuerpo se mueve en una recta, su ecuación de movimiento es una función del tiempo cuyos valores indican la posición del cuerpo en esa recta respecto a un sistema de coordenadas. La derivada de esa función nos proporcionará la velocidad instantánea en cada instante del intervalo de tiempo durante el cual la función describe el movimiento. En el caso particular de movimiento unidimensional, de hecho de movimiento rectilíneo, el sistema de coordenadas consiste en una recta, en donde se elige arbitraria o convenientemente un punto referido como origen, así como los semiejes positivo y negativo. Esta recta coordenada no debe ser necesariamente horizontal, puede ser vertical o tener cualquier orientación, y el semieje positivo puede ser cualquiera de los semiejes que determina el origen; la elección se hace según convenga para describir el movimiento del objeto en cuestión.

Ejemplos de movimiento rectilíneo son la caída libre y el lanzamiento "vertical" de proyectiles. El término vertical es relativo, pues si alguien lanza un proyectil hacia arriba desde el nivel del piso y un observador se coloca un tanto lejos de la Tierra, por ejemplo, desde la Luna, los términos "vertical" o "hacia arriba" no tendrán el sentido que tienen para la persona que hace el lanzamiento. Para el observador que se halla en el exterior, el movimiento simplemente se realiza en una recta en una cierta dirección.

Supongamos, entonces, que respecto a una recta coordenada, el movimiento de un cuerpo es descrito mediante una función $f(t)$. Esto significa que en cada instante t, el cuerpo se encuentra en la posición $f(t)$, más precisamente, en la recta coordenada, la posición del cuerpo tiene coordenada $f(t)$. El valor de $f(t)$ puede ser positivo, negativo o cero; si es positivo, el móvil se encuentra en el semieje positivo de la recta coordenada, si $f(t)$ es negativo, el móvil se encuentra en el semieje negativo (véase figura).

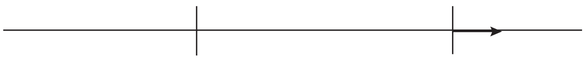


La derivada en el punto t

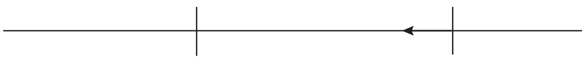
$$v(t) = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

es la **velocidad instantánea** del objeto en el instante t. Este valor $v(t)$ puede ser positivo o negativo.

Si $v(t) > 0$, entonces el cociente $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ es positivo para $|h|$ suficientemente pequeña, sin importar si h es positivo o negativo. Esto significa que para instantes posteriores y muy cercanos a t el objeto está más lejos del origen que en el instante t, es decir: $f(t+h) > f(t)$. También se tiene que para instantes anteriores a t, el objeto se encuentra más cerca, es decir $f(t+h) < f(t)$. De ambos hechos, concluimos que en un intervalo de tiempo alrededor del instante t, el cuerpo se está alejando del origen. En resumen, la desigualdad $v(t) > 0$ significa que en el instante t, el cuerpo se aleja del origen, lo que significa que f es creciente en al menos un intervalo "pequeño" alrededor de t. En forma menos precisa, podemos decir que cuando $v(t) > 0$ el movimiento se realiza "hacia la derecha" (véase figura).



Con base en un análisis similar, es posible concluir que en el caso $v(t) < 0$, f es decreciente y que el movimiento se realiza "hacia la izquierda" (véase figura).



La **aceleración instantánea** $a(t)$ es la razón de cambio instantánea de la función velocidad $v(t)$ respecto del tiempo:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}.$$

La aceleración instantánea $a(t) = v'(t) = f''(t)$, a la cual llamaremos simplemente aceleración, indica cómo cambia la velocidad respecto del tiempo en el instante t. La aceleración $a(t)$ es una función de t, esta puede ser constante, en cuyo caso diremos que el movimiento es **uniformemente acelerado**. En este tipo de movimiento tenemos, entonces,

$$a(t) \equiv c \text{ (constante).}$$

Dado que $a(t) = v'(t) = c$, y con base en nuestra experiencia sobre derivación, es posible concluir que $v(t)$ es una función de la forma $v(t) = ct + \alpha$, donde α es una constante. Este hecho se justificará en el capítulo 10. Por el momento, es suficiente observar que la derivada de $v(t) = ct + \alpha$ es la función constante c. De la misma manera, dado que $f'(t) = v(t) = ct + \alpha$, obtenemos que $f(t)$ es de la forma

$$f(t) = \frac{1}{2}ct^2 + \alpha t + \beta,$$

donde β es una constante. En resumen, si $f(t)$ representa un movimiento uniformemente acelerado, entonces $f(t)$ es de la forma anterior.

8.2.2 Ley de la gravitación universal

Una de las leyes universales de la física es la *Ley de la gravitación universal* de Newton, la cual establece que dos cuerpos de masas m y M, respectivamente, se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas y al recíproco del cuadrado de la distancia que los separa. La distancia

entre los cuerpos se mide entre los centros de masa de los cuerpos; el centro de masa constituye el punto donde se concentra la masa del cuerpo. Si esto último resulta demasiado confuso, entonces mejor hablemos de masas puntuales, uno de los conceptos favoritos de los físicos, el cual considera que un punto puede tener una masa dada. De esta manera, ubicamos las masas en puntos y no en regiones del plano o del espacio, ¿esto le parece mejor? La constante de proporcionalidad en esta ley se llama *constante de la gravitación universal*. Más específicamente, la fuerza establecida en la ley de la gravitación universal es de atracción y su magnitud está dada por

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

donde r es la distancia, medida en metros, entre los centros de masa de los cuerpos y la constante de la gravitación universal G, cuyo valor aproximado es

$$G \cong 6.673 \text{ Nt} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

La fuerza de atracción gravitacional es la causa de que un cuerpo caiga hacia la Tierra. La fuerza que experimenta un cuerpo de masa m hacia el centro de la Tierra es su peso; las unidades del peso son newtons. En física se distingue la masa del peso; así, la masa está dada en kilogramos mientras que el peso está dado en newtons. Un cuerpo con masa de un kilogramo, tiene pesos diferentes en la superficie de la Tierra y fuera o lejos de ella; la masa de un kilogramo es la misma pero el peso varía. Fuera de la Tierra, el cuerpo puede ser tan ligero que puede flotar y no caer; pero, a pesar de que casi no pesará, su masa será la misma que en la superficie de nuestro planeta.

Si el cuerpo se encuentra sobre la superficie de la Tierra, la fuerza gravitacional (que es de atracción), está dada por

$$F = G\frac{Mm}{R^2}.$$

Aquí, M es la masa de la Tierra y R el radio de la misma. La expresión anterior también se escribe

$$F = gm,$$

en donde

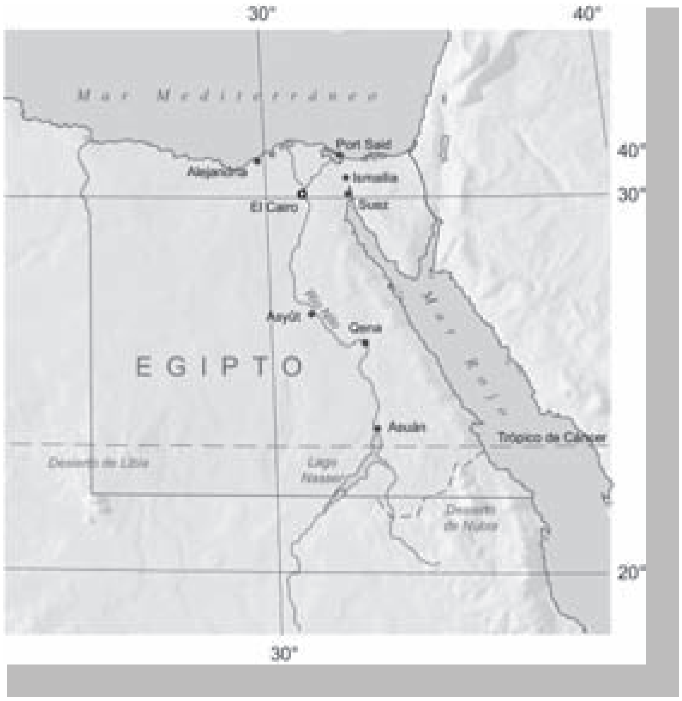
$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

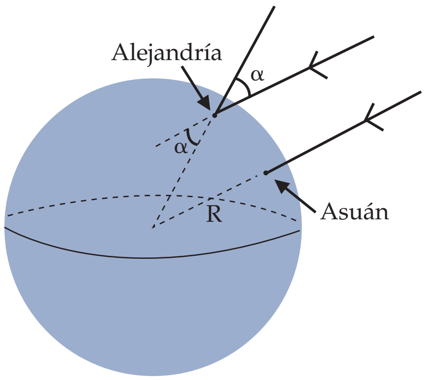
Como la Tierra no es completamente redonda, el valor del “radio” depende del punto de la superficie de la Tierra desde donde se esté considerando “ese radio”, así que el valor de g varía de punto a punto sobre la superficie de la Tierra. Es mejor no hablar del radio, sino de la distancia del objeto al centro de la Tierra (centro de masa). Un valor que por lo común se toma para g, es $g = 9.8$ m/seg^2; en algún lugar de la superficie de la Tierra, este valor es exacto.

El “radio polar” es aproximadamente $R_P = 6\,356$ km y el “radio ecuatorial” es $R_E = 6\,378$ km, así que el radio promedio de la Tierra es

$$R = 6\,367 \text{ km}.$$

Las primeras mediciones del radio de la Tierra las realizó el famoso científico griego Eratóstenes, quien vivía en Alejandría. Cuenta la historia que Eratóstenes se enteró que en el solsticio de verano (21 de junio), en Asuán, la ciudad de Egipto que en la actualidad se encuentra más al sur de ese país y ligeramente al norte del Trópico de Cáncer, al mediodía los objetos no proyectaban sombra, es decir los rayos solares caían verticalmente, por lo que a esa hora se iluminaba el fondo de un pozo. Sin embargo, eso no ocurría en Alejandría que se encontraba a 5 000 estadios de Asuán, al norte de Egipto. Existe cierta controversia respecto a lo que un estadio, como unidad de longitud, significaba para los egipcios; algunos historiadores opinan que un estadio equivalía a 158 metros; en ese caso, la distancia de Alejandría a Asuán correspondía a 790 km. Con esta información y con la medición, hecha con una vara vertical, del ángulo que al mediodía formaban los rayos solares en Alejandría, el cual era de $\frac{360°}{50} = 7.2°$, Eratóstenes pudo medir el radio de la Tierra.





El razonamiento era simple (hoy en día lo vemos simple), pero en realidad se trataba de una idea genial. Además, seguramente fue una gran proeza medir la distancia que había entre esas dos ciudades; distancia que en la actualidad se puede recorrer en una hora viajando en avión. Si 790 km corresponden a $\frac{360°}{50}$, entonces el perímetro de la Tierra es igual a 50 veces 790. Con estos datos, Eratóstenes obtuvo que la circunferencia de la Tierra era de aproximadamente $50 \times 790 = 39\,500$ km, que al dividir entre 2π, proporciona un radio de 6 286 km, valor que difiere en apenas 80 km del radio promedio de la Tierra, esto quiere decir que sus cálculos tuvieron 1.25% de error.

En un punto alejado de la Tierra, a una distancia h desde la superficie, la magnitud de la fuerza de atracción (peso) del cuerpo de masa m, está dada por

$$F(h) = G\frac{Mm}{(R + h)^2}.$$

Si nuevamente hacemos

$$g(h) = \frac{GM}{(R + h)^2},$$

la fórmula para la fuerza $F(h)$ queda como

$$F(h) = g(h)m.$$

Esta fórmula de la fuerza que experimenta la masa m (peso de m) solo es válida fuera de la Tierra, no aplica en puntos al interior de nuestro planeta. En esos casos, la fuerza de gravedad se calcula de diferente manera, aunque esta se base en el mismo principio, que es la ley de la gravitación universal. Por ejemplo, en el centro de la Tierra, la fuerza debida a la gravedad es cero; un cuerpo en el centro del globo terráqueo está rodeado por la masa de la Tierra, por lo que la fuerza resultante es cero, dando lugar a que el cuerpo flotara ahí también. Ahora, continuemos haciendo nuestro análisis para movimientos que se realizan en el exterior de la Tierra.

Dado que $g(0) = G\dfrac{M}{R^2} = 9.8$ (gravedad en la superficie de la Tierra), entonces $GM = g(0)R^2 = 9.8R^2$, así que $g(h)$ está dada por

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{GM}{(R + h)^2} \\ &= \frac{9.8R^2}{(R + h)^2}. \end{aligned}$$

O sea

$$g(h) = 9.8\left(\frac{R}{R + h}\right)^2 = 9.8\left(\frac{1}{1 + \dfrac{h}{R}}\right)^2.$$

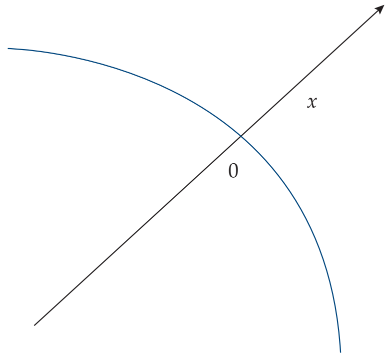
Esta fórmula permite calcular el valor de $g(h)$ en el punto en que se encuentre a cualquier altura h, desde la superficie de la Tierra. Si esta altura es pequeña comparada con el radio R de la Tierra, entonces el valor de g puede considerarse como constante e igual a 9.8. Generalizando, si h varía en un "pequeño rango" de valores, digamos en un intervalo $[h_1, h_2]$, cuya longitud $h_2 - h_1$ es pequeña comparada con la magnitud del radio de la Tierra, entonces en ese intervalo $[h_1, h_2]$ el valor de g puede considerarse constante e igual a su valor en un punto del intervalo $h_0 \in [h_1, h_2]$, por ejemplo $g(h_1)$.

Bajo estas suposiciones, la fuerza que ejerce la Tierra sobre una masa m que se encuentra a una altura h, que varía dentro de un determinado rango de valores, es constante y está dada por $F = gm$, donde g es el valor constante que tomamos como aproximación de $g(h)$ para ese rango de valores de h.

8.2.3 Segunda ley de movimiento de Newton

La segunda ley de movimiento de Newton es un principio físico que relaciona la fuerza que experimenta un cuerpo en movimiento con su aceleración. Esta ley establece que un cuerpo que experimenta una fuerza F, se moverá de tal manera que esta será igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración. En el caso del movimiento rectilíneo en una vertical, la fuerza que experimenta el cuerpo es la debida a la gravedad, por lo que su magnitud es $F(h) = g(h)m$. Esta fuerza es de atracción hacia la Tierra, esto quiere decir que si el cuerpo en movimiento viaja hacia la Tierra, el cuerpo incrementa su velocidad, pero si el cuerpo se mueve alejándose de la Tierra, entonces la velocidad disminuye, es decir, se desacelera.

Elijamos el sistema de referencia consistente en la recta donde se desarrolla el movimiento; el origen lo ubicamos al nivel del piso y el semieje positivo es el semieje "hacia arriba".



Denotemos por $x(t)$ la posición del cuerpo en esta recta coordenada. Si $x(t)$ crece, entonces su derivada $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, que es la velocidad, es positiva. Si $x(t)$ decrece, entonces $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ es negativa. Como la fuerza es de atracción hacia el centro de la Tierra, cuando $x(t)$ crece, que equivale a $v(t) > 0$, la velocidad disminuye, así que la derivada de $v(t)$ es negativa. Si $x(t)$ decrece, entonces $v(t) < 0$ y también $v(t)$ disminuye, pues cada vez se hará más negativa, por lo que nuevamente la derivada de $v(t)$ será negativa. En todos los casos tenemos

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) < 0.$$

Entonces, respecto al sistema de referencia elegido, la aceleración debida a la fuerza de gravedad es negativa. En este caso, la segunda ley de Newton queda como

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -gm.$$

O sea

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -g.$$

Siendo g una constante, se trata, entonces, de un movimiento uniformemente acelerado, como el que se analizó antes. La función del tiempo que describe el movimiento es de la forma

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta,$$

Henry Cavendish (1731-1810)

Físico y químico británico, nació en Niza (Francia), pero sus padres pertenecían a la acaudalada y respetada nobleza inglesa.

Ingresó a los 18 años (1749) a la Peterhouse, Universidad de Cambridge. En su estancia en la universidad se destacó por ser un alumno sobresaliente, pero callado, tímido, reservado y encerrado en su mundo (sus profesores solían decir que siempre estaba en *la luna*), aunque en realidad se dedicaba a razonar y reflexionar sobre diversos temas científicos.Cavendish es conocido por sus investigaciones en la química del agua y del aire y por el cálculo de la densidad de la Tierra.

Los primeros trabajos que realizó en estos campos trataban sobre el calor específico de las sustancias. En 1766 descubrió las propiedades del hidrógeno. Su trabajo más célebre fue el descubrimiento de la composición del agua. Afirmaba que "el agua está compuesta por aire deflogistizado (oxígeno) unido al flogisto (hidrógeno)". Por otra parte, también fue autor del tratado *Factitious Airs* ("Sobre el Aire Ficticio"), en el que analiza la composición del aire.

Mediante lo que se conoce como "experiment Cavendish", que describió en su trabajo *Experiences to determine the density of the Earth* (1789), determinó que la densidad de la Tierra era 5.45 veces mayor que la densidad del agua, un cálculo muy cercano a lo que establecen las técnicas modernas (5.5268 veces). Cavendish también determinó la densidad de la atmósfera y realizó importantes investigaciones sobre las corrientes eléctricas.

Otro de sus estudios de gran relevancia científica es aquel en el que demostraba experimentalmente que la ley de la gravedad de Newton se cumplía igualmente para cualquier par de cuerpos. Para tal efecto, usó una balanza de torsión en un famoso experimento, conocido como el experimento de Cavendish o experimento de la balanza de torsión, a través del cual determinó el valor de la constante de gravitación universal ($G = 6.67 \times 10^{-11}$), haciendo posible el cálculo de la masa de la Tierra y otros cuerpos del Sistema Solar.

Asimismo, se considera uno de los fundadores de la ciencia moderna de la electricidad, aunque gran parte de sus trabajos permanecieron ignorados durante un siglo. Propuso la ley de atracción entre cargas eléctricas (ley de Coulomb) y utilizó el concepto de potencial eléctrico.

y aplica en todas las circunstancias, ya sea que se deje caer el objeto desde cierta altura o se lance hacia arriba con alguna velocidad inicial.

La fórmula anterior es la ecuación de movimiento general para el caso de un cuerpo que se mueve sobre una línea vertical a causa de la fuerza gravitacional de la Tierra. Para un caso específico, debemos determinar los valores de las constantes con base en información sobre el sistema particular. Por ejemplo, si conocemos dos posiciones del cuerpo en dos instantes, t_1 y t_2, es posible determinar las constantes α y β resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$-\frac{1}{2}gt_1^2 + \alpha t_1 + \beta = x(t_1)$$
$$-\frac{1}{2}gt_2^2 + \alpha t_2 + \beta = x(t_2).$$

Los valores de estas constantes también pueden determinarse si conocemos la posición del cuerpo en un instante y su velocidad en otro o en el mismo. En este caso, se tienen ecuaciones algebraicas de la forma

$$-\frac{1}{2}gt_1^2 + \alpha t_1 + \beta = x(t_1)$$
$$-gt_2 + \alpha = x'(t_2).$$

Consideremos el caso particular de la caída libre que se obtiene al dejar caer un cuerpo desde una altura H, liberándolo desde esa altura sin impregnarle velocidad alguna. Suponiendo que el cuerpo se libera en el instante $t = 0$, las ecuaciones lineales se convierten en

$$\beta = x(0) = H$$
$$\alpha = x'(0) = 0.$$

Entonces en este caso, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta$$
$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

Por otra parte, si se trata de un lanzamiento vertical hacia arriba, con velocidad inicial $v(0) = x'(0) = v_0$ y suponiendo que el lanzamiento se hace desde una altura H, las ecuaciones quedan

$$\beta = x(0) = H$$
$$\alpha = x'(0) = v_0.$$

Así que en este caso, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + H.$$

Para obtener la máxima altura a la que llega el proyectil, solo obtenemos el instante en el que el cuerpo se detiene, es decir, el instante en el que la velocidad instantánea es cero. Este se conoce resolviendo la ecuación

$$v(t) = x'(t) = -gt + v_0 = 0.$$

De donde obtenemos

$$t = \frac{v_0}{g}\,.$$

Sustituyendo el valor de t en la ecuación de movimiento, $x(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + v_0 t + H$, obtenemos la altura máxima $h_{\max}$ que alcanza el proyectil:

$$\begin{aligned} h_{\max} &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{g} + H \\ &= \frac{v_0^2}{g} + H. \end{aligned}$$

Si el lanzamiento se hace desde el nivel del piso, $H = 0$, la altura máxima es

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\,.$$

8.2.4 Velocidad de escape

Si el objeto en caída o en ascenso recorre distancias donde la variación de $g(h)$ sea significativa, no podemos aplicar la ecuación obtenida para el movimiento uniformemente acelerado. Cuando $g(h)$ varía, su valor decae con la altura h; de hecho, tiende a cero cuando h tiende a infinito. Se trata de un caso más complejo, en el que la segunda ley de Newton queda

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}(t) &= -g(x(t)). \\ \frac{d^2x}{dt^2}(t) &= -9.8\left(\frac{R}{R + x(t)}\right)^2. \end{aligned}$$

Esta relación se llama ecuación diferencial y también puede escribirse en términos de la velocidad. Para tal fin, acudiremos a la regla de la cadena para poder escribir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}\,.$$

Usando la relación anterior obtenemos

$$v\frac{dv}{dx} = -9.8\left(\frac{R}{R + x}\right)^2.$$

A partir de esta ecuación es posible demostrar (aunque no lo haremos en este libro) que una relación entre la posición x y la velocidad en esa posición está dada por

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{R + x} + c\,,$$

donde R es el radio de la Tierra y c una constante cuyo valor depende de las condiciones del movimiento particular, por ejemplo, si se trata del lanzamiento de un proyectil hacia arriba, la constante depende de la velocidad inicial con la cual se lanza este. Si suponemos que el lanzamiento se realiza desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial v_0, tenemos, entonces, que en $x = 0$ la velocidad toma el valor $v(0) = v_0$. Bajo estas condiciones, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_0^2 &= \frac{gR^2}{R} + c\\ &= gR + c.\end{aligned}$$

De aquí, obtenemos el valor de la constante

$$c = \frac{1}{2}v_0^2 - Rg.$$

Así que la relación entre la posición x y la velocidad v en esa posición, queda

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{R + x} + \frac{1}{2}v_0^2 - Rg\,.$$

O sea

$$v^2 = \frac{2gR^2}{R + x} + v_0^2 - 2Rg\,.$$

Como en el caso simple donde consideramos a g constante, aquí podemos determinar la altura máxima que alcanza el objeto; sin embargo, ahora la gravedad es pequeña cuando el cuerpo se encuentra a una gran altura. El decaimiento de la gravedad facilita, a su vez, que el cuerpo ascienda más. Para determinar la altura máxima alcanzada por el cuerpo, hagamos $v = 0$, que es la velocidad que tiene cuando se detiene para volver a la Tierra. Entonces, tenemos

$$\frac{2gR^2}{R + x} + v_0^2 - 2Rg = 0.$$

Despejando x de esta ecuación, se obtiene

$$x = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} - R.$$

Es un hecho obvio que a mayor velocidad inicial mayor altura se alcanza, pero lo que ya no resulta obvio es que si el cuadrado de la velocidad inicial v_0 es muy cercano a $2Rg$, entonces se puede alcanzar una altura descomunalmente grande (en teoría, tan grande como se desee). El valor

$$\sqrt{2Rg} \approx \sqrt{2\times 9.8\times 6\,367\,000}\ \text{km/seg} \approx 11\,170\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

que equivale aproximadamente a

$$v_E = 40\,200\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

se llama **velocidad de escape** de la Tierra, pues teóricamente con esta velocidad inicial un proyectil ya no regresaría a la Tierra y se perdería en el espacio.

8.3 Movimiento oscilatorio

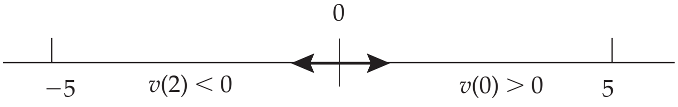
Supongamos que la ecuación de movimiento de un cuerpo que se mueve en una recta está dada por

$$x(t) = 5 \text{ sen} \frac{\pi}{2} t.$$

Se trata de un movimiento oscilatorio periódico. Consideremos una recta coordenada horizontal donde el semieje positivo está a la derecha del origen. En el instante $t = 0$, el cuerpo se encuentra en el origen; en el instante $t = 1$, se encuentra cinco unidades a la derecha. A los dos segundos, el cuerpo está posicionado nuevamente en el origen, etcétera. En los instantes $t = 0$ y $t = 2$, el cuerpo se encuentra en el origen, sin embargo, en esos instantes se halla viajando hacia diferentes rumbos. Esta información la proporciona la derivada

$$v(t) = x'(t) = \frac{5\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Por ejemplo, la velocidad en el instante $t = 0$ es positiva, de hecho $v(0) = \frac{5\pi}{2} > 0$, esto significa que en ese instante el cuerpo se encuentra viajando hacia la derecha. Sin embargo, en el instante $t = 2$, la velocidad es negativa, $v(2) = \frac{5\pi}{2} \cos\pi = -\frac{5\pi}{2} < 0$, por lo que el cuerpo viaja hacia la izquierda (véase figura).

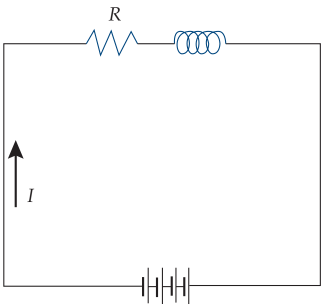


En los instantes en que se encuentra más alejado del origen, por ejemplo, en $t = 1$ y $t = 3$, la derivada vale cero, $v(1) = v(3) = 0$. Esto significa que el cuerpo se detiene instantáneamente. Cuando alcanza esos puntos, se detiene para iniciar su regreso, es decir para cambiar el sentido de su movimiento.

8.4 Circuito eléctrico con una bobina

Consideremos un circuito eléctrico formado por una bobina, también llamado **inductor**. Una bobina es un dispositivo eléctrico formado físicamente por un alambre enrollado en espiras; la bobina puede tener un núcleo, el cual por lo general es metálico. La característica más importante de las bobinas es que se oponen al cambio de la corriente eléctrica que circula a través de ellas, sobre todo a los cambios bruscos de la corriente; por ejemplo, en el instante en el que se conecta o desconecta de la fuente de corriente directa, la bobina trata de mantener la corriente que circula por ella antes del cambio de corriente que se le impone. Las bobinas están presentes en nuestra vida diaria; se encuentran, por ejemplo, en los sistemas de encendido del motor de los automóviles. Seguramente habrá escuchado decir al mecánico, cuando el auto no quiere encender, que es probable que se trate de una falla en la bobina. También podemos encontrar bobinas en los transformadores instalados en los postes de luz y en los motores de las licuadoras.

Por tratarse de un cable en espiras, la longitud de este puede ser muy grande, por lo que la bobina también ofrece cierta resistencia al paso de la corriente, como lo hace un resistor. Aunque un resistor es un elemento eléctrico que se opone al paso de la corriente, mientras que una bobina se opone principalmente al cambio de la corriente. Una bobina se representa entonces por un resistor y un inductor en serie.



La ley de Ohm establece una relación entre la intensidad de corriente que circula por un resistor y la caída de tensión debida a la resistencia. La caída de tensión en un resistor es proporcional a la intensidad de corriente I que pasa por él:

$$V_R = RI.$$

La constante de proporcionalidad depende de las características físicas del resistor. A dicha constante se le llama *resistencia* del resistor; en este caso, es la resistencia de la bobina o del resistor asociado a la bobina.

Por otra parte, la ley de Faraday establece que la caída de tensión, debida a la inductancia, es proporcional a la razón de cambio de la intensidad de corriente respecto del tiempo

$$V_L = L\frac{dI}{dt}.$$

Es aquí donde la derivada es una razón de cambio instantánea de una cantidad física que no es distancia, sino intensidad de corriente.

La constante de proporcionalidad L se llama *inductancia* de la bobina y representa el grado de oposición de la bobina al cambio de la intensidad de corriente; su valor depende de las características físicas de la bobina, por ejemplo, del número de espiras que tenga la bobina (a mayor número de vueltas mayor inductancia), del diámetro de las espiras (a mayor diámetro mayor inductancia) y de si tiene algún núcleo y del tipo de material con el que esté hecho ese núcleo.

La resistencia se mide en *ohms*, la inductancia en *henrios*, la corriente en *amperios* y, por supuesto, la razón de cambio de la corriente en *amperios por segundo*.

La caída de tensión de la bobina se compone de la caída de tensión debida a la resistencia más la caída de tensión debida a la inductancia:

$$V = V_R + V_L = RI + L\frac{dI}{dt}.$$

Una pila o batería suministra la fuerza electromotriz, E, que requiere una bobina para funcionar, y que de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, cuando los polos de la pila se conectan a los extremos de la bobina, la fuerza electromotriz es igual a la caída de tensión de la bobina

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}.$$

La ecuación anterior, llamada ecuación diferencial, relaciona la intensidad de corriente I con su razón de cambio (su derivada). De esta ecuación es posible obtener la función misma $I(t)$, para lo cual se aplican métodos propios para este tipo de ecuaciones. En este caso, se tiene que $I(t)$ está dada por

$$I(t) = \frac{E}{R} + \left(I(0) - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

donde $I(0)$ es la corriente que circula en la bobina en el instante en el que se cierra el interruptor que conecta la bobina a la pila. Si en ese instante no circula corriente, entonces $I(0) = 0$, por lo que la ecuación queda

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

De esta fórmula deducimos que la intensidad de corriente, que es nula en el instante en el que se conecta la bobina, crece todo el tiempo, tendiendo al valor $\frac{E}{R}$, sin alcanzarlo. Este valor corresponde a la corriente que pasaría por la bobina con resistencia R, pero careciendo de inductancia, es decir, la inductancia tiene un efecto que es importante solo al principio.

8.5 Crecimiento poblacional

Supongamos que por un determinado periodo, la población crece a una tasa r constante. Esto significa que si $P(t)$ es la población en un instante t y $P(t + h)$ es la población en el instante $t + h$, cercano al instante t, entonces

$$\frac{P(t + h) - P(t)}{h} = rP(t)$$

(incremento de la población por unidad de tiempo). Se asume que esta igualdad es válida para todo valor de h en un rango pequeño de valores. De hecho, no se trata de una igualdad, sino de una aproximación que es mejor entre menor sea el valor de h. En términos precisos, tenemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(t + h) - P(t)}{h} = rP(t).$$

Es decir

$$\frac{dP}{dt} = rP.$$

Esta es la traducción exacta de que la población crece a una tasa constante r. Tenemos, pues, otra interpretación de la derivada como razón de cambio de una cantidad, la cual ahora es la función de población $P(t)$. La relación anterior nos dice que la derivada de $P(t)$ es la función misma, multiplicada por una constante. Con un poco de experiencia en derivación, descubriremos que se trata de una función exponencial

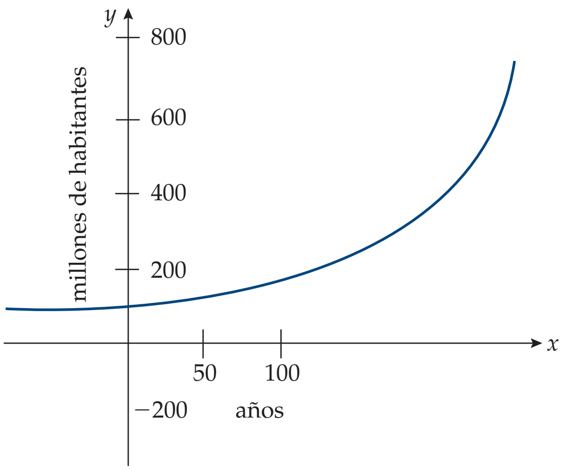
$$P(t) = ke^{rt},$$

donde k es una constante. La constante k se determina conociendo la población en un instante inicial. En efecto, si en el instante $t = 0$, hay una población P_0, entonces, sustituyendo estos datos en la fórmula anterior, obtenemos $P(0) = k$. Así pues, tenemos

$$P(t) = P_0e^{rt}.$$

Según la información proporcionada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía, se reportó que en el año 2010 México tenía una población de 112.337 millones de habitantes y que la tasa anual de crecimiento de la población (nacimientos menos defunciones) es de 1.8%. Si retomamos esta tasa, que equivale a $r = 0.018$, y suponemos que se mantiene por un cierto periodo, entonces la función exponencial que describiría la población en millones de habitantes sería.

$$P(t) = P_0e^{rt}$$
$$P(t) = 112.337e^{0.018t}$$



La unidad de tiempo es un año y el valor de $P(t)$ es en millones de habitantes.

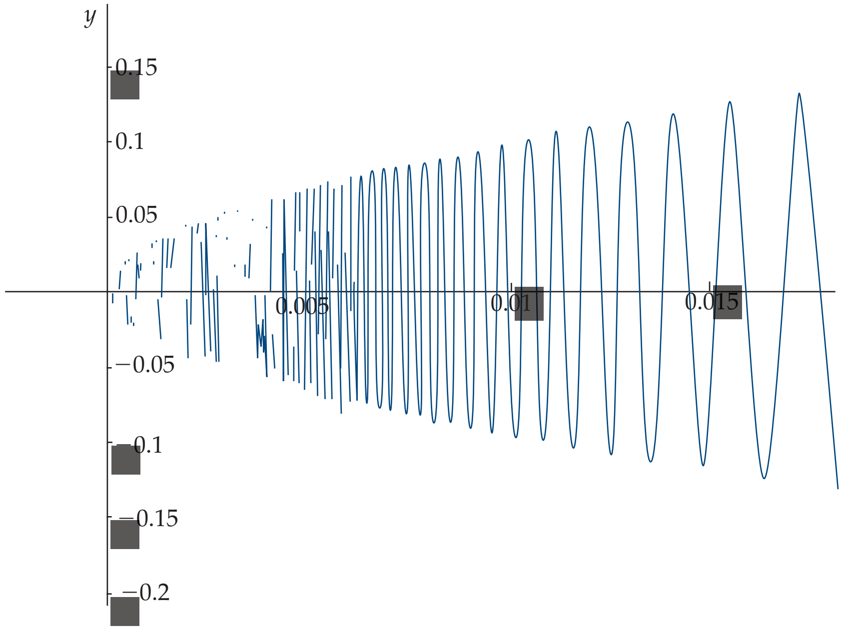
8.6 La derivada: su relación con el comportamiento de las funciones

Uno de los objetivos del cálculo diferencial es desarrollar herramientas para el estudio y el análisis de las funciones; en este sentido, la derivada nos proporciona información importante acerca del comportamiento de una función.

Algunas de las características o cualidades de una función pueden ser descritas en términos gráficos. Sin embargo, es importante observar que la gráfica de una función es un concepto, un objeto ideal, y que en términos estrictos no existe físicamente. Si bien podemos tener una buena idea de la forma o el aspecto de la gráfica de una función, en la práctica solo podemos aspirar a tener un buen bosquejo de ella. Ni siquiera una computadora, aun con toda su capacidad y rapidez de cálculo, puede proporcionarnos la gráfica de una función. Los programas para equipos de cómputo hacen lo que pueden, pero en ocasiones no pueden hacer mucho y lo que nos muestran deja mucho que desear.

Cuando la gráfica que obtenemos en una computadora no es del todo satisfactoria, podemos acudir a la poderosa herramienta del cálculo diferencial, pues con esta es posible incursionar en los lugares más recónditos de la gráfica de una función. Los resultados del cálculo aumentan nuestra capacidad de análisis de las funciones y nos ayudan a crear imágenes mentales de las gráficas, que son mejores o al menos complementan a las que una computadora nos muestra

en sus monitores de alta resolución. Por ejemplo, la figura siguiente es la gráfica de la función $\sqrt{x}\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x}$ que nos proporciona una computadora portátil de 2.0 Ghz de velocidad, 3.0 GB de memoria RAM y un monitor con resolución de $1\,366 \times 768$ pixeles.



Al observar esta gráfica con detenimiento, es obvio que de esta nos podemos enterar poco del comportamiento de la función alrededor del cero. Después de un análisis simple de la función concluimos que la función oscila infinitas veces alrededor del cero. En los puntos de la forma $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}$, la función toca a la gráfica de $\sqrt{x}$, por lo que su valor en esos puntos es $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}}$. En los puntos de la forma $\dfrac{1}{n\pi}$, la gráfica corta el eje de las abscisas, así que hay una infinidad de puntos alrededor del origen donde la función corta a este eje, etcétera.

Sin embargo, aun con todas sus limitaciones, hasta las más modestas computadoras son poderosos instrumentos de los cuales nos podemos auxiliar para investigar acerca del comportamiento de las funciones, ya que nos pueden ayudar a despejar dudas sobre el comportamiento, a veces un poco extraño, de las funciones. Las gráficas en una computadora pueden darnos luz sobre interesantes fenómenos que a veces se presentan con las funciones. En resumen, las computadoras y las herramientas del cálculo, son, sin duda, una magnífica mancuerna en el estudio de las funciones.

En los dos capítulos anteriores estudiamos algunas funciones en las cuales se observa un comportamiento especial alrededor de un punto, dicho comportamiento puede averiguarse analizando la derivada. En esta sección continuaremos con este tipo de análisis, pero ahora con más profundidad, pues disponemos de una herramienta más poderosa.

Antes de comenzar con nuestros primeros ejemplos, veamos un concepto mediante el cual comparamos el crecimiento de las funciones a la larga, es decir, cuando la variable independiente tiende a infinito.

8.6.1 Velocidad de crecimiento de una función

Decimos que una función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito; y escribimos

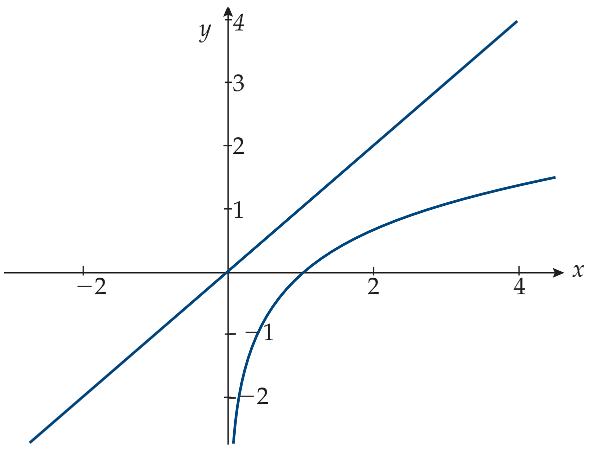
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si para todo real $M > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq M$ para toda $x \geq \alpha$.

La definición anterior nos dice que los valores $f(x)$ de la función superan cualquier real M, siempre y cuando elijamos x suficientemente grande. No importa qué tan grande sea el valor de M, este será rebasado por todos los valores de la función a partir de alguno de la variable x.

Ejemplos de funciones que tienden a infinito cuando la variable también lo hace, son x^n (n entero positivo), e^x y $\log x$. Aun cuando todas estas funciones tienden a infinito, lo hacen de manera diferente, tienden a infinito con "diferentes velocidades de crecimiento", enseguida precisaremos estas ideas, para lo cual primero compararemos las funciones x y $\log x$.

Si observamos las gráficas de x y $\log x$ que se realizan a través de una computadora, podemos concluir que $x > \log x$ para toda $x > 0$.



Sin embargo, podremos obtener esta conclusión y otras un poco más fuertes, sin apelar a las gráficas, con solo utilizar recursos puramente analíticos.

Consideremos la función $g(x) = x - \log x$, la cual es derivable en todos los reales positivos. Para estos puntos tenemos

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Por tanto, para $x > 2$ tenemos

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{2}.$$

Es decir, para toda $x > 2$ se cumple

$$g'(x) > \frac{1}{2}.$$

De esta desigualdad y aplicando el teorema del valor medio a la función $g(x) = x - \log x$ en el intervalo $[2, x]$, obtenemos

$$g(x) - g(2) = g'(x_0)(x - 2)$$
$$g(x) = g(2) + g'(x_0)(x - 2),$$

donde $2 < x_0 < x$. Pero $g'(x_0) > \frac{1}{2}$, por consiguiente, para $x > 2$ se tiene

$$g(x) > g(2) + \frac{1}{2}(x - 2).$$

Sustituyendo $g(2) = 2 - \log 2$ en la expresión de arriba obtenemos

$$g(x) > 2 - \log 2 + \frac{1}{2}x - 1$$
$$g(x) > \frac{1}{2}x + 1 - \log 2.$$

Pero $e > 2$, luego $1 > \log 2$, así que $1 - \log 2 > 0$. Por tanto, para $x > 2$ tenemos

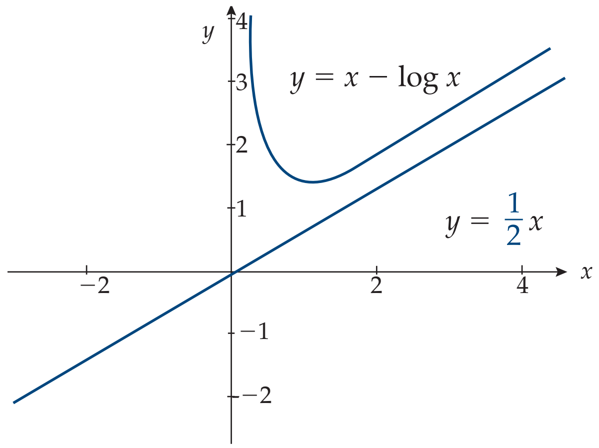
$$g(x) > \frac{1}{2}x,$$

o sea

$$x - \log x > \frac{1}{2}x \quad \text{o bien} \quad x > \log x + \frac{1}{2}x$$

para $x > 2$.

Esta desigualdad mejora a $x > \log x$, que era la que originalmente se había comentado.



Se sigue de la desigualdad antes probada que

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \log x) = +\infty.$$

Por tanto, también se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-\log x} = +\infty.$$

Pero $e^{x-\log x} = e^x e^{-\log x} = \dfrac{e^x}{x}$, así que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Observe que de la desigualdad $x - \log x > \dfrac{1}{2}x$ se siguen otras desigualdades interesantes

$$\frac{e^x}{x} > e^{\frac{1}{2}x}$$
$$e^{\frac{1}{2}x} > x.$$

Consideremos la desigualdad $x - \log x > \dfrac{1}{2}x$, la cual se cumple para $x > 2$. Multiplicando ambos miembros por un entero positivo n, obtenemos

$$nx - n\log x > \frac{1}{2}nx$$
$$nx - \log x^n > \frac{1}{2}nx$$

desigualdades que se cumplen para $x > 2$. De esta forma, para $x > 2$ se tiene

$$\frac{e^{nx}}{x^n} > e^{\frac{n}{2}x}.$$

Haciendo la sustitución $y = nx$, tenemos

$$\frac{e^y}{\frac{y^n}{n^n}} > e^{\frac{y}{2}}.$$

A partir de esta, obtenemos otra interesante desigualdad

$$\frac{e^y}{y^n} > \frac{1}{n^n}e^{\frac{y}{2}},$$

la cual se cumple para $\frac{y}{n} = x > 2$, o sea para $y > 2n$. Ahora, de esta desigualdad se sigue

$$\lim_{y\to\infty}\frac{e^y}{y^n} = +\infty,$$

que en nuestra acostumbrada variable x, se escribe

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Finalmente, si en la relación $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ hacemos $x = \log y$ o, más generalmente, si en la relación $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$ hacemos esa sustitución, obtenemos

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\log y} = +\infty$$
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{(\log y)^n} = +\infty.$$

Formulamos los resultados anteriores en la siguiente proposición.

Proposición

Para todo entero positivo n se cumple

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ y } \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{(\log y)^n} = +\infty.$$

En particular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \text{ y } \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\log y} = +\infty.$$

Con el propósito de interpretar las relaciones anteriores, observemos lo siguiente. Si bien las funciones x y x^2 tienden a infinito, x^2 lo hace con mayor rapidez que x. Una manera de medir esta velocidad de crecimiento es analizando el cociente de ellas

$$\frac{x^2}{x} = x \text{ (para } x \neq 0).$$

Aun cuando el denominador tiende a infinito, el numerador le gana en esta carrera, pues el cociente tiende a infinito. En general, es claro que si $n > m$ entonces x^n tiende a infinito con mayor rapidez que x^m, pues

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-m} = +\infty.$$

De manera análoga, podemos decir que la función exponencial tiende a infinito con mayor rapidez que cualquier potencia x^n, pues se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Hagamos oficial esta definición de velocidad de crecimiento.

Definición

Sean f y g dos funciones definidas en al menos un intervalo de la forma $[a, +\infty)$. Supongamos $\lim\limits_{x\to+\infty} = f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Decimos que f tiende más rápido a infinito que g si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

En este caso escribimos $f >> g$ o bien $g << f$ y también decimos que f es de un orden de magnitud mayor que g o bien que para x grande f domina a g.

Usando la definición anterior podemos escribir

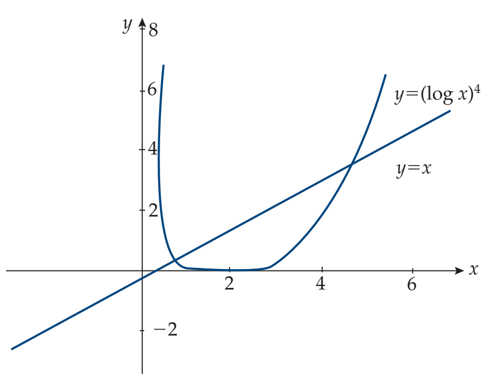
$$\log x << x << e^x.$$

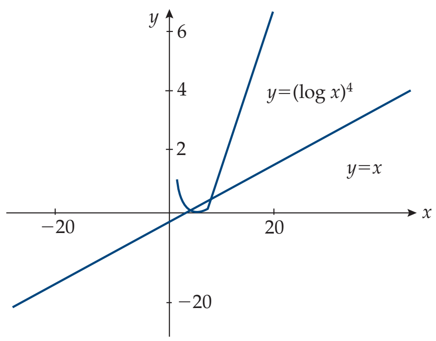
También, tenemos

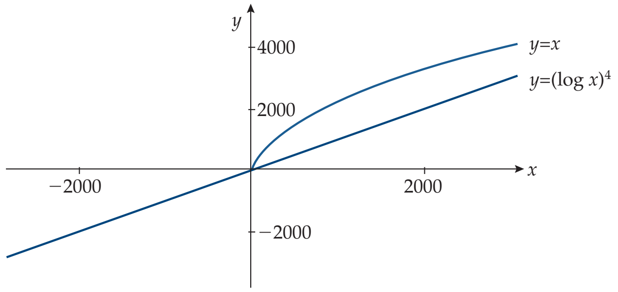
$$x^n << e^x$$

$$(\log x)^n << x$$

para todo entero positivo n. En otros términos, podemos decir que la función exponencial e^x domina cualquier potencia x^n, por grande que sea n. De forma similar, tenemos que la función $(\log x)^n$ es dominada por la simple función x, sin importar qué tan grande sea n. Por ejemplo, la función identidad x domina $(\log x)^4$. En las figuras siguientes es posible observar este interesante fenómeno







En la primera figura se observa que para x cercanas a cero, la gráfica de $(\log x)^4$ se encuentra por arriba de la gráfica de x, también podemos ver que para x mayores que 0.5 y menores que 4, la recta se encuentra por arriba de la gráfica de $(\log x)^4$. Después, la gráfica de esta última queda nuevamente por arriba de la gráfica de x. Pareciera entonces que esta situación se mantiene para x arbitrariamente grande, pero no es así, pues de nuevo la gráfica de $(\log x)^4$ "se dobla hacia abajo", para quedar por debajo de la recta para siempre. Esto significa que la recta $y = x$ corta a la curva $y = (\log x)^4$ en tres puntos, uno de ellos un tanto alejado (allá por el 5,503) que no alcanzamos a percibir en una primera instancia y del que solo damos cuenta de su existencia, que se deduce de las relaciones antes establecidas en términos de límites. Un fenómeno muy interesante, ¿no le parece?

Para terminar esta sección dejamos como ejercicio para el lector que pruebe que la exponencial e^x domina cualquier polinomio. Esto significa que si en el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$a_n > 0$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{P(x)} = +\infty.$$

Para el caso $a_n < 0$, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-P(x)} = +\infty$$

o sea

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{P(x)} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-P(x)} = -\infty.$$

Así que independientemente del signo de a_n, para todo polinomio $P(x)$ tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0.$$

Ahora, veamos algunos ejemplos donde la derivada nos revela propiedades interesantes de las funciones. Comencemos con una de las funciones prototipo del análisis matemático que exhiben comportamientos que podemos calificar de asombrosos.

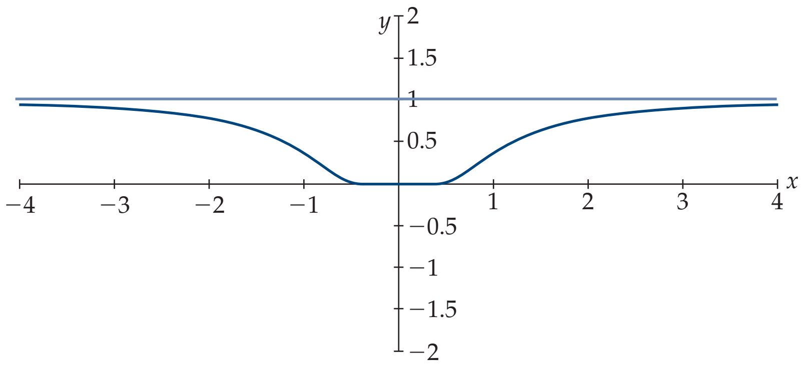
8.6.2 La función $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Esta función está definida en todos los reales $x \neq 0$, sin embargo en este punto tenemos

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

La existencia del límite anterior nos posibilita extender el dominio de la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a todos los reales, de manera que la nueva función resulte continua. Esta función es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$



Probemos que f es derivable en 0; para esto debemos probar que existe el límite en cero del cociente de diferencias para $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

De hecho probaremos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Para probar lo anterior mostraremos la existencia e igualdad de los dos límites laterales:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Para ello hagamos el cambio de variable $y = \dfrac{1}{x}$, con lo cual tenemos:

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = y e^{-y^2} = \frac{y}{e^{y^2}}.$$

Ya hemos probado que la exponencial e^u domina cualquier polinomio en u, y como consecuencia se tiene

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{P(u)}{e^u} = 0$$

para todo polinomio $P(u)$, en particular

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^u} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^{u^2}}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{u\to-\infty}\frac{u^2}{e^{u^2}}=0.$$

De donde tenemos

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\frac{u^2}{e^{u^2}} = 0$$

y

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{u}\frac{u^2}{e^{u^2}} = 0.$$

De los límites anteriores se sigue

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

y

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to-\infty}\frac{y}{e^{y^2}} = 0.$$

Esto prueba que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

lo cual significa $f'(0)=0$.

Para los puntos $x\neq 0$ consideramos por separado los intervalos $(0,+\infty)$ y $(0,-\infty)$. En estos intervalos podemos aplicar las reglas de derivación, incluyendo la regla de la cadena, con lo cual obtenemos

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

En resumen, si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

entonces f es derivable en todos los reales y además

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

Esta función es continua en todos los reales $\mathbb{R}$, particularmente en $x=0$, pues

$$\lim_{x\to 0}f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

En los puntos $x \neq 0$ es obvia la continuidad, pues $f\,'$ está dada por la fórmula $\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Mostremos que de hecho $f\,'$ es derivable en $\mathbb{R}$, lo que significará que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$.

Para los puntos $x \neq 0$, la derivada de f' se calcula simplemente derivando $\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ en cada uno de los intervalos $(0, +\infty)$ y $(0, -\infty)$, en cuyo caso aplicamos las reglas de derivación, incluyendo la regla de la cadena. Haciendo esto obtenemos para toda $x \neq 0$

$$f''(x) = \left(-6\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Para calcular $f\,''(0)$, aplicamos la definición de derivada

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}. \end{aligned}$$

Nuevamente, como en el caso de la primera derivada, tenemos que este último límite es igual a cero, así que tenemos $f\,'' = 0$. En resumen:

$$f''(x) = \begin{cases} \left(-6\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \neq 0 \end{cases}$$

Continuando con este proceso, obtenemos que para los puntos $x \neq 0$, la derivada de orden n de f es de la forma

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

donde P es una función polinomial, es decir $P\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio en $\frac{1}{x}$, así que se tiene

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Esto último es consecuencia del hecho

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to +\infty}\frac{P(y)}{e^{y^2}} = 0$$

y

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to -\infty}\frac{P(y)}{e^{y^2}} = 0.$$

Por tanto, si suponemos $f^{(n)}(0) = 0$, concluimos que

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

pues, nuevamente $\frac{1}{x}\, P\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio en $\frac{1}{x}$.

En resumen, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$, además para todo entero positivo n, se tiene

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

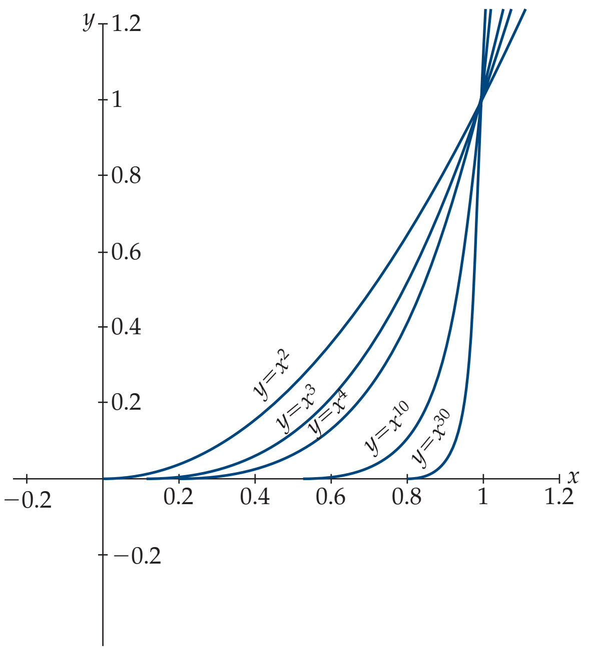
donde $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio en $\frac{1}{x}$.

El hecho más relevante en este ejemplo es que se tiene

$$f^{(n)}(0) = 0$$

para todo entero positivo n. Si en este momento aún no le parece interesante la relación anterior, veamos alguna de sus implicaciones, con lo cual esperamos atrapar su atención.

Consideremos las funciones de la forma x^n. En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones x^2, x^3, x^4, x^{10} y x^{30}, para $x \geq 0$; todas ellas tienen por tangente en el origen $(0, 0)$ al eje de las abscisas.



Observemos que la gráfica de x^3 está inmediatamente abajo de la de x^2. La curva que está debajo de todas ellas es la gráfica de x^{30}. Entre más grande es el exponente de x^n, más "pegada" está su gráfica al eje x, alrededor del origen. Este hecho geométrico lo expresamos diciendo que la gráfica de x^{n+1} es más *plana* en el origen que la gráfica de x^n y la razón es que si un número positivo x es menor que uno, entonces $x^{n+1} < x^n$ para todo entero positivo n.

Una manera de comparar este comportamiento geométrico de las funciones x^n es mediante sus derivadas en $x = 0$. Si n es un entero mayor que 1 y $f(x) = x^n$, entonces $f'(0) = 0, \cdots, f^{(n-1)}(0) = 0$ y $f^{(n)}(0) = n!$. La primera de las derivadas sucesivas que no se anula en $x = 0$ es la de orden n; todas las derivadas de orden menor se anulan en ese punto. De alguna manera, este hecho caracteriza el grado de "planez" de una curva, como se establece enseguida.

Definición

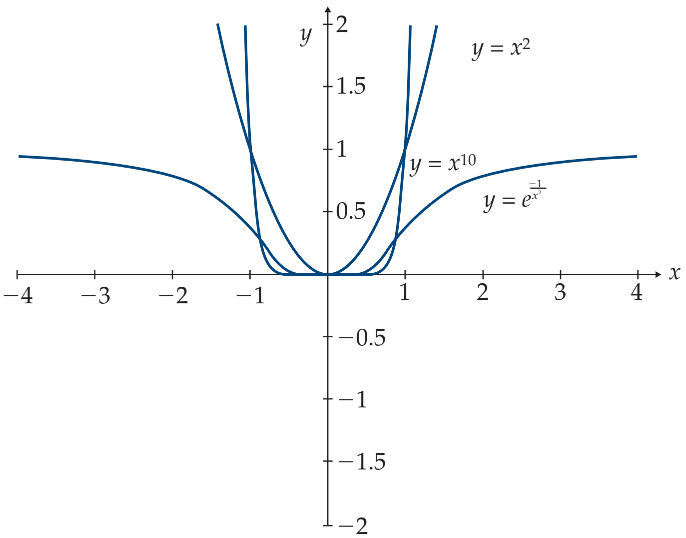
Sea f una función n veces derivable en un punto a. Diremos que f es **plana de orden** $n - 1$ en el punto a, si $f'(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es plana de orden 1 en $x = 0$, pues $f'(0) = 0$ y $f^{(2)}(0) = 2 \neq 0$. En general, si n es un entero mayor que 1, la función $f(x) = x^n$ es plana de orden $n - 1$ en el punto $x = 0$. Sea ahora $g(x) = \cos x$; entonces, tenemos $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, $g''(x) = -\cos x$. Por consiguiente, $g'(0) = 0$ y $g''(0) = -1$, así que $g(x) = \cos x$ es plana de orden 1 en $x = 0$.

Sea ahora la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En este caso se tiene $f^{(n)}(0) = 0$ para todo entero positivo n. Por esta razón se dice que la función f es *plana de orden infinito* en $x = 0$ o bien que f es *infinitamente plana* en ese punto. Geométricamente, esto significa que para cada entero n mayor que 2, en una vecindad abierta de cero, la gráfica de f está más pegada al eje de las abscisas que la gráfica de x^n, lo asombroso de este fenómeno es que ocurre para todo entero $n \geq 2$. En la figura siguiente se muestran las gráficas de f, así como las de x^2 y x^{10}.



La resolución gráfica que se obtiene de la computadora no nos permite decidir cómo son las posiciones relativas de las gráficas alrededor del origen; las tres están tan cercanas al eje de las abscisas que pareciera que coinciden en una vecindad del origen. Pero un poco de análisis nos convencerá de que la gráfica de f es la que está debajo de todas y la de x^{10} se encuentra en medio. En efecto, mostremos que la diferencia $x^{10} - e^{-\frac{1}{x^2}}$ es positiva si x está suficientemente cercana a cero. Para ello consideremos el cociente:

$$\frac{x^{10} - e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}.$$

Ya hemos probado que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} = 0.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{10} - e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} = 1.$$

Por tanto, para x suficientemente cercana a cero

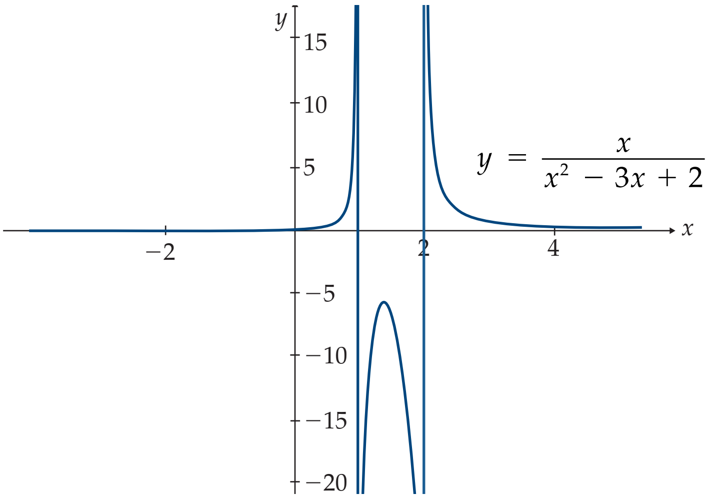
$$\frac{x^{10} - e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} > 0.$$

Esto implica que para x suficientemente cercana a cero se tiene $x^{10} - e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$, que es lo que se quería probar.

8.6.3 Las funciones $e^{\frac{1}{x}}$ y $e^{-\frac{1}{x}}$

Toda función racional está definida en los reales excepto en los puntos donde el denominador se anula. En estos puntos, ambos límites laterales son infinitos, ya sea $+\infty$ o $-\infty$. Por ejemplo, la función $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$ tiene por dominio los reales $x \neq 1, 2$ y se tiene

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x) = -\infty \text{ y } \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x) = +\infty$$

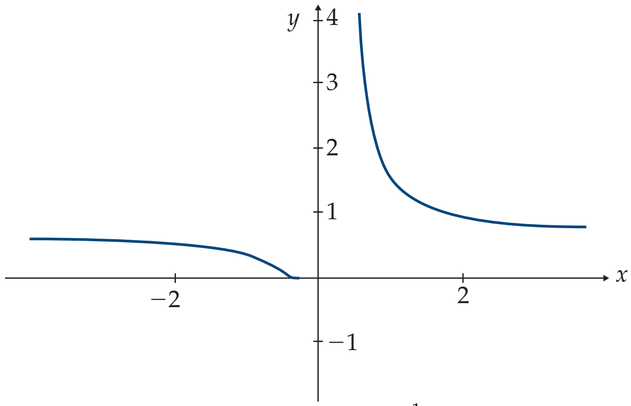


Ahora, presentamos funciones con un comportamiento un tanto diferente. Las funciones $e^{\frac{1}{x}}$ y $e^{-\frac{1}{x}}$ están definidas en todos los reales excepto en $x = 0$. Pues, en el punto $x = 0$ uno de los límites laterales es finito y el otro infinito. De hecho, tenemos

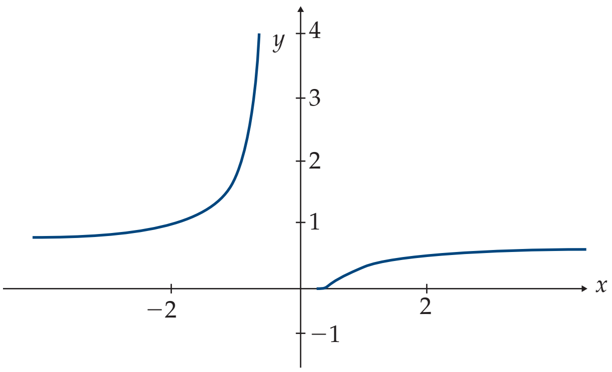
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

y

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$



Gráfica de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



Gráfica de $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Consideremos primero $e^{\frac{1}{x}}$ y definamos

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función es derivable en todo real x excepto en $x \neq 0$. En el punto $x = 0$ la función es discontinua, por tanto, no es derivable, pero al menos tiene derivada lateral izquierda $f'(0-)$, de hecho

$$\begin{aligned} f'(0-) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-x} \\ &= -\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{y}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

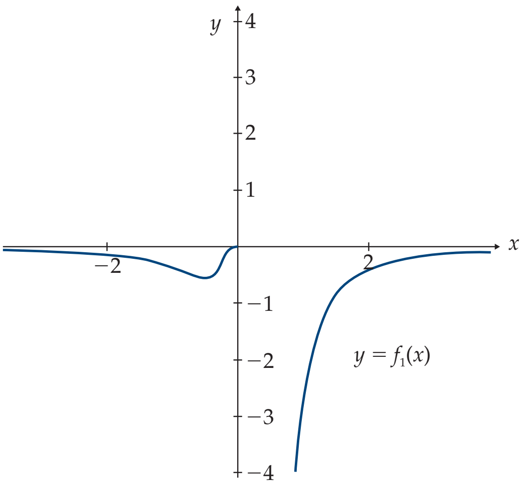
Así que f no es tan mal comportada en $x = 0$. Por otra parte, para $x \neq 0$ se tiene

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Definamos la función

$$f_1(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función tiene por dominio a todos los reales y coincide con $f'(x)$ en donde esta última está definida, pero además $f_1(x)$ está definida en $x = 0$. En la figura siguiente se representa la gráfica.



Es claro que f_1 es derivable en todo $x \neq 0$ y que además tiene derivada lateral izquierda en $x = 0$, de hecho $f_1'(0-) = 0$. Esta derivada lateral de f_1 es la derivada lateral izquierda de orden 2 o segunda derivada lateral izquierda de f en $x = 0$ y la denotamos por $f^{(2)}(0-)$. Se deja como ejercicio para el lector probar que f tiene derivada lateral izquierda de cualquier orden n en $x = 0$, además $f^{(n)}(0-) = 0$.

Un tratamiento similar puede hacerse para la función $e^{-\frac{1}{x}}$.

8.6.4 La función tanh $\frac{1}{x}$

Consideremos la función

$$\tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}.$$

La función $\tanh(x)$ es una de las seis **funciones hiperbólicas** (seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica). Estas funciones están definidas como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

La función que nos ocupa ahora es la tangente hiperbólica compuesta con la función racional $\left(\frac{1}{x}\right)$, la cual también escribimos

$$\tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1}$$

o bien

$$\tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - e^{-\frac{2}{x}}}{1 + e^{-\frac{2}{x}}}.$$

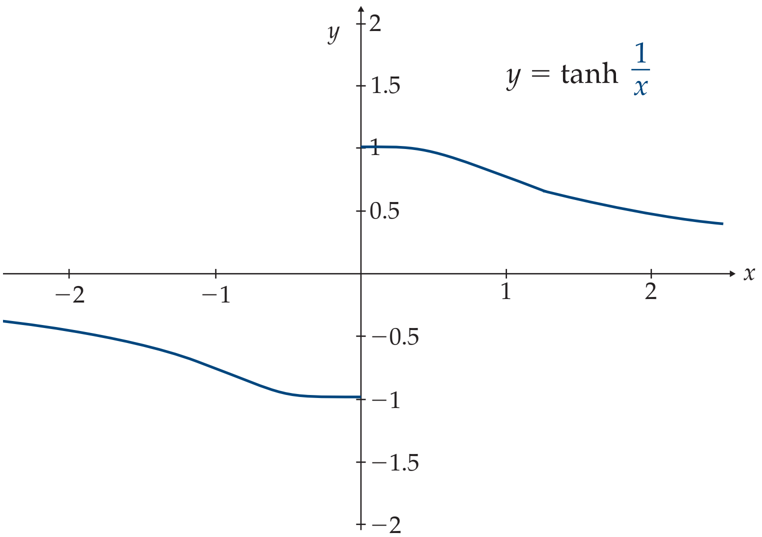
Esta función está definida de manera natural para todos los reales $x \neq 0$, pero existen los límites laterales en $x = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = -1$$

y

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tanh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1 - e^{-\frac{2}{x}}}{1 + e^{-\frac{2}{x}}} = 1.$$

En la figura de abajo se muestra la gráfica de than $\left(\frac{1}{x}\right)$.



Dado el aspecto de la gráfica, hay quienes consideran que esta función es discontinua en $x = 0$, nada más falso que esto. La función es continua en todos los puntos de su dominio. El punto $x = 0$ no es de su dominio, por tanto no tiene sentido hablar de continuidad o discontinuidad en este punto.

Si restringimos la función anterior a los reales positivos y la definimos en cero, igual a su correspondiente límite lateral, obtenemos la función

$$f_1(x) = \begin{cases} \tanh\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función tiene derivada lateral derecha en $x = 0$, de hecho tiene derivada lateral derecha de cualquier orden en $x = 0$, además $f_1^{(n)}(0+) = 0$ para todo entero positivo n, así que es infinitamente plana en $x = 0$. De manera similar, la función

$$f_2(x) = \begin{cases} \tanh \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas laterales de todos los órdenes en $x = 0$ y además $f_2^{(n)}(0-) = 0$ para todo entero positivo n.

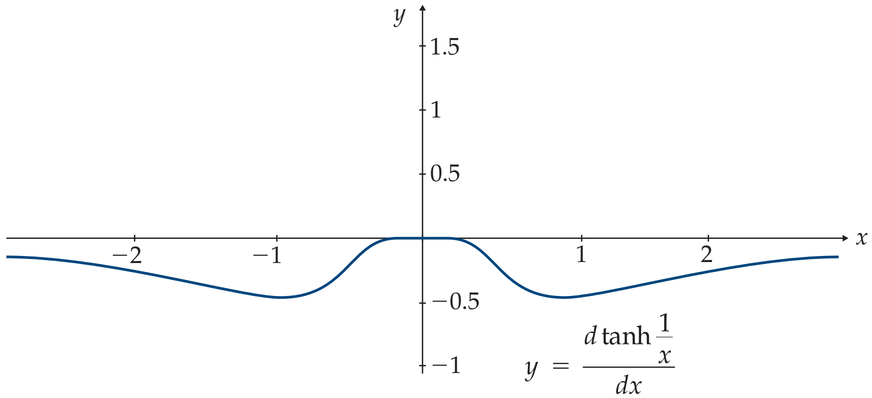
Vale la pena observar que las derivadas laterales $f_1^{(n)}(0+) = 0$ y $f_2^{(n)}(0-) = 0$ son iguales, así que "si no fuera porque no es posible definir la función $\tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$, en $x = 0$ de manera que sea continua en ese punto, ella sería derivable en $x = 0$''. Es claro que la función $f(x) = \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$ es derivable en todos los puntos de su dominio, que consiste de los reales $x \neq 0$. Para dichos puntos se tiene

$$f'(x) = -\frac{4e^{\frac{2}{x}}}{x^2(1 + e^{\frac{2}{x}})^2},$$

y curiosamente

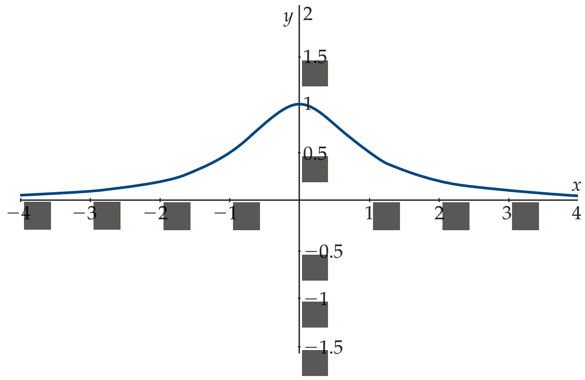
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0,$$

así que la gráfica de $f'(x)$ "tiene el aspecto" de una función continua en todos los reales; desafortunadamente no está definida en $x = 0$. Si extendemos esta función a la de todos los reales definiéndola igual a cero en $x = 0$, obtenemos una función continua en $\mathbb{R}$.

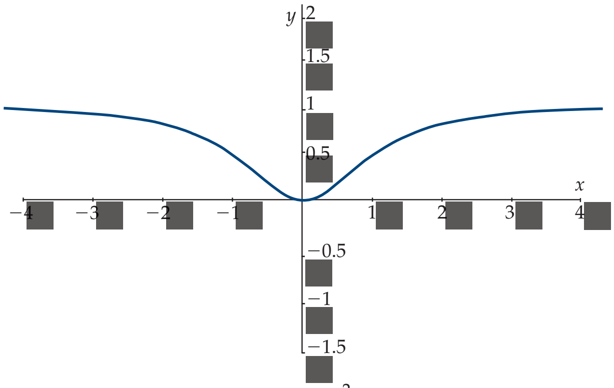


8.6.5 La función $\dfrac{1}{1+x^2}$

En esta sección obtendremos algunas funciones interesantes a partir de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Esta función tiene por dominio todos los reales pues $1 + x^2 > 0$ para todo real x. En la figura de abajo se muestra su gráfica.



Consideremos ahora $g(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}$. Esta función se simplifica como $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, y también tiene por dominio $\mathbb{R}$. A continuación se muestra su gráfica.



Si dividimos numerador y denominador de $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ entre x^2, obtenemos la nueva expresión

$$h(x)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

El dominio de h consiste de todos los reales diferentes de cero. Si bien se tiene la igualdad $g(x) = h(x)$ para todo real $x \neq 0$, las funciones g y h son diferentes pues tienen dominios diferentes. Se podría argumentar que solamente es cuestión de escritura, de cómo hemos escrito la fórmula para h, pero recordemos la convención de que el dominio está determinado por la fórmula mediante la cual se definen los valores de la función. El dominio consiste exactamente de los reales para los cuales aplica esa fórmula. La exención del único punto $x = 0$ en el caso de la expresión utilizada para h es similar a la exención del mismo punto para la función $\tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$, presentada en la subsección anterior. La gráfica de h es como la de g, excepto que la de h carece del punto (0, 0), el cual es un punto de la gráfica de g. Esta es la única diferencia entre las gráficas, pero nuestra vista no alcanza a percibirla.

A partir de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ahora construimos

$$\begin{aligned}F(x)&=-\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}.\end{aligned}$$

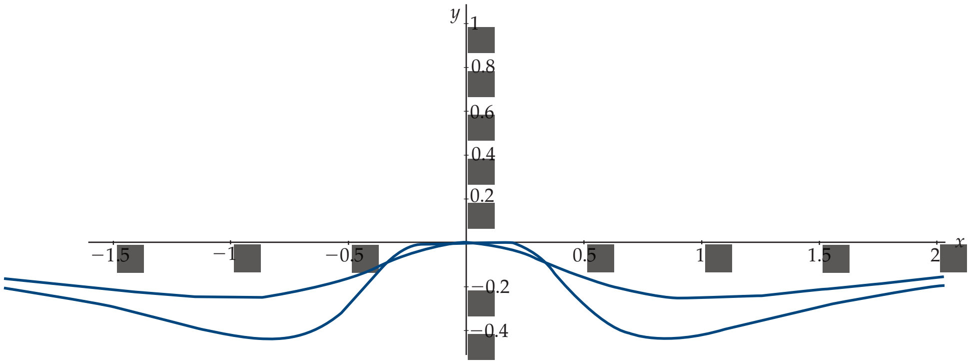
La cual se reduce a

$$F(x)=-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=-\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2.$$

La gráfica de F es similar a la de la derivada

$$\tanh'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{4e^{\frac{2}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)^2}.$$

Pero F está definida en todos los reales, mientras que la derivada de $\tanh\left(\frac{1}{x}\right)$ no está definida en $x = 0$. En la siguiente figura se muestran en el mismo sistema de coordenadas las gráficas de ambas funciones.

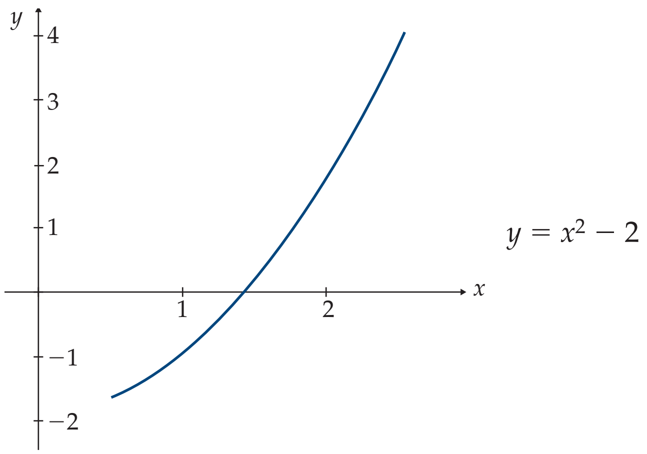


Observe que la función tanh'(x) es infinitamente plana en $x = 0$ mientras que F es plana de orden 1, pues $F'(0) = 0$ y $F''(0) = -2$, lo cual es fácil verificar.

8.7 Método de Newton

No obstante que en la actualidad podemos disponer, en nuestra casa o en la escuela, de poderosas calculadoras y computadoras personales, todavía son interesantes y de gran utilidad los métodos analíticos que datan del siglo XVII que los matemáticos desarrollaron para llevar a cabo cálculos aritméticos y con los que, además, elaboraron tablas de valores de funciones. Algunos de estos métodos aún se utilizan con mucha frecuencia, como son los que se basan en los polinomios de Taylor. Otro de los métodos muy empleados, y que en este momento nos ocupa, es el famoso método de Newton para calcular aproximaciones de raíces de polinomios, en especial para calcular las raíces de cualquier orden de números enteros o racionales. Antes de enunciar el método en su forma general, veamos algunos ejemplos simples.

Supongamos que deseamos calcular una aproximación de $\sqrt{2}$ con cuatro decimales correctos. Esto lo podemos llevar a cabo con lápiz y papel sin el auxilio siquiera de una calculadora. El problema de calcular $\sqrt{2}$ es equivalente al problema de calcular las raíces de la ecuación $x^2 - 2 = 0$; los reales que satisfacen esta ecuación también son llamados raíces o ceros de la función $f(x) = x^2 - 2$ y son las abscisas de las intersecciones de la gráfica de f con el eje x.



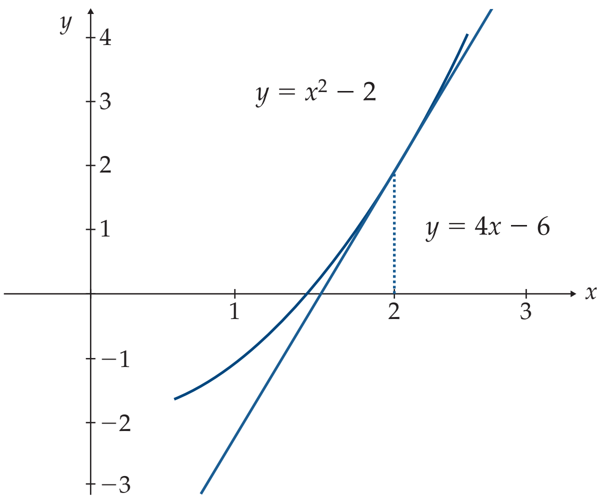
Denotemos por r el valor "exacto" de tal raíz, o sea de $\sqrt{2}$. El método de Newton inicia con la propuesta de una primera aproximación r_1 para esta raíz y mediante ciertos cálculos se obtendrá una segunda y mejor aproximación, la cual llamamos r_2. Después se obtendrá una tercera aproximación y así sucesivamente. A este procedimiento se le llama de aproximaciones sucesivas. La primera aproximación r_1, en principio, puede ser cualquier racional (recuerde que se trata de que los cálculos puedan hacerse con lápiz y papel o con una calculadora sencilla, que solo cuente con las cuatro operaciones aritméticas básicas); sin embargo, también se puede iniciar con un número que de alguna manera nos parezca una aproximación "razonable", es decir algún racional simple pero relativamente cerca de la raíz buscada. En este caso específico, podemos iniciar con $r_1 = 2$.

Consideremos la recta tangente a la gráfica en el punto $(2, f(2)) = (2, 2)$. Dado que la ecuación de la recta tangente en un punto arbitrario $(a, f(a))$ está dada por

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$y = 2a(x - a) + f(a)$$

en este caso tenemos

$$y = 2a(x - a) + f(a)$$
$$y = 4(x - 2) + 2$$
$$y = 4x - 6.$$

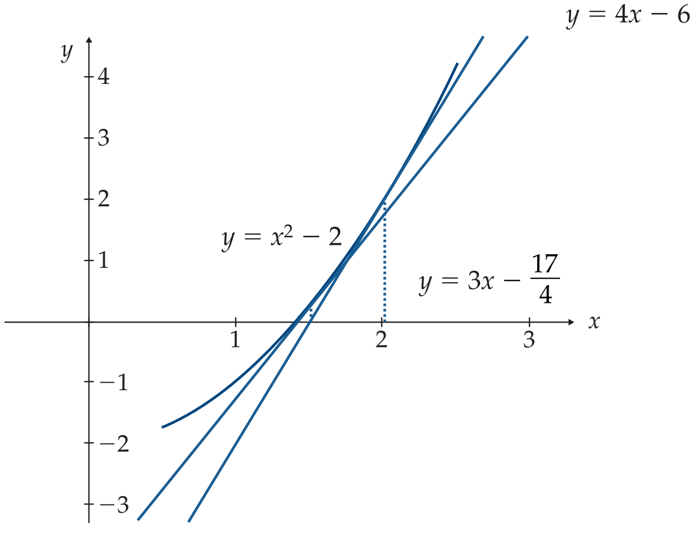


La intersección de esta recta con el eje x está dada por la raíz de la ecuación $4x - 6 = 0$, la cual es $x = \dfrac{3}{2}$. Este valor de x lo tomamos como la segunda aproximación $r_2 = \dfrac{3}{2}$. Nuevamente, consideremos la recta tangente a la gráfica en el punto $(r_2, f(r_2)) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$. Dicha recta tiene por ecuación

$$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}.$$

O sea

$$y = 3x - \frac{17}{4},$$



La intersección de la tangente en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ con el eje de las abscisas, es la raíz de la ecuación $3x - \frac{17}{4} = 0$. Esta raíz será la nueva aproximación $r_3 = \frac{17}{12}$.

En general, si r_n es cualquier aproximación de $\sqrt{2}$, considérese la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 2$ en el punto $(r_n, f(r_n))$, la cual tiene la ecuación

$$y = 2r_n(x - r_n) + f(r_n).$$

Entonces, la aproximación sucesiva r_{n+1} será la raíz de la ecuación $2r_n(x - r_n) + f(r_n) = 0$, o sea

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{2r_n}$$

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n^2 - 2}{2r_n}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{r_n}.$$

Si en esta relación hacemos $r_1 = 2$, obtenemos $r_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Luego, si hacemos las sustituciones correspondientes, obtenemos

$$r_3 = \frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \approx 1.416666666$$

$$r_4 = \frac{1}{2}\frac{17}{12} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} \approx 1.414215686.$$

En este proceso es muy importante estimar el error $\varepsilon_n = |r_n - r|$ para cada una de estas aproximaciones r_n, pues de otra manera estaremos obteniendo aproximaciones sin saber qué tan buenas son. Al estimar el error, sabremos cuáles decimales de r_n coinciden con los decimales de r, es decir, cuántos decimales son correctos. Para hacer la estimación, consideremos la fórmula recursiva

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n^2 - 2}{2r_n}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r &= r_n - r - \frac{r_n^2 - 2}{2r_n} \\ &= r_n - r - \frac{r_n^2 - r^2}{2r_n} \\ &= (r_n - r)\left(1 - \frac{r_n + r}{2r_n}\right) \\ &= (r_n - r)\frac{r_n - r}{2r_n}. \end{aligned}$$

O sea

$$r_{n+1} - r = \frac{\left(r_n - r\right)^2}{2r_n}.$$

Como $1 < r < 2$ y $r_1 = 2$, tenemos $0 < r_1 - r < 1$, por tanto

$$0 < r_2 - r = \frac{\left(r_1 - r\right)^2}{2r_1} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}.$$

Como $r_2 = \dfrac{3}{2}$, también tenemos

$$0 < r_3 - r = \frac{\left(r_2 - r\right)^2}{2r_2} < \frac{\left(\frac{1}{2^2}\right)^2}{(2)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4},$$

$$0 < r_4 - r = \frac{\left(r_3 - r\right)^2}{2r_3} < \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4}\right)^2}{2} = \frac{1}{3^2 \cdot 2^9} \approx 0.00021701.$$

Esto significa que los primeros tres decimales de r_4, son correctos: $\sqrt{2} \approx 1.414$.

La aproximación

$$r_5 = \frac{1}{2}\frac{577}{408} + \frac{408}{577} \approx 1.41421356237$$

tiene 7 decimales correctos, pues

$$0 < r_5 - r = \frac{\left(r_4 - r\right)^2}{2r_4} < \frac{\left(\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^9}\right)^2}{2} = \frac{1}{3^4 \cdot 2^{19}} \approx 0.00000002354.$$

Ahora, consideremos el caso general de una función $f(x)$ y que deseamos aproximarnos a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, de la cual se tiene una aproximación inicial r_1. La aproximación r_2 será dada por la intersección con el eje de las abscisas de la recta tangente a la gráfica en el punto $(r_1, f(r))$. Puesto que la ecuación de tal recta tangente es

$$y = f'(r_1)(x - r_1) + f(r_1)$$

entonces, r_2 está dada por

$$r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)}.$$

Esta fórmula es válida siempre y cuando la tangente no sea horizontal; es decir, siempre y cuando $f'(r_1) \neq 0$. En general, si tenemos una aproximación r_n y $f'(r_n) \neq 0$, la aproximación r_{n+1} estará dada por la fórmula de recurrencia

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}.$$

Veamos un ejemplo más. Calculemos una aproximación de $\sqrt[3]{2}$ con tres decimales correctos, esto significa que si s es tal aproximación entonces $|s - \sqrt[3]{2}| < 0.0005$.

En este caso tenemos

$$f(x) = x^3 - 2$$

y la fórmula de recurrencia

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n^3 - 2}{3r_n^2}.$$

Denotemos por r el valor exacto de $\sqrt[3]{2}$, es decir $r = \sqrt[3]{2}$ y estimemos el error $\varepsilon_n = |r_n - r|$. Dado que $r^3 = 2$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
r_{n+1} - r &= r_n - r - \frac{r_n^3 - 2}{3r_n^2} \\
&= r_n - r - \frac{r_n^3 - r^3}{3r_n^2} \\
&= r_n - r - \frac{(r_n - r)(r_n^2 + rr_n + r^2)}{3r_n^2} \\
&= (r_n - r)\left(1 - \frac{r_n^2 + rr_n + r^2}{3r_n^2}\right).
\end{aligned}$$

O sea

$$\begin{aligned}
r_{n+1} - r &= (r_n - r)\left(1 - \frac{r_n^2 + rr_n + r^2}{3r_n^2}\right) \\
&= (r_n - r)\left(\frac{2r_n^2 - rr_n - r^2}{3r_n^2}\right) \\
&= (r_n - r)\left(\frac{r_n^2 - rr_n + r_n^2 - r^2}{3r_n^2}\right) \\
&= (r_n - r)\left(\frac{(r_n - r)r_n + (r_n - r)(r_n + r)}{3r_n^2}\right) \\
&= (r_n - r)^2\left(\frac{r_n + r_n + r}{3r_n^2}\right).
\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$r_{n+1} - r = (r_n - r)^2\left(\frac{2r_n + r}{3r_n^2}\right).$$

Si partimos de un valor inicial r_1 positivo, tenemos que todos los elementos r_n, con excepción quizá de r_1 mismo, son mayores que $r = \sqrt[3]{2}$, pues el miembro derecho de esta relación es positivo. De esto deducimos a la vez que

$$\frac{2r_n + r}{3r_n^2} < \frac{2r_n + r_n}{3r_n^2} = \frac{1}{r_n}.$$

Por tanto, tenemos la relación para los errores

$$0 < \varepsilon_{n+1} = r_{n+1} - r < \frac{(r_n - r)^2}{r_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{r_n}.$$

Por ejemplo, tomemos como en el caso anterior $r_1 = 2$, aplicando la relación de recurrencia

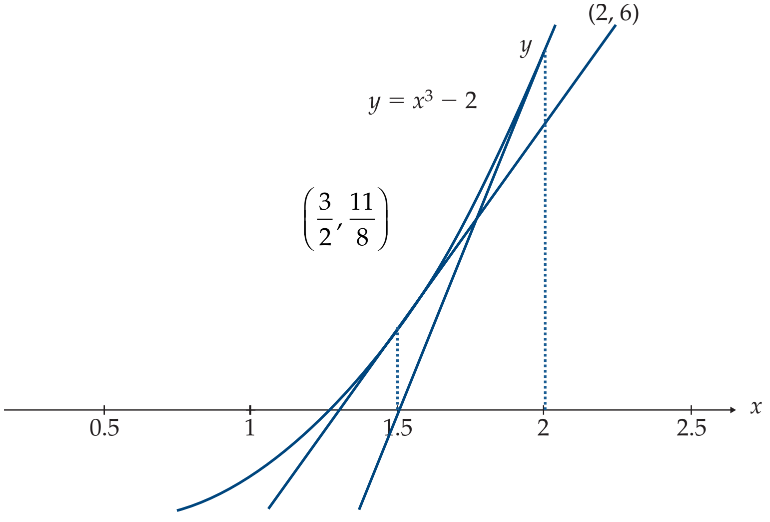
$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n^3 - 2}{3r_n^2}.$$

obtenemos

$$r_2 = 2 - \frac{8-2}{3 \cdot 4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$r_3 = \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} - \frac{11}{54} = \frac{35}{27} = 1.296296...$$

$$r_4 = \frac{35}{27} - \frac{\left(\frac{35}{27}\right)^3 - 2}{3 \cdot \left(\frac{35}{27}\right)^2} = \frac{125116}{99225} = 1.2609322...$$



Ahora, estimemos los errores $\varepsilon_n = |r_n - r| = r_n - r$. Como $1 < r < 2$ y $r_2 = \frac{3}{2}$, entonces necesariamente

$$\varepsilon_2 = r_2 - r < \frac{1}{2} = 0.5.$$

Por tanto,

$$\varepsilon_3 < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} = 0.166...$$

$$\varepsilon_4 < \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{35}{27}} = \frac{3}{140} = 0.0214... < 0.022.$$

Esta estimación de ε_4 nos dice que la aproximación r_4 apenas tiene un decimal correcto. Como deseamos cuatro decimales correctos, calcularemos otros elementos más de la sucesión de aproximaciones r_n, con sus respectivos errores ε_n. Entonces, tenemos

$$r_5 = \frac{125116}{99225} - \frac{\left(\frac{125116}{99225}\right)^3 - 2}{3 \cdot \left(\frac{125116}{99225}\right)^2} = 1.2599218...$$

y

$$\varepsilon_5 < \frac{\varepsilon_4^2}{r_4} < \frac{(0.03)^2}{1.26} = 0.000384...$$

Esto significa que $r_5 = 1.2599218...$ tiene tres decimales correctos.

8.8 Problemas de optimización

Una de las aplicaciones más importantes de la derivada es en los llamados problemas de máximos y mínimos. Por lo general, dichos problemas se refieren a la modelación de un sistema en donde se desea hallar el valor máximo o mínimo de una función, la cual suele representar alguna cantidad física o de alguna otra naturaleza que tiene que ver con el sistema que se está modelando. En algunos casos, la función significa alguna utilidad o beneficio o, quizá, costos o pérdidas, en tales circunstancias los valores máximos o mínimos de la función, se denominan valores óptimos. Por analogía, los problemas de máximos y mínimos suelen denominarse con el nombre genérico de **problemas de optimización**.

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran problemas de optimización en diferentes contextos. Sin embargo, al inicio de este capítulo ya resolvimos un problema de esta clase. ¿En qué momento?, cuando analizamos el movimiento de un proyectil que se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0 y calculamos la altura máxima alcanzada por el proyectil. Recordemos, también, que cuando el proyectil recorre distancias cortas, podemos considerar constante a la fuerza de gravedad, lo cual equivale a reemplazar la función dependiente de h,

$$G\frac{M}{(R+h)^2}$$

por la constante $g = 9.8$.

Suponiendo que el lanzamiento se hace desde una altura H, se tienen las condiciones

$$\beta = x(0) = H$$
$$\alpha = x'(0) = v_0$$

y la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + H.$$

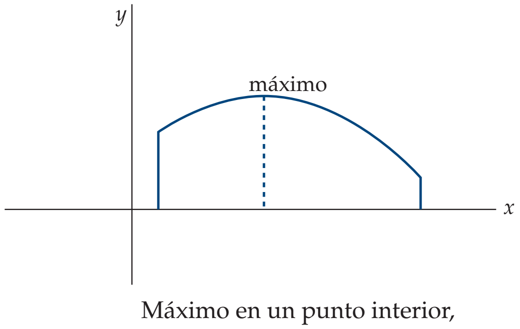
La altura máxima a la que llega el proyectil es precisamente el valor máximo de la función $x(t)$ y corresponde al instante en el que la velocidad $v(t) = x'(t) = -gt + v_0$ es cero, es decir, al instante $t = \frac{v_0}{g}$, que constituye la solución de la ecuación

$$x'(t) = -gt + v_0 = 0.$$

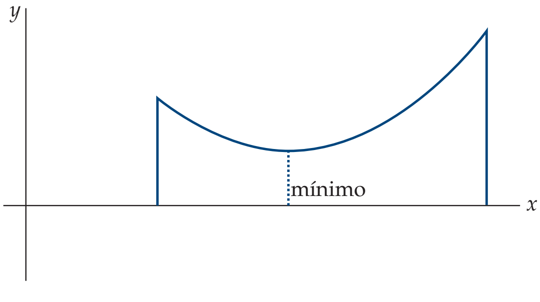
8.8.1 Una reflexión sobre los máximos y los mínimos de una función

Como ya se comentó, en los problemas de máximos y mínimos, en general tenemos una función continua f de la cual deseamos conocer su valor máximo o mínimo en un intervalo $[a, b]$. Ante tal problema, lo primero que quizá se nos ocurre realizar es determinar los puntos donde la derivada de f se anula, es decir, las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$. Sin embargo, es importante hacer las siguientes reflexiones.

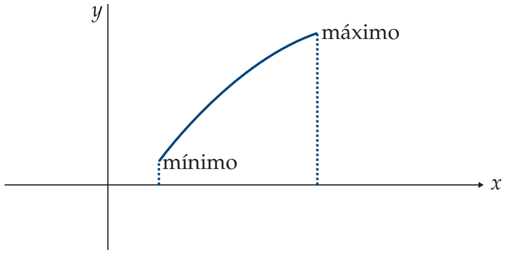
Siendo f una función continua en un intervalo $[a, b]$, ciertamente alcanza un valor máximo y uno mínimo en ese intervalo, pero esto puede ocurrir en diferentes circunstancias. Por ejemplo, uno o los dos valores extremos pueden ser alcanzados por la función en puntos interiores del intervalo $[a, b]$, es decir en puntos del intervalo abierto (a, b), pero también cualquiera de ellos puede ser tomado en uno de los extremos a o b. Por tanto, al resolver un problema de optimización es conveniente considerar la posibilidad de que la función que modela nuestro sistema, aun cuando tenga valores máximos o mínimos locales en puntos interiores de un intervalo, alcance el máximo o el mínimo absoluto que nos interesa en un extremo del intervalo. De lo anterior se deduce que para hallar los extremos de una función f derivable en un intervalo $[a, b]$, hemos de comparar los valores $f(a)$ y $f(b)$ con los valores extremos locales dados por las raíces en el intervalo abierto (a, b) de la ecuación $f'(x) = 0$. En las figuras siguientes se muestran algunos de los casos que se pueden presentar.



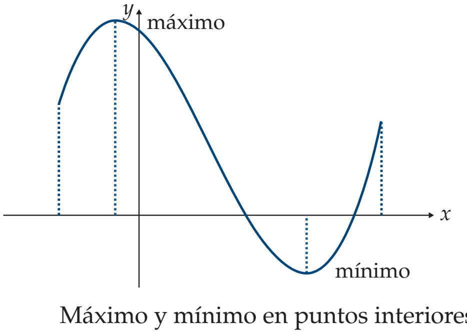
Máximo en un punto interior, mínimo en un extremo.



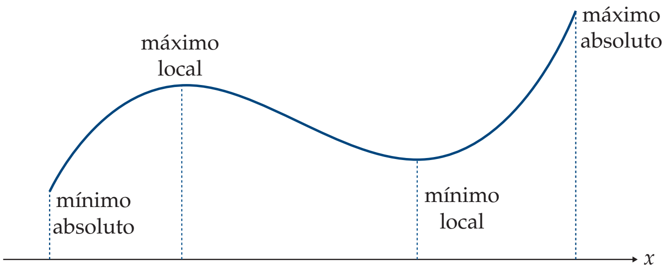
Mínimo en un punto interior, máximo en un extremo.



Máximo y mínimo en extremos.

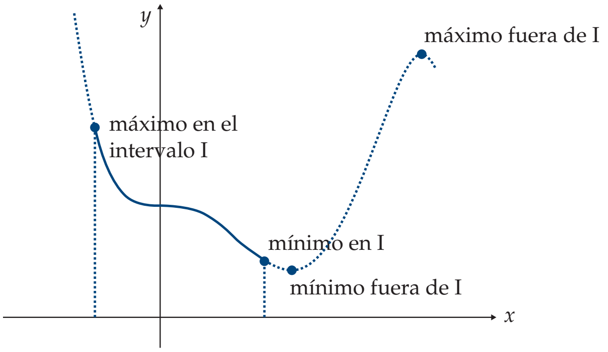


Máximo y mínimo en puntos interiores.



Máximo y mínimo locales en puntos interiores, pero máximo y mínimo absolutos en los extremos.

Puede ocurrir, también, que la función esté expresada mediante una fórmula $f(x)$ que representa una función cuyo dominio va más allá del intervalo en cuestión y cuyos valores máximo o mínimo locales los alcanza en puntos fuera de ese intervalo, por lo que esos puntos deben desecharse.



Cuando analizamos los puntos donde se anula la derivada, para su discriminación podemos acudir a los criterios de la primera derivada, de la segunda derivada o de la derivada de orden n para máximos y mínimos, vistos en el capítulo 7. La aplicación de estos criterios en un caso específico puede significar una tarea laboriosa, sin embargo, podemos ahorrarnos un poco de este trabajo si tomamos en cuenta los siguientes hechos.

Para todo entero positivo n, las funciones x^n y $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ son estrictamente crecientes en el intervalo $[0, +\infty)$, lo cual significa que si $a < b$, entonces $a^n < b^n$ y $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Esto implica que si una función f es no negativa y tiene un máximo local en un punto x_0, entonces también f^n tiene un máximo local en ese punto, pues si $0 \le f(x) \le f(x_0)$ también se cumple $0 \le f(x)^n \le f(x_0)^n$. De forma recíproca, si f^n tiene un máximo local en x_0, entonces f tiene un máximo local en x_0, pues de la desigualdad $0 \le f(x)^n \le f(x_0)^n$ también se sigue $0 \le f(x) \le f(x_0)$. En otras palabras, si f es no negativa, que f tenga un máximo local en x_0 es equivalente a que f^n tenga un máximo local en ese mismo punto. De igual modo, si tenemos que f es no negativa, que f tenga un mínimo local en x_0 es equivalente a que f^n tenga un mínimo local en ese mismo punto; por consiguiente, tenemos un resultado similar para f y $f^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{f}$. En particular, cuando la función f es una raíz cuadrada, digamos $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con $g(x) > 0$, para determinar los puntos críticos de f, podemos prescindir del radical y determinar los puntos críticos de g. El uso de estos hechos puede facilitarnos notablemente el trabajo de derivación cuando deseamos determinar los extremos de una función.

Ejemplo 1

Si deseamos determinar los valores extremos locales de la función $f(x) = \sqrt{x^2(2x-3)^2+1}$, definida en todos los reales, podemos derivarla y hallar las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$. En este caso, la derivada está dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2(2x-3)^2+1}}\left[2x(2x-3)^2 + x^2 2(2x-3)2\right] \\ &= \frac{x(2x-3)(2x-3+2x)}{\sqrt{x^2(2x-3)^2+1}} \\ &= \frac{x(2x-3)(4x-3)}{\sqrt{x^2(2x-3)^2+1}}. \end{aligned}$$

Asimismo, también podemos hallar los puntos críticos de $g(x) = f^2(x) = x^2(2x-3)^2+1$, en cuyo caso la derivada de g está dada por

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(2x-3)^2 + x^2 2(2x-3)2 \\ &= 2x(2x-3)(4x-3). \end{aligned}$$

Así pues, resulta evidente que es más fácil hallar los puntos críticos de g, que los de f, pues la derivación de g es más simple que la derivación de f.

Los puntos críticos de ambas son los mismos y en este caso son $x_{1=0}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_3 = \frac{3}{4}$, pues son las raíces de la ecuación $2x(2x-3)(4x-3) = 0$.

Ejemplo 2

Hallemos los puntos críticos de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Si procedemos a derivar f, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^4+1}\cdot 2x - x^2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}4x^3}{x^4+1} \\ &= \frac{(x^4+1)\cdot 2x - 2x^5}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}} \\ &= \frac{2x(x^4+1-x^4)}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2x}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si derivamos su cuadrado

$$g(x) = f^2(x) = \frac{x^4}{x^4+1}$$

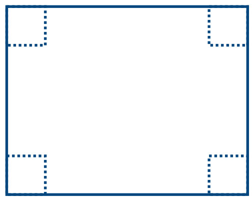
obtenemos

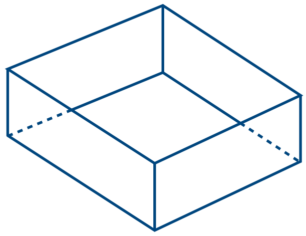
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^4+1)4x^3 - x^4\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}. \end{aligned}$$

En este ejemplo es notable la diferencia en los procesos de derivación de f y $g = f^2$. Así pues, es más fácil derivar $g = f^2$ que f, por lo que también es más fácil obtener los puntos críticos de g que los de f. Puesto que $g' = 2ff'$, los puntos críticos de g son los puntos críticos de f y los ceros de f. Pero un cero de f es un valor mínimo de f pues $f(x) \geq 0$ para toda x en el dominio de f.

8.8.2 Caja de máximo volumen

Un problema clásico de máximos y mínimos es el comúnmente llamado “problema de la cajita”. Aunque es considerado muy elemental, lo presentamos aquí no solo para iniciar nuestra lista de ejemplos de máximos y mínimos sino también para resolverlo en su forma general, lo cual no es común encontrar en los libros de texto. Se tiene una cartulina rectangular de ancho a y largo b, con la cual se construye una caja recortando cuadrados en las cuatro esquinas, todos ellos del mismo tamaño. La caja se forma doblando las pestañas resultantes del recorte, como se indica en las siguientes figuras.

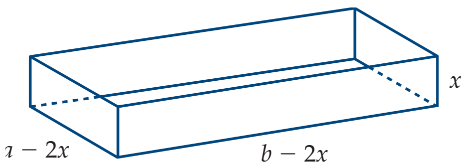




De todas las cajas posibles que se pueden construir de esta manera, se pide hallar las dimensiones de aquella que tiene el mayor volumen. Como se comentó antes, este problema se presenta usualmente con valores específicos de a y b; nosotros lo resolveremos, considerando a y b reales positivos arbitrarios. Estos dos números pueden ser iguales o bien uno de ellos mayor que el otro; supongamos $b \geq a$. Dado que a y b son arbitrarios, será necesario analizar el caso con detalle para verificar que se cumplan las condiciones que nos permitan aplicar los teoremas correspondientes.

Supongamos que se recorta un cuadrado de lado x, entonces se construirá una caja de ancho $a - 2x$, largo $b - 2x$ y altura x. Dado el significado de x, tenemos la condición implícita $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$; por supuesto, no se puede armar caja alguna si $x = 0$ o $x = \frac{a}{2}$, en este caso decimos que tenemos cajas de volumen cero. En general, el volumen V de la caja es función de x y está dado por

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx.$$



Tenemos una función V, de la cual deseamos conocer su valor máximo en el intervalo $[0, \frac{a}{2}]$. La función V toma el valor cero cuando $x = 0$ o $x = \frac{a}{2}$. El valor máximo de V en el intervalo $[0, \frac{a}{2}]$ lo alcanza en un punto interior, es decir, en un punto del intervalo $\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Como V es derivable en el intervalo $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, el valor máximo se alcanza en un punto x_0 crítico, es decir en un punto que satisface $V'(x_0) = 0$. Pero, $V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab$ para toda $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$, así que x_0 es raíz de la ecuación

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0.$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-3ab}}{6}$$

$$x_2 = \frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-3ab}}{6},$$

las cuales también se escriben como

$$x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

$$x_2 = \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

De estas dos raíces, la única que pertenece al intervalo $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ es

$$x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

En efecto, como $b \geq a > 0$ tenemos $\frac{b}{a} \geq 1$, por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} &= \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}-\sqrt{1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) \\
&= \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}-\sqrt{\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) \\
&< \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}-\sqrt{\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)^2}\right) \\
&= \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}-\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{a}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < \frac{a}{4} < \frac{a}{2}.$$

Por otra parte, también tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} &= \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}+\sqrt{1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) \\
&= \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)+1}\right) \\
&\geq \frac{a}{6}\left(1+\frac{b}{a}+1\right) \\
&\geq \frac{a}{6}(3) \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x_2 = \frac{a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \geq \frac{a}{2}.$$

La igualdad se obtiene cuando $a = b$. *En este caso*, $x_2 = \dfrac{a}{2}$ y $x_1 = \dfrac{a}{6}$.

De esta forma, tenemos que el único punto crítico que pertenece al intervalo $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$. es $x_1 = \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$; además, dado que la función $V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$ es positiva en $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$. y $V(0) = V\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$, se sigue que V debe tener su valor máximo en x_1. Así pues, las dimensiones de la caja de mayor volumen son

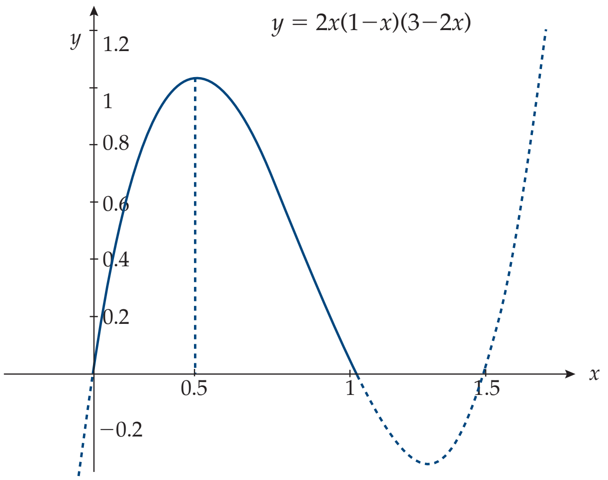
Ancho: $a - 2x_1 = a\,\dfrac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3} = \dfrac{2a - b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3}$

Largo: $b - 2x_1 = b - \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3} = \dfrac{2b - a + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{3}$

Alto: $x_1 = \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$

El volumen máximo lo obtenemos valuando V en x_1, con lo cual se obtiene una expresión que es un tanto compleja. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 3$, el problema consiste en determinar el máximo de la función $V(x) = 2x(1 - x)(3 - 2x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Este se alcanza en el punto $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{7}}{6} \approx 0.392$.

En la figura siguiente se ilustra la gráfica $V(x)$ para este caso particular.



Las dimensiones de la caja de mayor volumen son

Ancho: $2 - \dfrac{5 - \sqrt{7}}{3} = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3} \approx 1.215$

Largo: $3 - \dfrac{5 - \sqrt{7}}{3} = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{3} \approx 2.215$

Alto: $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{7}}{6} \approx 0.392$

El volumen máximo es $V(x_1) \approx 1.0563$.

En el caso particular $a = b$, tenemos

$$V(x) = (a - 2x)^2 x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

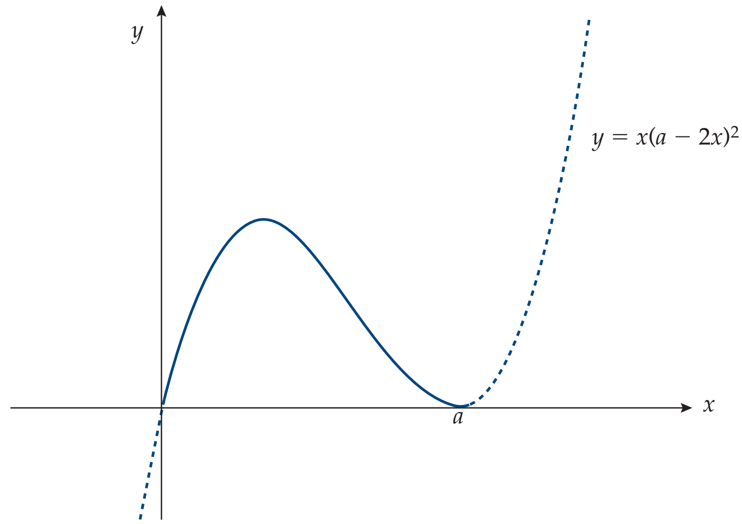
$$x_1 = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} = \frac{a}{6}\ .$$

Por consiguiente, tenemos

Ancho: $a - 2x_1 = \frac{2}{3}a$

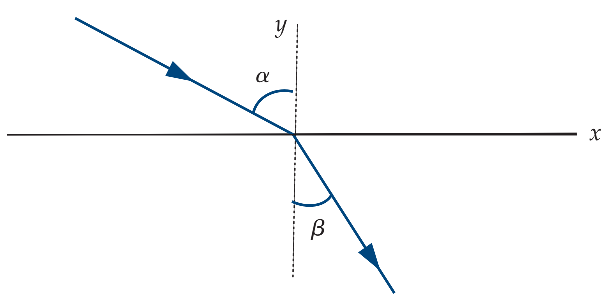
Largo: $a - 2x_1 = \frac{2}{3}a$

Alto: $x_1 = \frac{a}{6}$



8.8.3 Problema de óptica. Ley de Snell de la refracción de la luz

Otro problema clásico de máximos y mínimos es el de la *ley de la refracción de la luz*, el cual fue resuelto por el matemático francés Pierre Fermat. Supongamos que se tienen dos medios, por ejemplo aire y agua, o bien aire y cristal, dentro de los cuales viaja un rayo de luz (véase figura).



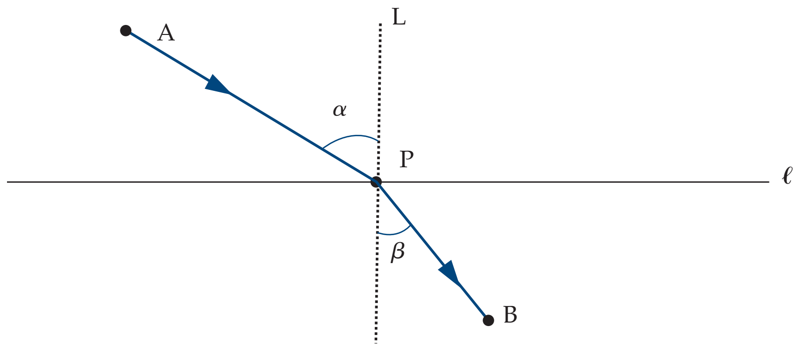
Cuando dicho rayo de luz viaja en uno de los medios y pasa al otro, desvía su trayectoria lineal que mantenía en el primer medio, para continuar su camino lineal pero en otra dirección,

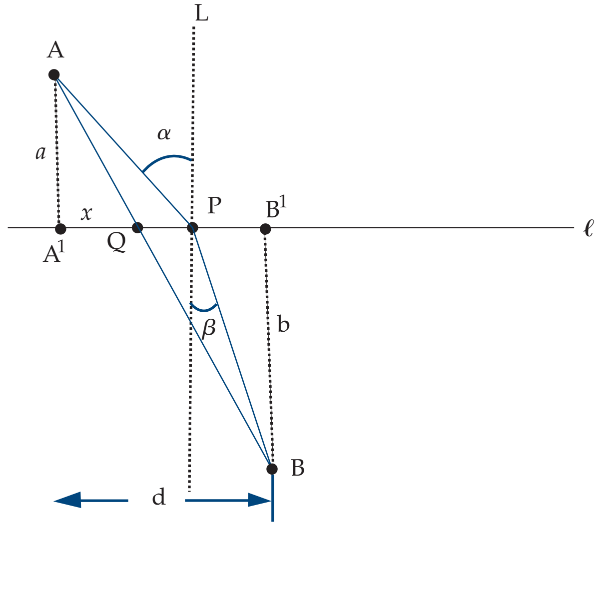
así que su trayectoria es una línea quebrada, como se ilustra en la figura. Este fenómeno físico se llama refracción de la luz y se debe a que, en medios diferentes, la luz viaja a velocidades diferentes. Supongamos que el rayo de luz incide en la línea que separa ambos medios, formando un ángulo α con la recta perpendicular a esa línea. Asimismo, supongamos que el rayo en el segundo medio forma un ángulo β con la misma recta perpendicular. En este momento no asumimos que los ángulos α y β sean diferentes, ello será resultado de la relación entre ambos ángulos que obtengamos.

Esta relación entre los ángulos será consecuencia del "principio del mínimo tiempo" de Fermat. Dicho principio establece que la luz viaja en cualquier medio, homogéneo o no, de modo que emplea el menor tiempo posible para ir de un punto a otro. Este postulado es el que permitió a Fermat deducir la ley de Snell de la refracción de la luz.

Sea A el punto de origen del rayo de luz en el medio M_1, en el cual viaja a una velocidad v_1, y sea B el punto destino del rayo en el medio M_2, en el cual viaja a una velocidad v_2. Sea P el punto en la línea ℓ que separa ambos medios M_1 y M_2, donde incide el rayo. Sea α el ángulo de incidencia, es decir el ángulo que forma el rayo en el medio M_1 con la recta L perpendicular a la línea ℓ en el punto P y sea β el ángulo de refracción, es decir, el ángulo que forma el rayo en el medio M_2 con la misma recta L, como se ilustra en la figura.

El punto P tiene la propiedad de que la trayectoria APB es la que requiere el menor tiempo, respecto de todas las trayectorias AQB, donde Q es cualquier otro punto sobre la línea ℓ. Determinemos, ahora, las propiedades geométricas que tiene este punto P.





Sean A_1 y B_1 las bases de las perpendiculares a la ℓ bajadas desde los puntos A y B, respectivamente, y sea a la distancia de A a A_1 y b la distancia de B a B_1. Sea d la distancia entre A_1 y B_1. Para cualquier punto Q sobre la línea ℓ, denotemos por x la distancia con signo de Q al punto A_1. Si Q está a la derecha de A_1, tomamos $x > 0$, si Q está a la izquierda tomamos $x < 0$.

La distancia de A al punto Q está dada por $d(A, Q) = \sqrt{a^2 + x^2}$. Por otra parte, la distancia de B a Q está dada por $d(B, Q) = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$. Dado que la luz viaja en el medio M_1 con una velocidad v_1, el tiempo que emplea en recorrer la distancia $d(A, Q)$ es

$$T_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}.$$

Asimismo, el tiempo que la luz emplea en recorrer la distancia $d(B, Q)$ es

$$T_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Por tanto, el tiempo que la luz emplea en ir del punto A al punto B es la suma de estos tiempos

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Esta función da el tiempo para cualquier trayectoria AQB y está definida y es derivable para todo real x. Su derivada está dada por

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Los puntos x donde la función tiene un máximo o un mínimo, son raíces de la ecuación

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0.$$

Pero $T''(x) > 0$ para toda x, pues

$$T''(x) = \frac{1}{v_1}\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2}\frac{b^2}{(b^2 + (d'' - x)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

por tanto, la única posibilidad para los puntos críticos es que T tenga un mínimo. En consecuencia, la función no tiene máximo y alcanza un valor mínimo solo en un punto, el cual satisface la relación

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

De la figura, se sigue que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ y } \operatorname{sen}\beta = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}},$$

así que se debe cumplir

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{v_1} = \frac{\text{sen}\,\beta}{v_2}.$$

Esta es precisamente la ley de Snell de la refracción de la luz.



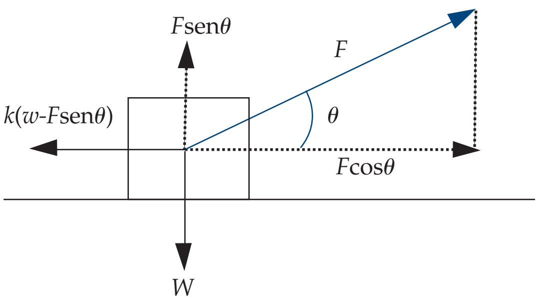
En un atardecer puedes ver el color naranja, se debe a la refracción de la luz blanca del Sol.

8.8.4 Un problema de mecánica

Supongamos que tenemos un cuerpo de peso W sobre una superficie plana, el cual se desplaza al aplicarle una fuerza F. La única fuerza que se opone al movimiento es la debida a la fricción entre el cuerpo y la superficie. Dicha fuerza es horizontal y su magnitud proporcional a la presión que ejerce el cuerpo sobre la superficie. En ausencia de fuerzas externas verticales, la fuerza de presión entre el cuerpo y la superficie es el peso W del cuerpo, así que en este caso la fuerza de fricción tiene magnitud $F_k = kW$, donde k es la constante de proporcionalidad. Esta constante de proporcionalidad es un número positivo y es una medida de la fricción entre el cuerpo y la tabla donde se desliza, además de que depende de las características físicas del cuerpo y del material del que está hecha la superficie.

Si la fuerza F que se aplica al cuerpo es horizontal, entonces para que el cuerpo inicie su movimiento F debe neutralizar la fuerza de fricción F_k. La magnitud mínima de la fuerza horizontal que debe aplicarse para vencer la fricción es igual en magnitud a la misma fuerza de fricción, es decir $F = F_k = kW$.

Si la fuerza F no es horizontal, entonces formará un ángulo θ con tal recta, como se muestra en la siguiente figura.



En este caso, la componente horizontal $F_h = F \cos\theta$ de la fuerza F es la que neutraliza la fuerza de fricción, para que el cuerpo inicie el movimiento; sin embargo, ahora, la fuerza de fricción no es proporcional al peso del cuerpo, pues la componente vertical $F_v = F \operatorname{sen}\theta$ de F hace que disminuya la presión que el cuerpo ejerce sobre el plano horizontal. En este caso, la fuerza de fricción es proporcional a $W - F \operatorname{sen}\theta$ y es la que debe ser neutralizada por la componente horizontal de F. De esta forma, entonces

$$F\cos\theta = k(W - F\operatorname{sen}\theta)$$

Dado el ángulo θ, la fuerza mínima F que ha de aplicarse para que el cuerpo inicie su movimiento, dependerá de θ. Para cada ángulo θ, hay una fuerza $F(\theta)$ que se obtiene despejando F de la relación anterior. Dicha fuerza es

$$F(\theta) = \frac{kW}{\cos\theta + k\operatorname{sen}\theta}.$$

Ahora, determinemos el ángulo θ_0 para el cual se tiene el menor valor posible para F. Se trata de un problema simple de máximos y mínimos, el cual resolveremos a continuación, pero primero hagamos algunas precisiones. Dadas las condiciones físicas del sistema, se trata de hallar el valor mínimo de F en el intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, para lo cual calculemos los valores de F en los extremos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y comparémoslos con los mínimos locales en el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. En los extremos tenemos

$$F(0) = kW \text{ y } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = W.$$

Para hallar el valor mínimo en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, determinemos los puntos críticos de F en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Aplicando las reglas de derivación, se obtiene

$$F'(\theta) = \frac{kW(\operatorname{sen}\theta - k\cos\theta)}{(\cos\theta + k\operatorname{sen}\theta)^2}.$$

Los puntos críticos de F están dados por la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta - k\cos\theta = 0$$

Sea θ_0 una raíz de esta ecuación. Tenemos, entonces

$$\operatorname{sen}\theta_0 = k\cos\theta_0.$$

De esta ecuación, se escribe inmediatamente

$$\theta_0 = \arctan k, \qquad \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$$

con lo que se determina el ángulo buscado.

Calculemos, ahora, la fuerza $F(\theta_0)$ correspondiente a este ángulo. Observemos que

$$\operatorname{sen}^2\theta_0 = k^2\cos^2\theta_0.$$

Luego,

$$1 - \cos^2\theta_0 = k^2\cos^2\theta_0$$

$$\cos^2\theta_0 = \frac{1}{1 + k^2}.$$

O sea

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

De la relación sen $\theta_0 = k\cos\theta_0$, obtenemos a la vez

$$\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} F(\theta_0) &= \frac{kW}{\cos\theta_0 + k\operatorname{sen}\theta_0} \\ &= \frac{kW}{\cos\theta_0 + k^2\cos\theta_0} \\ &= \frac{kW}{(1+k^2)\cos\theta_0}. \end{aligned}$$

De donde, finalmente

$$F(\theta_0) = \frac{kW}{\sqrt{1+k^2}}.$$

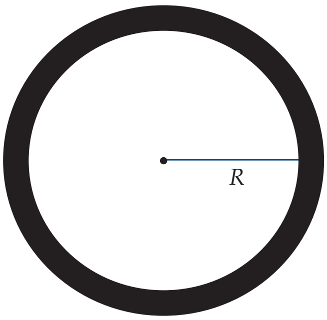
Dado que en los extremos tenemos $F(0) = kW$ y $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = W$, el mínimo de la función en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ es el menor de estos tres valores, o sea $F(\theta_0)$. En resumen, el ángulo óptimo está dado por

$$\theta_0 = \arctan k$$

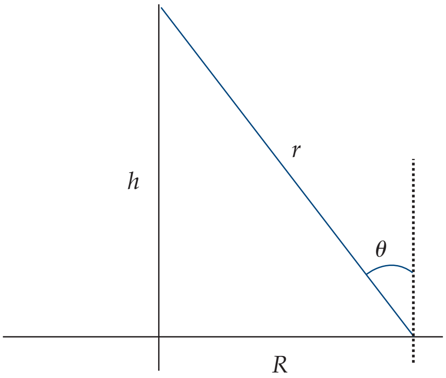
y la fuerza mínima es $F(\theta_0)$, dada por la fórmula antes obtenida.

8.8.5 Un problema de alumbrado

En un parque de recreo familiar se tiene una pequeña pista circular de patinaje, como se ilustra en la figura.



El radio del círculo medio es R. Se desea colocar en el centro de este círculo un poste o una columna donde se colocará una potente lámpara para alumbrar la pista. Supongamos que el nivel de iluminación I (medida en lux = lumen/m^2) en la pista es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la lámpara hasta la periferia del círculo medio y es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia del rayo de luz que se forma con la vertical:



A menor ángulo mayor iluminación, a mayor distancia menor iluminación.

Determinemos la altura H del poste para que la luminosidad en la pista sea óptima; a esta altura la llamaremos **altura óptima**.

Por hipótesis, para cualquier altura h del poste, el nivel de iluminación I está dado por una relación de la forma

$$I = k\frac{\cos\theta}{r^2},$$

donde k es una constante que depende de la lámpara. De la figura se siguen las relaciones

$$r^2 = R^2 + h^2 \text{ y } h^2 = r^2 - R^2.$$

También se sigue

$$h = r\cos\theta.$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} I(h) &= k\frac{r\cos\theta}{r^3} \\ I(h) &= k\frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Deseamos encontrar el valor máximo de $I(h)$, donde $0 \leq h < +\infty$. Puesto que $I(0) = 0$, el valor máximo (si existe) de $I(h)$ lo alcanza en sus puntos críticos. Entonces, derivemos $I(h)$:

$$\begin{aligned} I'(h) &= k\frac{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}h(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}2h}{(R^2 + h^2)^3} \\ &= k\frac{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{(R^2 + h^2)^3} \\ &= k\frac{(R^2 + h^2) - 3h^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

O sea

$$I'(h) = k\frac{R^2 - 2h^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Los puntos críticos de la función $I(h)$ son entonces las raíces de la ecuación

$$\frac{R^2 - 2h^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Es decir

$$H_1 = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ y } H_2 = -\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Pero, tenemos la restricción $0 \leq h < +\infty$, así que el punto crítico que nos interesa es

$$H_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Es claro que para $0 < h < \frac{R}{\sqrt{2}}$, se tiene $I'(h) > 0$. Por otra parte, para $h > \frac{R}{\sqrt{2}}$, se tiene $I'(h) < 0$; por tanto, $I(h)$ tiene un máximo local en $H = H_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Además, como $I'(h) = k\frac{R^2 - 2h^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$ es negativa para toda $h > \frac{R}{\sqrt{2}}$, $I(h)$ es decreciente en el intervalo $[H, +\infty)$, por consiguiente, $I(H)$ es un máximo absoluto en $0 \leq h < +\infty$. Así, la altura óptima es

$$H = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

Ahora, estudiaremos una hermosa aplicación de la derivada y el análisis de funciones a un problema de naturaleza aritmética.

8.8.6 ¿Qué número es mayor, e^{π} o π^{e}? ¿Qué número es mayor, $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ o $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$?

Para contestar estas preguntas, podemos acudir a una calculadora científica o, mejor aún, a una computadora personal. Sin embargo, haciéndolo de esta manera, difícilmente descubriremos la justificación de las respuestas. De hecho, quizá no sea tan interesante como el procedimiento mismo para descubrirla. Una manera de responder la pregunta y a la vez entender por qué uno u otro es mayor, es acudiendo a la derivada. En la estrategia que utilizaremos será importante determinar el máximo de una función especial, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Se trata, pues, de un problema aritmético, cuya solución podremos obtener con la poderosa herramienta que nos proporciona el cálculo diferencial.

Nuestra solución también nos permitirá responder otras dos preguntas del mismo:

a) ¿Qué es mayor, $2.6^{2.7}$ o $2.7^{2.6}$?
b) ¿Qué es mayor, $2.8^{2.9}$ o $2.9^{2.8}$?

La razón para formular estas dos preguntas es echar abajo argumentos como que en ese tipo de comparaciones "manda o domina la base" o bien "manda o domina el exponente". Para la pregunta **a)**, la respuesta es $2.6^{2.7} < 2.7^{2.6}$, mientras que para la pregunta **b)** la respuesta es $2.8^{2.9} > 2.9^{2.8}$. En el primer caso, es mayor el que tiene mayor base, mientras que en el segundo caso, es mayor el que tiene mayor exponente.

Para responder las preguntas del título de esta sección, planteemos un problema más general. Sean x y y dos números positivos. Nos preguntamos, ¿bajo qué relaciones entre x y y se tiene $x^y < y^x$? Primero, obtengamos algunas condiciones necesarias. De la desigualdad $x^y < y^x$, se sigue

$$y \log x < x \log y.$$

Entonces,

$$\frac{\log x}{x} < \frac{\log y}{y}.$$

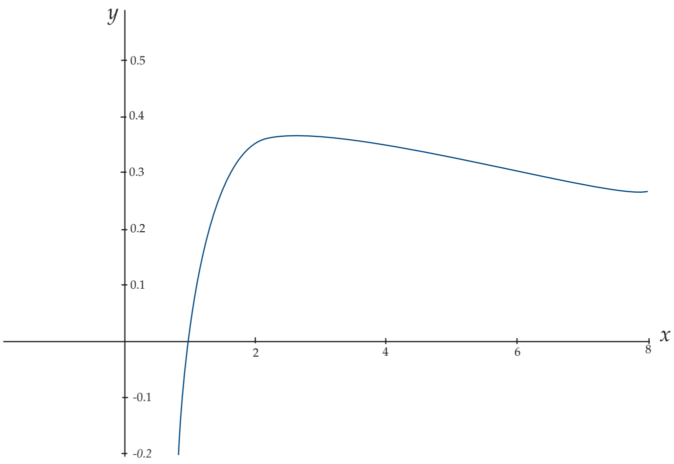
Consideremos, ahora, la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$. Esta función está definida en todos los reales positivos. Es obvio que el problema se traduce en averiguar en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. Para ello, calculemos su derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x \log' x - \log x}{x^2} \\ &= \frac{x\frac{1}{x} - \log x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2}. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de la función son las raíces de la ecuación

$$1 - \log x = 0.$$

Esta ecuación tiene como única raíz $x = e$; por tanto, el único punto crítico de la función es ese. Además, es claro que para $x > e$, $f'(x) < 0$, ya que para estos puntos $\log x > 1$. De manera similar, para $x < e$, $f'(x) > 0$, pues en estos puntos $\log x < 1$. Por el criterio de la primera derivada, se tiene que la función tiene un máximo en $x = e$, además f es creciente en el intervalo $(0, e]$ y decreciente en el intervalo $[e, +\infty)$. La gráfica se ilustra a continuación.



Dado que f es decreciente en el intervalo $[e, +\infty)$ y puesto que $e < \pi$, se sigue que

$$\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}.$$

De esta manera, invirtiendo el proceso que seguimos para establecer la función f, obtenemos

$$\begin{aligned} e \log \pi &< \pi \log e \\ \log \pi^e &< \log e^\pi. \end{aligned}$$

Tomando la exponencial de ambos miembros, se tiene

$$\pi^e < e^\pi.$$

Por otra parte, como la función f es creciente en el intervalo $(0, e]$ y dado que $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, tenemos

$$\frac{\log\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < \frac{\log\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{3}\log\sqrt{2} < \sqrt{2}\log\sqrt{3}$$

o sea

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}.$$

En general, tenemos que si $0 < x < y \leq e$, entonces $f(x) < f(y)$, es decir,

$$\frac{\log x}{x} < \frac{\log y}{y}.$$

De donde obtenemos $y \log x < x \log y$, o sea

$$x^y < y^x.$$

Por otra parte, si $e \leq x < y$, entonces

$$\frac{\log x}{x} > \frac{\log y}{y}.$$

O sea $y \log x > x \log y$, es decir

$$x^y > y^x.$$

Para hallar las respuestas de las preguntas de los incisos **a)** y **b)**, observemos que $2.6 < 2.7 < e < 2.8 < 2.9$, pues recordemos que $e = 2.71818...$ Así pues, tenemos

$$2.6^{2.7} < 2.7^{2.6} \text{ y } 2.8^{2.9} > 2.9^{2.8}.$$

Se invita al lector a que responda las siguientes preguntas:

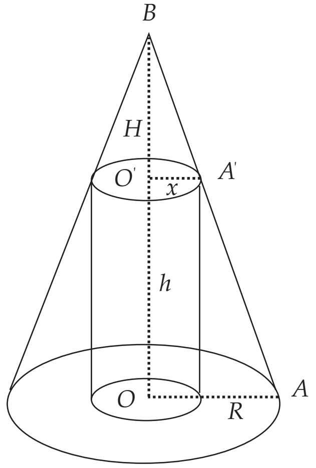
c) ¿Qué número es mayor, $1.9^{2.1}$ o $2.1^{1.9}$?

d) ¿Qué número es mayor, 99^{100} o 100^{99}?

8.9 Problemas geométricos de máximos y mínimos

8.9.1 Cilindro de mayor volumen inscrito en un cono

Supongamos que tenemos un cono recto de altura H y base circular de radio R. Determinemos las dimensiones del cilindro de máximo volumen inscrito en el cono.



Consideremos cualquier cilindro inscrito, como se muestra en la figura. Sea x su radio y h su altura. El volumen de este cilindro está dado por

$$V = \pi\, x^2\, h.$$

Como los triángulos ΔOAB y $\Delta O'A'B$ son semejantes, tenemos

$$\frac{H}{R} = \frac{H - h}{x}$$

es decir

$$h = H\left(1 - \frac{x}{R}\right).$$

Por tanto,

$$V(x) = \pi x^2 H\left(1 - \frac{x}{R}\right).$$

Derivemos V para obtener sus puntos críticos. De esta forma, tenemos

$$V'(x) = \pi H\left(2x - \frac{3}{R}x^2\right),$$

por lo que los puntos críticos de V son las raíces de la ecuación

$$x\left(2 - \frac{3}{R}x\right) = 0,$$

las cuales son

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{2}{3}R.$$

Ahora bien, dado que

$$V''(x) = \pi H\left(2 - \frac{6}{R}x\right)$$

tenemos $V''(0) = 2\pi H > 0$ y $V''\left(\frac{2}{3}R\right) = -2\pi H < 0$. Se sigue, entonces, del criterio de la segunda derivada que la función $V(x) = \pi H x^2\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ tiene un máximo en $x = \frac{2}{3}R$ y un mínimo en $x = 0$,

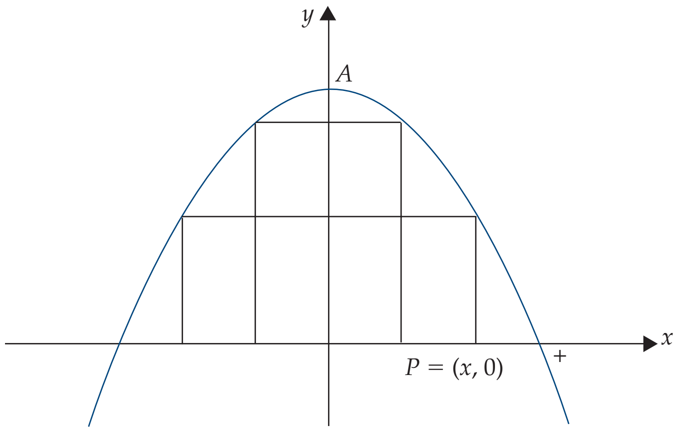
este último hecho es obvio geométricamente. De lo anterior, se concluye que el cilindro de mayor volumen inscrito en el cono tiene radio $x = \frac{2}{3}R$ y altura $h = H\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}H$. Para finalizar, tenemos que el volumen de este cilindro es

$$\begin{aligned} V\left(\frac{2}{3}R\right) &= \pi H \frac{4}{9} R^2 \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{27}\pi R^2 H \end{aligned}$$

el cual equivale a $\frac{4}{9}$ del volumen del cono $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

8.9.2 Rectángulo de mayor área inscrito en una parábola

Consideremos la parábola $y = -kx^2 + a$, donde a y k son reales positivos.



Deseamos encontrar el rectángulo de mayor área inscrito en la región bajo la parábola del semiplano superior, es decir, en la región definida por $-\sqrt{\frac{a}{k}} \leq x \leq \sqrt{\frac{a}{k}}$ y $0 \leq y \leq -kx^2 + a$. Sea x arbitrario en el intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{a}{k}}\right]$. El área del rectángulo correspondiente es

$$A = 2xy.$$

O sea

$$A(x) = 2x(-kx^2 + a) = -2kx^3 + 2ax.$$

Se intenta hallar el valor máximo de la función A en el intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{a}{k}}\right]$. En los extremos $x = 0$ y $x = \sqrt{\frac{a}{k}}$, la función A toma el valor cero. Determinemos, ahora, los puntos críticos de A en el intervalo abierto $\left(0, \sqrt{\frac{a}{k}}\right)$. Puesto que

$$A'(x) = -6kx^2 + 2a,$$

los puntos críticos de A están dados por las raíces de la ecuación

$$-3kx^2 + a = 0.$$

Estas raíces son

$$x_1 = \sqrt{\frac{a}{3k}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{\frac{a}{3k}},$$

de las cuales, la única que está en el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{a}{k}}\right)$ es $x_1 = \sqrt{\frac{a}{3k}}$. Además, $A''(x) = -12kx$, por tanto, $A''(x_1) < 0$. Esto significa que $A(x_1)$ es el valor máximo de A en el intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{a}{k}}\right]$. Así que el rectángulo de mayor área inscrito en la parábola tiene base $2x_1 = 2\sqrt{\frac{a}{3k}}$ y altura $y_1 = -k\frac{a}{3k} + a = \frac{2}{3}a$. El área de este rectángulo es $A(x_1) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3k}}a = \frac{4}{3^{\frac{3}{2}}}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}$.

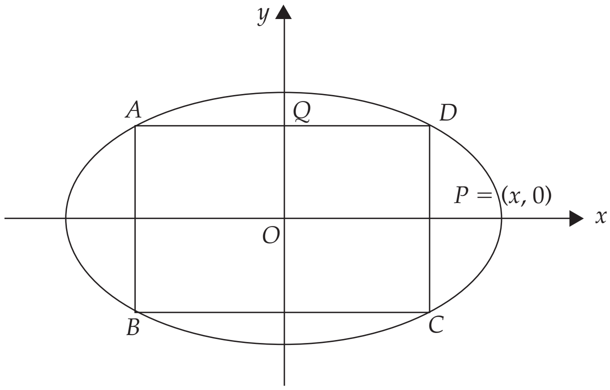
8.9.3 Rectángulo de mayor área inscrito en una elipse

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Consideremos la elipse que tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta elipse corta al eje de las abscisas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

De todos los rectángulos inscritos en esta, hallemos el de mayor área.



Primero, observemos que para $0 \leq x \leq a$, la ordenada del punto D sobre la elipse está dada por

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Puesto que el área del rectángulo $ABCD$ es cuatro veces el área del rectángulo $QOPD$, y dado que este último tiene área xy, tenemos que el área del rectángulo $ABCD$ está dada por

$$S(x) = 4xy,$$

o sea

$$S(x) = 4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Deseamos conocer el valor máximo de S en el intervalo $[0, a]$. Para tal efecto, hallaremos el valor máximo de su cuadrado, o más bien de la función

$$f(x) = \left[x\sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 = x^2\,(a^2 - x^2).$$

E claro que en los extremos del intervalo $[0, a]$, esta función se anula. Hallemos, ahora, sus puntos críticos en el intervalo abierto $(0, a)$. Puesto que

$$f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2),$$

las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ son $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ y $x_3 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. De estas, la única que pertenece al intervalo abierto $(0, a)$ es $x_2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. En este punto, la segunda derivada $f''(x) = 2a^2 - 12x^2$ toma el valor $f''\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) = -4a^2$, el cual es negativo; por tanto, f tiene un máximo en $x_2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Esto implica que la función $S(x) = 4\dfrac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$ tiene un máximo en ese punto, el cual es

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= 4\frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} \\ &= 4\frac{b}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2ab. \end{aligned}$$

Así que el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de semiejes a y b, tiene base

$$2x_2 = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a,$$

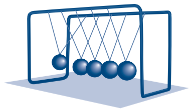
altura

$$\begin{aligned} 2y &= 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_2^2} \\ &= 2\frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}b \end{aligned}$$

y área

$$S = 2ab.$$

8.10 Problemas y ejercicios



Caída y lanzamiento vertical

1. Sabemos que por efecto de la gravedad un cuerpo que cae libremente lo hace de acuerdo con la ley $s = \frac{gt^2}{2}$, donde $9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ es la aceleración debida a la gravedad.

a) Hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$.

b) Obtener la fórmula de la velocidad del cuerpo para cualquier instante.

2. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo del punto $s = 5t + 6$, hallar la velocidad media del movimiento en

a) los primeros 6 segundos.

b) el intervalo de tiempo transcurrido entre el final del tercer segundo hasta el final del sexto segundo.

3. El punto M se va alejando del punto fijo A de manera que la distancia AM aumenta, la cual es proporcional al cuadrado de tiempo. Al transcurrir dos minutos desde que comenzó el movimiento, la distancia es igual a doce metros. Halle la velocidad media del movimiento en

a) los primeros cinco minutos.

b) el intervalo de tiempo desde $t = 4$ min hasta $t = 7$ min.

c) el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ min hasta $t = t_2$ min.

4. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo, $s = t_3 + \frac{3}{t}$, halle la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$.

5. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba. La altura a la que se encuentra en cualquier instante t es $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t$, donde $g = 9.8$. Realice lo que se le pide.

a) Si t_1 se encuentra a una altura h_1, distinta de la altura máxima, determine en qué otro instante de tiempo se encuentra a la misma altura.

b) ¿Cuál es el valor de la derivada en cada uno de esos instantes?

c) Interprete los resultados obtenidos.

6. Una esfera de acero cae desde lo alto de una torre de 500 m. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer los primeros 50 m? ¿Cuánto tarda en recorrer los siguientes 50 m? ¿Y en recorrer los siguientes 50 m?

7. Si lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de $30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ¿cuál es su velocidad en el instante que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es el valor de esa altura máxima?

8. Considere una regadera que gotea, la cual está colocada a 2 m de altura. Las gotas caen a intervalos de tiempo iguales entre una y otra. En el instante en el que la primera gota toca el piso, la sexta empieza a caer. ¿A qué altura se encuentran la segunda y cuarta gotas cuando la primera toca el piso?

9. Una esfera es lanzada verticalmente hacia arriba desde 25 m de altura con una velocidad inicial de $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Cuál es el tiempo que tarda en llegar al piso? ¿Cuál es la velocidad a la que llega? Si en vez de ser lanzada hacia arriba es lanzada hacia abajo con la misma velocidad, ¿cuál es el tiempo que tarda en llegar al piso y cuál es la velocidad a la que llega? ¿El resultado de las velocidades es el esperado?

10. Dos balines de plomo caen desde la misma altura, a partir del reposo. El intervalo de tiempo entre los inicios de caída de uno y otro es de 2 segundos. ¿Cuánto tiempo después de que inicia la caída el primer balín se encuentra a 12 m de distancia del otro?

11. Una pelota cae desde el techo de un edificio. Al pasar frente a una ventana de 1.2 metros de alto le toma 0.125 segundos cruzarla. La pelota rebota perfectamente en el piso y pasa frente a la misma ventana tomando 0.125 segundos el recorrido desde el fondo hasta la parte superior. Por otra parte, transcurren 2 segundos desde que la pelota desaparece por primera vez por el fondo de la ventana hasta que vuelve a aparecer. ¿Cuál es la altura del edificio?

Problemas sobre razones de cambio

12. La capacidad calorífica o el "calor específico" de una sustancia es la cantidad de energía necesaria para aumentar 1 ºC su temperatura. Dado que el volumen de un gas puede cambiar con la variación de la temperatura, la capacidad calorífica a volumen constante para los gases se define como:

$$C_v = \frac{dU}{dT}.$$

Donde U es la energía interna total. Para un gas monoatómico $U = \frac{3}{2}NkT$ y para un gas diatómico $U = \frac{5}{2}NkT$, donde N es la constante que representan el número total de moléculas del gas y k la constante de Boltzman.

a) Obtenga la capacidad calorífica para un gas monoatómico.

b) Obtenga la capacidad calorífica para un gas diatómico.

13. En el movimiento armónico simple en una dimensión, la posición como función del tiempo es:

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \phi).$$

Donde A, w_0 y ϕ son constantes identificadas con la amplitud, la frecuencia y la fase inicial, respectivamente. Compruebe que dicha expresión cumple la relación

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w_0^2\, x(t) = 0.$$

14. El *flujo luminoso* es la potencia emitida en forma de radiación luminosa a la que el ojo humano es sensible, su unidad es el *lumen* (que es una unidad de energía). La *iluminancia* E es la cantidad de flujo luminoso F, emitido por una fuente de luz que incide sobre una superficie, por unidad de área. Cuando se considera a lo largo de una dimensión x, la iluminancia sobre una superficie depende de la distancia a la que se encuentre la superficie de la fuente de luz y está dado por

$$E = L\frac{dF}{dx}.$$

Donde L es una constante. Encuentre la iluminancia cuando el flujo luminoso es una función de x de la siguiente forma:

a) $F = \dfrac{x^2 - 5}{x^2}$

b) $F = \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $F = \dfrac{e^{3x}}{x}$

15. Para un material en forma rectilínea, el *módulo de elasticidad* E es el cociente del esfuerzo aplicado σ entre la deformación ε, obtenida con dicho esfuerzo. Para un material no rectilíneo se define el *módulo de elasticidad tangente* como:

$$E_{\tan} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

Obtenga el módulo de elasticidad tangente correspondiente, cuando la deformación ε, como función del esfuerzo, está dada por cualquiera de las expresiones

a) $\varepsilon = \sqrt{\sigma + 2}$

b) $\varepsilon = e^{\sigma}$

c) $\varepsilon = 5\sigma^2$

16. Cuando en una viga en posición horizontal, de longitud L, que está sostenida solo por ambos extremos, se distribuye una carga encima de ella, el desplazamiento vertical generado $w(x)$ en la posición x, ubicada a lo largo de la viga, cumple la siguiente relación:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI}M(x).$$

Donde $M(x)$ es el *momento flector* en la posición x y las constantes E e I son el módulo de elasticidad del material y el momento de inercia de la sección transversal, respectivamente. Determine el momento flector para los siguientes desplazamientos:

a) $w(x) = -\frac{x^3}{EI}(3L^2 - 3x^2)$

b) $w(x) = -\frac{x}{6EIL}(3L^2 - 3x^2)$

c) $w(x) = -\frac{x}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$

17. Cuando en una viga en posición horizontal, de longitud L, que está sostenida solo por ambos extremos, se distribuye una carga encima de ella, el desplazamiento vertical generado en cada punto $w(x)$ depende de la carga $q(x)$ colocada de la siguiente manera:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}.$$

Determine la distribución de cargas para los siguientes desplazamientos verticales:

a) $w(x) = -\frac{x^3}{EI}(4L^2 - 4x^2)$

b) $w(x) = -\frac{x^2}{6EI}(L - x)$

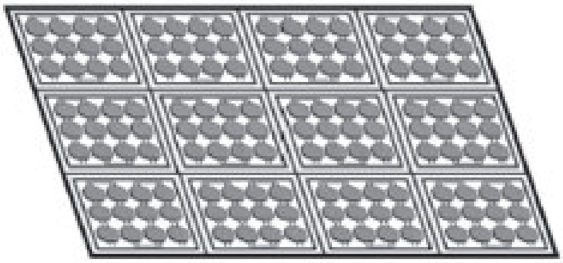
c) $w(x) = -\frac{x}{6EIL}(3L^2 - 3x^2)$

d) $w(x) = -\frac{x}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$

18. En una fábrica se apilan palillos muy finos, de manera que forman un prisma triangular. Si el área del triángulo isósceles formado en uno de los extremos aumenta a una velocidad de $2\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$, mientras la altura aumenta a una velocidad de $1\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$, ¿cuál es la velocidad con la que aumenta la base del triángulo cuando la altura es de 100 cm y el área de 100 cm^2?

19. El costo marginal es la adición al costo total como resultado de incrementar la producción en una unidad. En un laboratorio de celdas solares el costo c, en miles de pesos, para producir m, metros cuadrados, está dado por la siguiente función:
$c(m) = 20\,000 + 20\log(1 + 0.5m)$.
Diga cómo calcular el costo marginal cuando se han producido m_0 metros cuadrados. Calcule el costo marginal para el caso específico:

$m_0 = 20\,000$ m^2.



20. El cambio en la población de ballenas depende, en condiciones ideales, solo de la tasa r de nacimientos y de la tasa, M, de muertes naturales, lo cual se describe con la expresión

$$\frac{dN}{dt} = rN - MN.$$

Escriba la expresión correspondiente al considerar la tasa, p, de mortalidad debida a la pesca.



21. En general, la población tiende a crecer con el tiempo en forma proporcional a la población existente. De acuerdo con los censos, el número de habitantes en México era de 97 484 millones, aproximadamente, en 2000 y de 112 337 millones, en 2010. Utilice esta información para estimar la población en el 2020 en dicho país.



22. Las dosis de un tipo específico de antibióticos, de fluidos rehidratantes y de anestésicos se prescriben en función de la superficie corporal del paciente. Para los niños menores de tres años, con pesos que oscilan en el intervalo de 3 a 15 kilos, la relación entre peso y superficie corporal está dada por:

$$S_{ch} = 1321 + 0.3433p.$$

Donde el peso, p, está dado en kilogramos y la superficie corporal, S_{ch}, está dada en cm^2. Por otro lado, el peso, en un caso ideal, está relacionado con la edad por medio de la siguiente expresión:

$$p = 3 + 1.8\sqrt{e}\ .$$

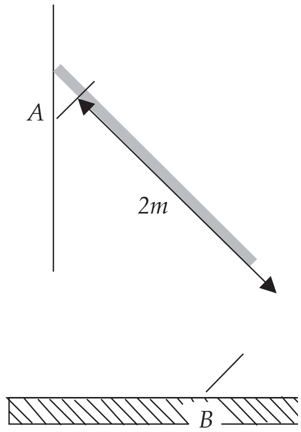
En esta fórmula, la edad, e, está dada en meses.

a) ¿Cómo depende la superficie corporal de la edad?

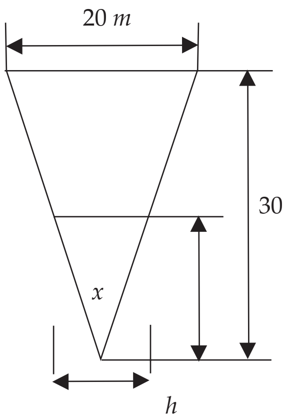
b) ¿Cuánto aumenta la superficie corporal en un mes?

c) ¿Qué significado tiene la derivada de $S_{ch}(e)$?

23. Se tiene una varilla de 2 metros descansando en el ángulo entre una pared y el piso. El extremo que está sobre el piso (B) se empieza a desplazar de manera constante a $0.1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, alejándose de la pared. ¿Cuál es la velocidad a la que se desplaza el extremo que se encuentra sobre la pared (A)? (Véase figura.)



24. Considérese un cono, cuyo corte a lo largo de su eje se muestra en la figura, que se llena con un flujo de agua de 0.6 m^3 por minuto. A qué velocidad aumenta el nivel de líquido cuando el cono se ha llenado hasta una altura de 15 metros.



Se han indicado algunas variables auxiliares que podrían usarse en la solución a este problema.

25. Si el número de bacterias en un cultivo cambia en el tiempo según la ecuación $N = I + 7t - 0.23t^2$, donde el tiempo se

expresa en minutos, ¿qué significado tiene *I*?, ¿cuál es la velocidad de crecimiento de la población después de dos horas?

26. Un cohete es disparado verticalmente hacia arriba a 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Para un observador que se encuentra a 500 metros de la plataforma de lanzamiento, ¿cuál es la razón de cambio en el tiempo del ángulo de observación cuando el cohete se encuentra a 300 metros de altura?

27. Un tren y un globo aerostático parten de un mismo punto simultáneamente. El tren se traslada a una velocidad uniforme de $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, mientras que el globo asciende (también uniformemente) a $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿A qué velocidad se aparta el uno del otro?

28. Un hombre que mide 1.7 metros de estatura se aleja a una velocidad de $6.34\frac{\text{km}}{\text{h}}$, desde la base de un farol que se encuentra a 3 m de altura. ¿A qué velocidad se traslada la sombra que proyecta su cabeza?

29. Un caballo corre a una velocidad de $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a lo largo de una circunferencia en cuyo centro se halla un farol. En el punto inicial de la carrera, está situada una cerca que sigue la dirección de la tangente a la circunferencia referida. ¿A qué velocidad se desplaza la sombra del caballo a lo largo de la cerca en el momento en que este ha recorrido $\frac{1}{8}$ de la circunferencia?

30. Considere un globo esférico que se llena con un gas específico a una razón constante de $50\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$. Suponiendo que la presión permanece constante y que el globo siempre tiene una forma esférica, ¿cuál es la rapidez con la que crece el radio si al inicio es de 5 cm?

31. Cada arista de un cubo se dilata a razón de 1 cm por segundo. ¿Cuál es la razón de variación del volumen cuando la longitud de cada arista es

a) 5 cm?

b) 10 cm?

c) x cm?

32. Un avión se desplaza en vuelo horizontal a 8 km de altura (en este problema se supone la Tierra plana). La línea de vuelo pasa por encima de un punto, *P*, del suelo. La distancia entre el avión y el punto *P* disminuye a razón de 4 km por minuto en el instante en el que esta distancia es 10 km. Calcule la velocidad del avión en kilómetros por hora.

33. Un campo de béisbol es un cuadrado cuyos lados tienen 30 metros de longitud. Una pelota es lanzada por el bateador a lo largo de una línea que pasa por la tercera base con una velocidad constante de $30\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Cuál es la rapidez con la que varía la distancia de la pelota a la primera base

a) cuando la pelota se encuentra a mitad de camino de la tercera base?

b) cuando la pelota alcanza la tercera base?

34. Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una velocidad de $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y a una distancia de 6 km. ¿Cuál es su velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que distan precisamente 8 km del faro?

35. Un recipiente tiene la forma de un cono circular, cuya altura es 10 metros y el radio de la base 4 metros. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de 5 m^3 por minuto, ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 5 metros, si

a) el vértice del cono está hacia arriba?

b) el vértice del cono está hacia abajo?

36. Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular recto con su vértice hacia abajo. Su altura es de 3 metros y el radio de la base mide 5 metros. El agua sale por el fondo a razón constante de 0.1 m^3 por segundo. Se vierte agua en el depósito a razón de xm^3 por segundo. Calcule x de modo que el nivel del agua ascienda a razón de $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en el instante en el que el agua alcance la altura de 2 metros.

Problemas geométricos de máximos y mínimos

37. Pruebe que de entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.

38. Demuestre que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

39. Doble un trozo de alambre de longitud L, de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible.

40. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima y de perímetro 24.

41. Considere los rectángulos cuya área mide 32 cm^2. De entre todos estos rectángulos encuentre aquel cuya distancia de uno de sus vértices al punto medio de uno de los lados no adyacentes sea mínima.

42. Pruebe que de entre todos los triángulos de área dada, el triángulo equilátero tiene el menor perímetro.

43. Pruebe que de entre todos los triángulos de perímetro dado, el triángulo equilátero tiene la mayor área.

44. Encuentre las longitudes de los lados de un rectángulo de mayor área, que puede ser inscrito en un semicírculo de modo que uno de los lados del rectángulo se encuentre sobre el diámetro del círculo.

45. Demuestre que de todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo dado, el cuadrado tiene área máxima. Pruebe, también, que el cuadrado tiene el perímetro máximo.

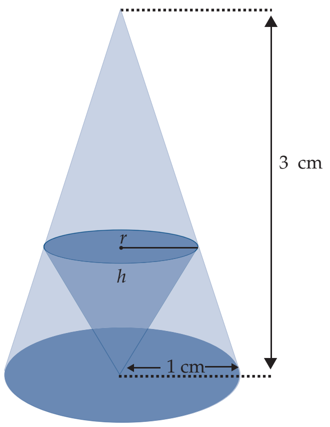
46. Un granjero tiene L metros de alambrado para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones del terreno pueden cercarse, para que sea de área máxima?

47. Dada una esfera de radio R, halle el radio r y la altura h del cilindro circular recto de mayor superficie lateral que puede inscribirse en la esfera.

48. Dado un cono circular recto de radio R y altura H, halle el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en el cono.

49. Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que entre la mayor cantidad de luz por la ventana?

50. Determine las dimensiones del cono de mayor área lateral que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 1 cm y altura 3 cm, como se muestra en la figura siguiente:



51. Determine las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una semiesfera de radio R, de tal forma que el plano de la base del cono coincida con el de la semiesfera.

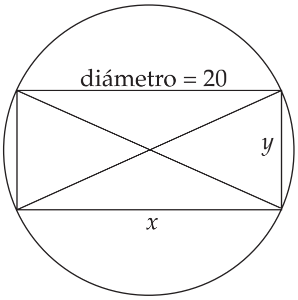
52. ¿Cuál de todos los cilindros de volumen V dado tiene menor área total?

53. De todos los rectángulos de área A, encontrar el que tiene la diagonal más corta.

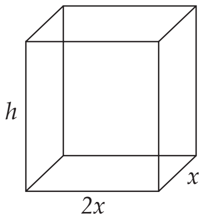
54. Considere todas las rectas que pasan por el punto (1, 2) y que cortan a los semiejes positivos x y y en los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (0, b)$, respectivamente. Halle la recta tal que el área del triángulo AOB sea mínima.

55. De todos los puntos de la recta $x + y = 3$, encuentre el que se halla más cerca al origen de coordenadas.

56. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.



57. Considérese un prisma recto de base rectangular, de modo que el largo de la base sea el doble que el ancho, tal como se indica en la figura. Halle las dimensiones del prisma cuya área total sea 12 m^2 y que tenga volumen máximo.



Problemas diversos de máximos y mínimos

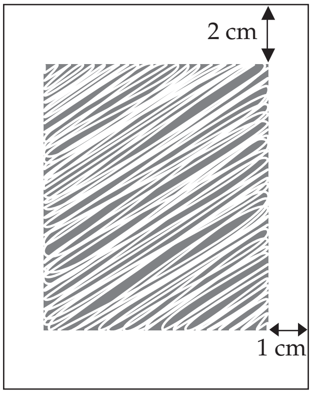
58. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular sin tapa y con base un cuadrado, que tiene máximo volumen y cuya suma de áreas de sus caras (incluyendo la base) sea de 75 cm^2.

59. Exprese el número 4 como suma de dos racionales positivos, de modo que la suma del cuadrado de uno más el cubo del otro sea mínima.

60. Un alambre de ℓ m de longitud se corta en dos partes. Con una de las partes se forma un cuadrado y con la otra un círculo. Diga cómo debe cortarse el alambre de manera que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima y cómo debe cortarse para que la suma sea mínima.

61. Resuelva el problema anterior, pero ahora considerando que con las partes del alambre que se cortaron se forma un triángulo y un círculo, respectivamente.

62. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm, cada uno, y los márgenes laterales deben medir 1 cm. Halle las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

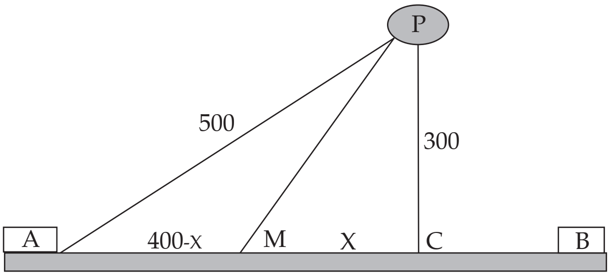


63. Un camión recorre 300 kilómetros en una carretera recta a velocidad constante, v. Las leyes de circulación establecen que la velocidad en esa carretera sea entre 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Se supone que la gasolina cuesta \$7.50 el litro y que el consumo depende de la velocidad $10 + \frac{v^2}{120}$ litros por hora. Si el conductor cobra P pesos por hora y si obedece todas las leyes de tránsito, determine la velocidad más económica y el coste del viaje si $P = 0$, $P = 20$, $P = 40$ y $P = 60$.

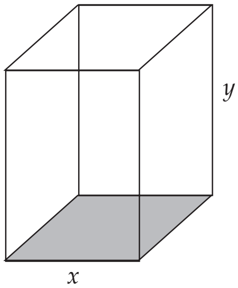
64. Considere un faro que está en un punto A, en una isleta que se halla a 5 km del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 km de O, hay una tienda. Si el guardafaros puede remar a 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y puede caminar a razón de 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿en qué punto de la costa

debe desembarcar, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

65. Una carretera recta en el desierto une la ciudad de Asuán y la zona arqueológica de Abu-Simbel. Suponga que una camioneta 4×4 debe ir desde la ciudad Asúan hasta un oasis, P, situado a 500 kilómetros de distancia de Asuán. Para tal efecto, puede circular a través de la carretera recta, la cual permite una velocidad máxima de $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, mientras que por el desierto la velocidad es de $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Considerando que la distancia más corta de P a la carretera es de 300 kilómetros, determine la ruta que deberá usar la camioneta para ir de Asuán al oasis en el menor tiempo posible.



66. Se desea construir un depósito abierto de lámina con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros. ¿Qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible? (Véase figura.)



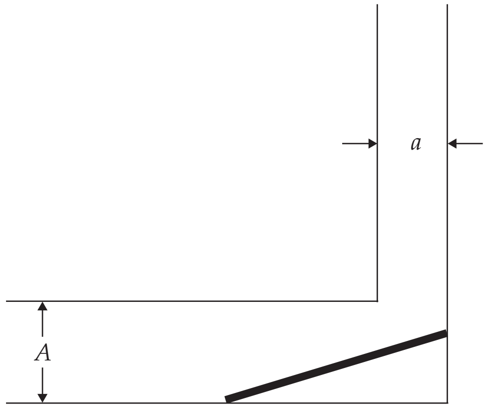
67. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm² y volumen máximo. Determine las dimensiones del cilindro.

68. Determine las dimensiones de una lata de refresco de 250 ml de capacidad, para cuya manufactura se emplee la menor cantidad de aluminio.

69. Un tanque de gas estacionario de volumen dado tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos. El costo de los hemisferios por metro cuadrado es el doble del costo de la superficie cilíndrica. Diga cuáles son las proporciones del tanque que resulta más económico. (Véase figura.)



70. Encuentre la máxima longitud ℓ de una garrocha que puede trasladarse horizontalmente sobre un pasillo que da vuelta en escuadra para conducir a otro pasillo. Suponga que el ancho del primer pasillo es A y la del segundo a.



Sobre la función exponencial e^{π}

71. Halle el mínimo absoluto de la función $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ en el intervalo $(0, +\infty)$, donde n es un entero positivo. Concluya que se cumple

$$\frac{e^n}{n^n} \leq \frac{e^x}{x^n}$$

para toda $x > 0$. Use este resultado para probar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} 5 +\infty.$$

Con la ayuda de una computadora, grafique las funciones $\frac{e^x}{x^2}$, $\frac{e^x}{x^3}$ y $\frac{e^x}{x^4}$.

72. Pruebe que si

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es cualquier polinomio de grado n y $a_n > 0$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{P(x)} = +\infty$$

73. Deduzca del resultado del problema anterior, que la función exponencial $f(x) = e^x$ no es una función racional.

74. Pruebe que la función exponencial $f(x) = e^x$ no es una función algebraica, es decir, no satisface la ecuación polinomial

$$a_n(x)y^n 1\, a_{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0 = 0,$$

donde los coeficientes $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x)$, $a_0(x)$ son polinomios en x.

Problemas sobre límites. Diversas reglas de l'Hospital

75. Pruebe la siguiente proposición que es una variante de la regla de l'Hospital. Así pues, suponga que se tienen los siguientes límites laterales

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

Si $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

76. Usando el ejercicio anterior, pruebe la siguiente regla de l'Hospital:

Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

y

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Ayuda: considere

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)}{G(x)}$$

Recuerde que

$$F'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ y } G'(x) = g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

para toda $x > 0$.

77. Usando el problema anterior y la continuidad de la función exponencial, pruebe que

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

b) $\lim_{h\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{h}\right)^h = e^x$

78. La siguiente regla de l'Hospital se probará por etapas:

Supongamos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

a) Por definición se tiene que para $\varepsilon_0 > 0$ dada, existe $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon_0 \text{ siempre que se tenga } x > M.$$

Ahora, aplique el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones f y g en el intervalo $[M, x]$, con el fin de concluir que

$$\left|\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} - L\right| < \varepsilon_0 \text{ para toda } x > M.$$

Dado que

$$\left|\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)}\right| - \mid L \mid \leq$$

$$\left|\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} - L\right| < +\,\varepsilon_0$$

como consecuencia de las dos desigualdades anteriores, tenemos

$$\left|\frac{f(x)-f(M)}{g(x)-g(M)}\right| < |\,L\,| + \varepsilon_0 \text{ para toda } x > M.$$

b) Ahora, escribamos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(M)}{g(x)-g(M)}\frac{f(x)}{f(x)-f(M)}\frac{g(x)-g(M)}{g(x)}$$

$$= \frac{f(x)-f(M)}{g(x)-g(M)}\frac{1-\frac{g(M)}{g(x)}}{1-\frac{f(M)}{f(x)}}.$$

Tomando M fija, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{g(M)}{g(x)}}{1-\frac{f(M)}{f(x)}} = 1.$$

Así que podemos escribir

$$\frac{1-\frac{g(M)}{g(x)}}{1-\frac{f(M)}{f(x)}} = 1+\varepsilon(x)$$

en donde $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$. Entonces,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(M)}{g(x)-g(M)}\big(1+\varepsilon(x)\big)\cdot$$

Por tanto,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le \left|\frac{f(x)-f(M)}{g(x)-g(M)} - L\right| + \left|\frac{f(x)-f(M)}{g(x)-g(M)}\right||\varepsilon(x)|.$$

Concluya de esta desigualdad que dado $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$$

si x es suficientemente grande.

79. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}$.

80. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}$.

81. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\log x)^n}$.

82. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^n$.

83. Calcule $\lim_{x\to 0+}\big(x\log x\big) = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$.

84. Calcule $\lim_{x\to+\infty} x(\log x)^n$.

85. Calcule $\lim_{x\to 0} x^x$.

Problemas sobre velocidad de crecimiento

86. Sean f y g funciones continuas tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Decimos que f y g crecen a la misma velocidad si existe

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$$

y $0 \ne l \ne +\infty$. En este caso escribimos

$$f \sim g$$

Muestre que los siguientes pares de funciones f y g crecen a la misma velocidad:

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 2,\ 2x^4 - 1$

b) $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^x + x^n$, donde n es un entero positivo

c) $f(x) = e^{x^2} - e^x,\ g(x) = e^{x^2} + x^{100}$

87. Pruebe que si

$$f >> g$$

entonces

$$f + g \sim g.$$

88. Sean f y g funciones continuas tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Diga si es necesariamente cierto que se cumple una de las tres condiciones siguientes:

$$f >> g,\ f \sim g \text{ o } g >> f.$$

89. Ordene, según su velocidad de crecimiento, las siguientes funciones

a) $e^x, x, x^x, e^{x^2}, 2^x, e^{\frac{x}{2}}, \log x, (\log x)^{2x}$

b) $e^{x^2}, (\log x)^x, x^x, x^{x^2}, e^{e^x}$

90. Escriba un ejemplo de una función que crezca más rápido que

a) x^x

b) x^{x^2}

c) e^{x^x}

APÉNDICE



Proposición

Sean $a > 0$ y (r_n) una sucesión de racionales que converge a cero, entonces la sucesión (a^{r_n}) converge a 1.

Demostración

De acuerdo con la definición de límite de una sucesión, mostremos que dada cualquier $\varepsilon > 0$, siempre es posible encontrar un entero positivo N, tal que para todo índice $n \geq N$ se cumple

$$\left|a^{r_n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria. Como $1 + \varepsilon > 1$, la sucesión

$$1 + \varepsilon, (1 + \varepsilon)^2, (1 + \varepsilon)^3, (1 + \varepsilon)^4, \ldots$$

tiende a infinito. En particular, existe un entero positivo K, tal que

$$(1 + \varepsilon)^K > a.$$

Para este índice tenemos, entonces

$$(1 + \varepsilon)^K > a$$
$$1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{K}}$$

También se tienen

$$1 - \varepsilon = \frac{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} < \frac{1}{1 + \varepsilon} < \frac{1}{a^{\frac{1}{K}}}.$$

Así pues, obtenemos las desigualdades

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{a^{\frac{1}{K}}} = a^{-\frac{1}{K}} \quad \text{y} \quad a^{\frac{1}{K}} < 1 + \varepsilon.$$

Consideremos por el momento $a > 1$. En la sección 3.1.5 probamos que si s y t son dos racionales cualesquiera con $s < t$, entonces $a^s < a^t$. En particular en este caso tenemos

$$a^{-\frac{1}{K}} < a^{\frac{1}{K}}$$
$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{K}} < a^{\frac{1}{K}} < 1 + \varepsilon$$

Más aún, si r es cualquier racional tal que $-\frac{1}{K} < r < \frac{1}{K}$, entonces

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{K}} < a^r < a^{\frac{1}{K}} < 1 + \varepsilon.$$

Ahora bien, como la sucesión (r_n) converge a cero, existe un entero positivo N, tal que para todo índice $n \geq N$ se cumple

$$-\frac{1}{K} < r_n < \frac{1}{K}.$$

Por tanto, y por lo ya probado, también se cumple

$$1 - \varepsilon < a^{r_n} < 1 + \varepsilon.$$

O sea

$$-\varepsilon < a^{r_n} - 1 < \varepsilon.$$

Es decir, se cumple

$$|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$$

para todo entero positivo $n \geq N$. Esto prueba que para $a > 1$

$$\lim_{x \to \infty} a^{r_n} = 1.$$

Consideremos, ahora, el caso $0 < a < 1$. Por lo antes probado, aplicado a $\alpha = \dfrac{1}{a} > 1$, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^{r_n} = 1.$$

Pero $a^{r_n} = \dfrac{1}{\alpha^{r_n}}$, así que por las propiedades de los límites tenemos

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha^{r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{r_n}} = 1.$$

Con esto queda probada la proposición.

Teorema

Sea f una función estrictamente creciente definida en un intervalo abierto I con imagen A. Entonces, la función inversa $f^{-1}: A \to I$ es continua.

Demostración del teorema

Dado que f es estrictamente creciente en un intervalo abierto I, la función f^{-1} está definida en la imagen A de f. Probemos que f^{-1} es continua en cada punto $a \in A$. Sea pues $a \in A$. Mostremos que para cada sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

de elementos de A que tienda al punto a, la sucesión de valores de f^{-1}:

$$f^{-1}(a_1), f^{-1}(a_2), f^{-1}(a_3), \ldots$$

tiende al valor $f^{-1}(a)$. Para esto, recurriremos a la definición de límite de una sucesión. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Debemos probar que existe un entero positivo N, tal que

$$|f^{-1}(a) - f^{-1}(a_n)| < \varepsilon$$

para todo índice $n \geq N$. La desigualdad anterior también se escribe

$$f^{-1}(a) - \varepsilon < f^{-1}(a_n) < f^{-1}(a) + \varepsilon$$

Así que deseamos probar que existe un natural N, tal que se cumple la desigualdad anterior para toda $n \geq N$. Observemos que $f^{-1}(a)$ es un elemento del intervalo I, el cual es abierto por hipótesis. El intervalo $(f^{-1}(a) - \varepsilon, f^{-1}(a) + \varepsilon)$ no necesariamente está contenido en I, pero si nos limitamos a valores de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeñas, podemos suponer que el intervalo $(f^{-1}(a) - \varepsilon, f^{-1}(a) + \varepsilon)$ está contenido en I. Hagamos, pues, esta suposición; más aún, supongamos que todos los puntos x que satisfagan la desigualdad $f^{-1}(a) - \varepsilon \leq x \leq f^{-1}(a) + \varepsilon$ son elementos de I. Como $f^{-1}(a)$ es el centro del intervalo, en particular tenemos

$$f^{-1}(a) - \varepsilon < f^{-1}(a) < f^{-1}(a) + \varepsilon$$

Como la función f es estrictamente creciente y los tres puntos de la desigualdad anterior pertenecen a su dominio I, se debe cumplir

$$f(f^{-1}(a) - \varepsilon) < f(f^{-1}(a)) < f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$$

o sea

$$f(f^{-1}(a) - \varepsilon) < a < f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$$

pues $f(f^{-1}(a)) = a$. Los puntos $f(f^{-1}(a) - \varepsilon)$ y $f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$ son los extremos de un intervalo abierto, el cual contiene al punto a, no necesariamente en el centro, pero ciertamente
$a \in (f(f^{-1}(a) - \varepsilon), f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$. Por tanto, como la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

converge al punto a, existe un entero positivo N, tal que

$$f(f^{-1}(a) - \varepsilon) < a_n < f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$$

para todo índice $n \geq N$. Dado que la función f^{-1} también es estrictamente creciente, se tiene entonces

$$f^{-1}(f(f^{-1}(a) - \varepsilon)) < f^{-1}(a_n) < f^{-1}(f(f^{-1}(a) + \varepsilon))$$

$$f^{-1}(a) - \varepsilon < f^{-1}(a_n) < f^{-1}(a) + \varepsilon$$

Así que esta última desigualdad se cumple para todo índice $n \geq N$. Que es precisamente lo que deseábamos probar. Esto prueba el teorema.

Teorema (de continuidad uniforme)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que siempre que se tomen dos puntos $x, y \in [a, b]$, con $|x - y| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Demostración del teorema

En este caso, razonaremos por contradicción. Supóngase que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que no existe $\delta > 0$ que cumpla las condiciones del teorema, es decir, para cada $\delta > 0$ es posible encontrar algún par de puntos x_δ, y_δ en $[a, b]$, tales que

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ pero } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

En particular, para cada δ de la forma $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ existe un par de puntos x_n, y_n en $[a, b]$, tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ pero } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Mostraremos que esto está en contradicción con la continuidad de f.

Tenemos dos sucesiones, (x_n) y (y_n), en $[a, b]$, obviamente acotadas. La clave esencial de la prueba es que para estas dos sucesiones es posible construir dos subsucesiones monótonas, respectivamente, y por tanto convergentes. Una subsucesión de (a_n) es cualquier sucesión de la forma (a_{n_k}), donde (n_k) es una sucesión creciente de naturales. En palabras simples, una subsucesión de (a_n) es cualquier sucesión que se obtiene omitiendo cualquier número finito o infinito de términos de ésta.

Probemos, pues, que toda sucesión acotada tiene una subsucesión monótona (creciente o decreciente). Supóngase (a_n) acotada. A un índice N lo llamaremos **cumbre** si $a_N > a_n$ para todo natural $n > N$ (es decir, si a_N es mayor que todos sus sucesores). Hay dos posibilidades: que (a_n) tenga un número finito de índices cumbre o que tenga un número infinito. Si sólo tiene un número finito, digamos N_1, N_2, ..., N_m, entonces ningún entero $n > N_m$ es cumbre; por consiguiente, si elegimos $n_1 > N_m$, existe $n_2 > n_1$, tal que $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Pero, también existe $n_3 > n_2$, tal que $a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Para continuar con el proceso, construimos una sucesión (a_{n_k}) creciente. Por otra parte, si existe una infinidad de índices cumbre, digamos (N_k), entonces tenemos $a_{N_1} > a_{N_2} > a_{N_3} > \ldots$, así que la sucesión (a_{N_k}) es estrictamente decreciente. En cualquiera de los casos, tenemos una subsucesión de (a_n) monótona.

Sean entonces subsucesiones monótonas (x_{N_k}) y (y_{N_k}) de (x_n) y (y_n) , respectivamente. Estas sucesiones son convergentes, digamos

$$x = \lim_{k \to +\infty} x_{N_k} \text{ y } y = \lim_{k \to +\infty} y_{N_k}.$$

Estos dos límites son elementos del intervalo $[a, b]$ y como f es continua en $[a, b]$, tenemos

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{N_k}) \text{ y } f(y) = \lim_{x \to \infty} f(y_{N_k}).$$

De la condición $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, la cual se cumple para todo natural n, se sigue que ambas sucesiones (x_{N_k}) y (y_{M_k}), que tienen el mismo límite, es decir $x = y$. Entonces, tenemos

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{N_k}) = \lim_{k \to +\infty} f(y_{N_k}).$$

O sea

$$\lim_{k \to +\infty} [f(x_{N_k}) - f(y_{N_k})] = 0.$$

Pero esto no es posible, debido a que es contradictorio con la condición $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$, la cual se cumple para todo natural n. De esta forma, hemos probado el teorema.

Teorema (de Weierstrass)

Si f es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f es acotada. De hecho, existen puntos x_1, x_2 $[a, b]$, tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

En otras palabras, f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en puntos de $[a, b]$.

Demostración

Mostremos primero que f es acotada. Como f es uniformemente continua, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$, tal que siempre que se tengan dos puntos x, y de $[a, b]$ que satisfagan $|x - y| < \delta$ se debe tener $|f(x) - f(y)| < 1$. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, tales que la longitud de cada subintervalo sea menor que δ. Es decir, sea n tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Consideremos los puntos

$$a_0 = a,\ a_1 = a + \frac{b-a}{n},\ a_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, a_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n},\ a_n = b$$

Para cada intervalo $I_k = [a_{k-1}, a_k]$ y cada $x \in I_k$ se tiene, entonces,

$$|f(x) - f(a_k)| < 1.$$

Luego, para toda $x \in I_k$ se cumple

$$|f(x)| = |f(x) - f(a_k) + f(a_k)| \leq |f(x) - f(a_k)| + |f(a_k)|$$

De donde

$$|f(x)| < 1 + |f(a_k)|.$$

Por tanto, si tomamos el mayor de los números $|f(a_1)|, |f(a_2)|, \ldots, |f(a_n)|$, digamos que este sea $|f(a_N)|$, tenemos

$$|f(x)| < 1 + |f(a_N)|.$$

para toda $x \in [a, b]$. Esto prueba que f es acotada.

Ahora, probemos que f alcanza un valor máximo, es decir, que existe un punto $y \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(y)$ para toda $x \in [a, b]$.

Elijamos un punto cualquiera $x_1 \in [a, b]$ y una cota superior M_1 de f en $[a, b]$. Si $M_1 = f(x_1)$, entonces $f(x_1)$ es precisamente el valor máximo buscado y f lo toma en $y = x_1$. Supongamos que este no es el caso. Entonces, tenemos $f(x_1) < M_1$. Tomemos el punto medio entre $f(x_1)$ y M_1, es decir $\frac{M_1 + f(x_1)}{2}$. Si este número es una cota superior de f en $[a, b]$, entonces hacemos $M_2 = \frac{M_1 + f(x_1)}{2}$, en caso contrario existirá $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) < \frac{M_1 + f(x_1)}{2} < f(x_2) \leq M_1$ y hacemos $M_2 = M_1$. De esta forma tenemos, como al principio, $f(x_2) \leq M_2$. Continuando con este proceso de bisección, o bien obtenemos un punto $y = x_N$ donde la función tiene un valor máximo o bien construimos dos sucesiones (M_n) y $(f(x_n))$, de las cuales, la primera será decreciente y la segunda será estrictamente creciente, tales que

$$\lim_{n \to +\infty} (M_n - f(x_n)) = 0.$$

Como la sucesión (x_n) está acotada, pues todos los elementos pertenecen al intervalo $[a, b]$, tiene una subsucesión convergente, digamos (x_{n_k}). Sea $y = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Este punto pertenece al intervalo $[a, b]$ y como f es continua en y se tiene

$$f(y) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}).$$

Entonces, también se tiene

$$\lim_{k\to+\infty} M_{n_k} = f(y)$$

pues, $\lim_{n\to+\infty} (M_n - f(x_n)) = 0$. Finalmente, de la desigualdad

$$f(x) \leq M_n$$

que vale para toda n y toda $x \in [a, b]$, se sigue que

$$f(x) \leq \lim_{k\to\infty} M_k = f(y)$$

para toda $x \in [a, b]$. Esto prueba que $f(y)$ es un valor máximo de f en $[a, b]$.

La prueba de que existe un valor donde f es mínimo, se sigue al considerar el máximo de la función $g = -f$. Esto prueba el teorema.